ROBERTI SIMSON, M. D.

OPERA QUAEDAM GEOMETRICA

POST MORTEM EJUS

IMPENSIS PHILIPPI COMITIS STANHOPE

I M P R E S S A.



ROBERTUS SIMSON, M. D.

MATHESEOS IN ACADEMIA GLASGUENSI

PROFESSOR

Obiit ipsis Kalendis Octobris Anno 1768

*AETATIS 81.^mo^*

De. Nune pinxit 1746 *A. Baillie delin. et sculp. 1776*

ROBERTI SIMSON, M. D.

MATHESEOS NUPER IN ACADEMIA GLASGUENSI PROFESSORIS

OPERA QUAEDAM RELIQUA,

SCILICET,

I. APOLLONII PERGAEI DE SECTIONE DETERMINATA LIBRI II. RESTITUTI, DUOBUS INSUPER LIBRIS AUCTI.

II. PORISMATUM LIBER, QUO DOCTRINAM HANC VETERUM GEOMETRARUM AB OBLIVIONE VINDICARE, ET AD CAPTUM HODIERNORUM ADUMBRARE CONSTITUTUM EST.

III. DE LOGARITHMIS LIBER.

IV. DE LIMITIBUS QUANTITATUM ET RATIONUM, FRAGMENTUM.

V. APPENDIX PAUCA CONTINENS PROBLEMATA AD ILLUSTRANDAM PRAECIPUE VETERUM GEOMETRARUM ANALYSIN.

NUNC PRIMUM POST AUCTORIS MORTEM IN LUCEM EDITA

IMPENSIS QUIDEM PHILIPPI COMITIS STANHOPE,

CURA VERO JACOBI CLOW IN EADEM ACADEMIA PHILOSOPHIAE PROFESSORIS,

CUI, AUCTOR OMNIA SUA MANUSCRIPTA TESTAMENTO LEGAVERAT.

GRATUM, UT SPERATUR, GEOMETRIS MUNUS FUTURUM, NEC SCRIPTORIS, JAM CLARISSIMI, FAMAE OFFECTURUM.

GLASGUAE:

IN AEDIBUS ACADEMICIS,
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI,

M.DCC.LXXVI.

VIX fieri poteſt, quin, poſt ſummam curam adhibitam, in opere tam longo et difficili plurimi reſtent adhuc errores. Fatendum praeterea, quod in figuris omnino deeſt elegantia. Hoc artifici minus perito vitio vertendum, cui Typographus operam eas incidendi ligno commiſit. Si vero nihil occurrat, quod Geometrae moram longiorem afferre poſſit, his ut ignoſcant, rogantur lectores. Proles haec eſt poſthuma, quae praematurè parentis clariſſimi officiis orbata, indulgentiam ideo requirit. Imperfectiores ab eo relicti erant libri de Logarithmis et de Limitibus Quantitatum et Rationum. Hos recenſuit, emendavit, et in iis defectus quoſdam ſupplevit Gulielmus Traill, L. L. D. Matheſeos in Abredonenſi Academia profeſſor, nunc autem in Eccleſia Cathedrali de Connor Praebendarius. Idem, problemata in Appendice e compluri-mis, quae in Auctoris manuſcriptis reperiuntur, ſelegit; et in tribus hiſce partibus laborem corrigendi praelum in ſe benevolè ſuſcepit. Ille quidem amicitiae memor, qua celeberrimus Auctor jam ſenex ſe, juvenem adhuc, complexus eſt, hanc omnem curam ad ſcripta ejus perficienda perlubenter adhibuit.

JACOBUS CLOW.

v

DE SECTIONE DETERMINATA

LIBRI QUATUOR.

PRIORES SUNT

APOLLONII PERGAEI

DE SECTIONE DETERMINATA, LIBRI DUO,

RESTITUTI.

PRAEMITTUNTUR VERO

LEMMATA

IN LIBROS HOSCE APOLLONII,

EX LIBRO SEPTIMO

PAPPI ALEXANDRINI.

AUCTORE

ROBERTO SIMSON, M. D.

MATHESEOS IN ACADEMIA GLASGUENSI

NUPER PROFESSORE.

PRAEFATIO.

TOTA quae nobis supereſt notitia librorum quos de Sectione Determinata ſcripſit magnus Geometra Apollonius Pergaeus, ſolo Pappo Alexandrino debetur, qui omnes quae in hiſce libris continebantur propoſitiones una generali enuntiatione incluſit. Plures etiam propoſitiones ſub Lemmatum nomine tradit Pappus, quarum maximam partem, eum ex ipſius Apollonii libris dediſſe minime dubitandum eſt; multae enim earum revera ſunt lemmata quibus ſaepius in ſuis demonſtrationibus uti Apollonio neceſſarium fuit, ut ex ipſis de Sectione Determinata libris perſpicue apparebit; et quidem praecipuae et difficiliores ſunt partes demonſtrationum earum propoſitionum quibus inſerviunt, quibuſque propterea nullus ſine demonſtratione uteretur. Praeterea Pappus in librorum de Sectione Determinata deſcriptione refert Apollonium primo propoſitiones ſuas demonſtraſſe communi methodo, ac ſolis rectis lineis uſum fuiſſe; ac rurſus eaſdem oſtendiſſe ingenioſe et magis ad inſtitutionem accommodate per ſemicirculos; utrâque autem hac viâ plura ex iis quae ſervavit Pappus Lemmata demonſtrata ſunt; quae quidem ipſius eſſe Apollonii, eumque eadem propoſitionibus ſuis praemiſiſſe, atque ex Apollonii libris Pappum ea collegiſſe perſpicuum eſt. Quae vero habentur in propoſitionibus 61, 62, 64, lib. 7. Pappi, ſecundum Commandini numerationem, non ſunt lemmata, ſed propoſitiones eximiae quibus determinationes tres in libro ſecundo Sectionis Determinatae oſten-

duntur, quarum demonſtrationes Apollonium non dediſſe minime exiſtimandum eſt.

Hoſce Apollonii libros conatus eſt Willebrordus Snellius reſtituere in Apollonio ſuo Batavo, quem Lugd. Bat. anno 1608 edidit, in quo multa quidem magnifice de ſe jactat, nihil autem praeſtitit quod immodicae ſui ipſius laudationi convenit. Minime enim Apollonii propoſitum in hiſce libris aſſecutus eſt, nam in quatuor tantum problemata materiam hanc partitus eſt quam in novem Apollonius diſtribuerat; et quamvis problemata in varios caſus dividat, unam tantum demonſtrationem in unoquoque problemate adducit. Neque eandem cum Apollonio Epitagmatum numerum habet; nec mirum, cum non intellexerit quid ſint epitagmata, quae quidem variae ſunt diſpoſitiones quas habere requiritur punctum inveniendum ratione punctorum datorum; vel ſcilicet ut cadat inter duo quaevis ex punctis datis, vel extra omnia ad has vel illas eorum partes; unde et nomen διωρισμένης τομῆς, Sectionis Determinatae, hiſce libris inditum eſt, propter ſitum ſcilicet determinatum ſive definitum quem habere debet punctum quo recta propoſita ſecanda eſt, et propter ſitum determinatum punctorum inter quae et punctum inveniendum jacere debent latera rectangulorum et quadrati, ſpatiorum ſcilicet quae inter ſe datam requiruntur habere rationem; non, ut inepte putat Snellius, ex eo quod libri hi problemata quaedam continent quae determinationes habent, quod propterea vocat adjunctum leviſſimum, ex quo ſcilicet ſomniat Apollonium nomen libris ſuis dediſſe. Snellius vero diverſa facit epitagmata caſus quoſdam in quibus unus idemque eſt ſitus puncti inveniendi, ut in ſecundo et tertio epi-

tagmate primae claſſis problematis ſui quarti, aliiſque. Praeterea, quod majoris eſt momenti, nullius problematis in hiſce libris analyſin tradit, unde et ſuas ipſorum determinationes aſſumit, non ex ſolutione problematum deducit. Duas quidem Apollonii, quas in enuntiatione Propp. 61 et 64, Lib. 7. Pappi invenerat, ſuo modo oſtendit, ſine ullo tamen nexu cum problematibus quorum ſunt determinationes. Aſſerit quidem " Se potuiſſe eas tribus fere verbis ex ſuis locis derivaſſe, " placuiſſe tamen ei hunc modum quia ita ab Apollonio u- " ſurpatas haſce determinationes, non obſcuris indiciis con- " jiciebat." Snellii autem conjectura ſine omni fundamento eſt, nullus enim eſt geometra qui determinationes ſuas non deducit ex locis ſuis, hoc eſt ex ſolutione problematum; et Apollonium hoc ſemper feciſſe ex libris ejus de Sectione Rationis perſpicuum eſt. Determinationis autem Apollonii quam in enuntiatione Prop. 62, Lib. 7, Pappus tradit, Snellius nullam facit mentionem, ſed vice ejus aliam ſine demonſtratione adducit in epitagmate ſuo octavo tertiae claſſis Prob. quarti. Eum autem in Apollonii demonſtrationes non incidiſſe certum eſt, etenim ne vel uno ex Lemmatibus Apollonianis utitur. Dicit quidem " quia circulorum rotundationes concin- " nitatis neſcio quid rotunditatiſque Pappo habere viſae ſunt, " nobis quoque modus iſte perplacuit, ac quamvis utroque " modo propoſita problemata explicaſſemus, hunc ſolum al- " tero repudiato retinuimus. Quibus verbis intelligere nos volebat Snellius ſe viam Apollonianam ſolvendi haec problemata per ſemicirculos a Pappo laudatam ſequutum fuiſſe; ſed in hac re omnino deceptus eſt; circuli enim a Snellio adhibentur tantum ut conſtruat ſimplices caſus Propp. 28 et 29,

Lib. 6. Elem. Euclidis, quibus fcilicet requiritur ad datam rectam lineam applicare rectangulum dato fpatio aequale deficiens, aut excedens quadrato. De hifce autem conftruendis nunquam cogitavit Apollonius, fed tanquam ex elementis notas conftructiones has ubique affumpfit; ut manifeftum eft in multis locis librorum ejus de fectione rationis. Hae autem Snellii conftructiones praedictorum cafuum elegantes quidem funt, et eae ipfae quas poftea tradidit clariff. Halleius in Scholio ad Prop. 18. Lib. 8. Sectionum Conicarum Apollonii, ab ipfo reftituti, quem verifimile eft eas a Snellio prius ufurpatas fuiffe non cognoviffe. Nullo autem modo inferviunt folutioni problematum de Sectione Determinata ultra conftructionem praedictorum cafuum. Denique omnia quae a Snellio in hoc libro traduntur, adeo affectata brevitate et obfcuritate maxime laborant, ut nullius fint ufus in problemate quocunque folvendo quod ad Sectionem Determinatam deductum fuerit. Semicirculi autem de quibus loquitur Pappus in Praefatione fua ad Lib. 7. Collectionis Mathematicae, ii funt quorum ope Apollonius demonftrat lemmata quae fervavit Pappus, poftquam folis rectis lineis eadem communi methodo oftendiffet. Pappum autem fine ratione reprehendit Snellius quod hos de Sectione Determinata libros iis de Sectione Rationis et Spatii non praemiferit; problemata enim de Sectione Determinata quintum praefertim et fextum Lib. 1. et ea Lib. 2. illis de Sectione Rationis et Spatii difficiliora funt.

Poft Snellium Alexander Anderfonus Abredonenfis problemata primi libri Apollonii, unumque fecundi fuo modo folvit inter problemata quae fubnexuit Supplemento Apollonii redi-

vivi Parisiis anno 1612 edito. Constructiones quas tradit Cas. 2. et 3. problematis sui noni bonae sunt, similemque ipsis tertiam tradit Rogerius Ventemiglia in pag. 256 Analyseos Geometricae Hugonis de Omerique, aliasque duas ipse Hugo in pagg. 260, 263, ejusdem libri. Has, ut et similes reliquorum epitagmatum Prob. 5. et 6. Lib. 1. Apollonii dedimus in eorum demonstrationibus secundis.

Cum igitur libri de Sectione Determinata non nisi obscure et imperfecte hactenus habeantur, e re geometriae visum est eos plenius et magis distincte tradere. Multa enim problemata, ad ea quae in hisce libris tractantur, deducuntur. Eos igitur multis abhinc annis restituere aggressus, statim percepi non tam difficile fore problemata haec quodammodo soluta dare, quam eorum epitagmata et determinationes rite distinguere, et exhibere congruenter numero et ordini secundum quem Pappus eadem distribuit; maximae autem difficultatis rem esse in viam Apollonianam incidere, hoc est quae ipsius lemmatibus indigeret, et ad ejusdem determinationes duceret. Et quidem pudet dicere quoties irrito conamine haec invenire aggressus sum, quotiesque re desperata, ab incoepto destitui. Tandem anno scilicet 1727 solutionem problematis 5. et 6. Lib. 1. ope lemmatum Pappi nactus, problemata libri secundi tentabam, sed hic iterum mihi haerebat aqua, novis subortis difficultatibus, quas tamen pertinax vicit labor. Atque hoc modo ex Pappi generali propositione, et lemmatibus ab eo servatis, Apollonii libri multa investigatione foeliciter, ut geometris visurum speramus, in lucem producti sunt, et ita restituti ut ab ipsis Apollonii libris paululum aut nihil differre facile agnoscant ii qui propositiones ipsas et lemmata

quibus indigent, ut et epitagmatum et determinationum numerum et ordinem a Pappo indicatum inter se comparaverint. Hanc autem restitutionem invenire satis difficile fuisse re ipsa experientur, ni fallor, qui eam tentaverint via Apolloniana priusquam problema 5. et 6. Lib. 1. et ea libri 2. quae in sequentibus exhibentur, inspexerint.

Observandum vero est pleraque lemmata in problema 5. et 6. (nam nulla sunt in praecedentia problemata,) tres aut quatuor habere demonstrationes diversas; numeris vero distinguuntur hae demonstrationes in Graecis codicibus, et apud Commandinum, tanquam diversa essent lemmata, ut in numeris margini dextrae in hac editione appositis videri potest. In hac etiam propositiones eodem ordine numerantur quo apud Commandinum in versione sua Latina Pappi Alexandrini; propositio scilicet 22. Lib. 7. Pappi, hic facta est prima, earum scilicet quae ad Sectionem Determinatam spectant, ut revera est, et ita deinceps, nisi ubi aliqua loco suo exciderat, ut Prop. 28. et Prop. 63. quae locis propriis repositae sunt. Propositiones etiam 37, 38, 39, 40, quae, in Graecis codicibus et apud Commandinum, inter lemmata in librum 1. numerantur, revera sunt lemmata in Lib. 2. Saltem multis et variis investigationibus institutis, minime invenire potui eas alicui epitagmati Prob. 5. vel 6. utiles esse. Determinationes vero in libro secundo hisce propositionibus egent; problemata enim quarum sunt determinationes duplici via solvi possunt, quarum alterutram si iniveris, propositiones praedictae omnino necessariae sunt adde ducendam ex determinatione, ad quam hac via perventum est, alteram ad quam secunda via directe duxisset. Nam ex una tantum harum de-

terminationum Apollonius ultimam ſuam deducit. Veteres enim duabus determinationibus utebantur quarum altera ex altera ſequitur, et quarum prima conſtructioni problematis neceſſaria eſt, quae propterea compoſitioni ſemper praemittitur; altera vero, quae compoſitionem ſequitur, inſervit ex iis quae data ſunt in problemate ſtatim dignoſcere utrum conſtrui poſſit vel non poſſit; quod quidem ex prima determinatione, vel duabus primis, ſi duae ſint, ut in problematibus Lib. 2. quae determinationes habent, cognoſci non poteſt, priuſquam ad illam ultimam deducta fuerit prima aut alterutra ex primis ſi duae fuerint. In problematibus ſimplicioribus hae prima ſcilicet et ultima in unicam determinationem ſaepius coaleſcunt. Haec autem tum in Apollonii libris de Sectione Rationis, tum in hiſce facile eſt obſervare, et exemplo in Epitagmate 3. Prob. 3. Lib. 2. explicabuntur.

Quae autem de Sectione Determinata ſervavit Pappus, in Graeco codice quo utebatur Commandinus, multum mutilata et depravata habentur, ut et omnia reliqua Pappi in omnibus ut videtur codicibus, quos certiſſimum eſt a librariis Geometriae prorſus ignaris deſcriptos fuiſſe. Multum igitur debet Geometria viro optimo Federico Commandino qui, cum literas Graecas et Geometriam ſimul pulchre calleret, magno judicio, maximaque diligentia, inter alia multa, lemmata haec Pappi a multis purgavit erroribus, et propterea magno nos levavit onere. Non autem omnia, praeſertim Prop. 62. Lib. 7. redintegrare potuit; haec enim, in notis alphabeticis quae ſchema ſpectant, adeo eſt corrupta, ut demonſtrationem minime reſtituere valeret; nam notae prolixae quas ei ſubjunxit eam nullo modo attingunt.

Denique cum libri de Sectione Determinata non infimum locum teneant inter eos quos ad analysin promovendam scripserunt veteres Geometrae, nullus problematum alicujus momenti casus omissus est, nullaque determinatio, sine quibus hujus generis libri vix ullius sunt pretii. Exinde autem demonstrationes longiores evaserunt; et Pappus quidem memorat tales fuisse ipsius Apollonii, propter scilicet determinationes intricatas et difficiles, quas quidem ita esse ex ipsis libris satis superque patebit. Eos autem hoc modo restitutos Geometriae Veterum cupidis neque injucundos neque inutiles futuros quam maxime optamus.

In Transactionibus Philosophicis, anni — No — pag. — Video usum lemmatum Pappi in solutione problematum Sectionis Determinatae innotuisse viro doctissimo Henrico Pemberton, M. D. quod ostendit exemplo uno ex libro primo et altero ex libro secundo Sectionis Determinatae; in hoc autem ultimo non tradit Apollonii determinationem, verum aliam, ex qua quidem non immediate cognoscitur num problema fieri aut non fieri potest.

EX PAPPI ALEXANDRINI PRAEFATIONE AD SEPTIMUM COLLECTIONIS MATHEMATICAE LIBRUM.

De Sectione Determinata, Libri II.

HIS ſubjiciuntur libri duo de Sectione Determinata, quas etiam ad modum praecedentium unam propoſitionem dicere liceat, ſed disjunctam: "quae hujuſmodi eſt" datam rectam infinitam in uno puncto ſecare, ita, ut e rectis interceptis inter illud et puncta in illa data, vel quadratum ex una, vel rectangulum a duabus interceptis, datam habeat rationem, "vel ad quadratum ex reliqua intercepta,[a]" vel ad contentum reliquâ interceptâ et datâ quâdam, vel etiam ad contentum duabus reliquis interceptis; idque ad quam partem velis punctorum datorum. Hujus autem quaſi bis disjunctae, et intricatos diorifmos habentis, per plura neceſſario facta eſt demonſtratio. Hanc autem dedit Apollonius communi methodo tentamen faciens, ac ſolis rectis lineis uſus, ad exemplum ſecundi libri Elementorum primorum Euclidis; ac rurſus idem demonſtravit ingenioſe quidem, et magis ad inſtitutionem accomodate per ſemicirculos. Habet autem pri-

[a] Hunc caſum textui Graeco addidimus, nam ſine eo eſſent tantum quinque problemata in libro primo; ſi autem dicatur problema ſecundum poſſe in duo partiri prout punctum inveniendum requiritur eſſe inter vel extra duo puncta data, ut in ſequentibus hujus libri 1. fit, eſſent hoc modo tantum quindecim epitagmata in libro primo, Pappus autem numerat ſexdecim. Et praeterea non veriſimile eſt Apollonium problema hoc primum omiſiſſe.

mus liber problemata ſex, epitagmata, " ſive diſpoſitiones " punctorum," ſedecim, dioriſmos quinque; quorum quatuor quidem maximi ſunt, minimus unus. Sunt autem maximi, ad ſecundum epitagma ſecundi problematis, ad tertium quinti et ad tertium ſexti. Minimus vero eſt ad tertium epitagma tertii problematis. Secundus liber de Sectione Determinata tria habet problemata, epitagmata novem, dioriſmos tres; e quibus minimi ſunt ad tertium primi, ut et ad tertium ſecundi; maximus autem ad tertium tertii problematis. Lemmata habet liber primus XXVII, ſecundus vero XXIV. Inſunt autem in utroque libro de Sectione Determinata Theoremata octoginta tria.

DE
SECTIONE
DETERMINATA
LIBER PRIMUS.

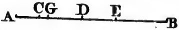
PROPOSITIO I. COMMANDINI 22.

LEMMA I.

Lemma utile in primum Epitagma quinti Problematis.

" SIT recta linea AB, et in ipsa sumantur tria puncta C, " D, E sitque ADC rectangulum rectangulo BDE aequale. " Erit ut BD ad DE, ita rectangulum ABC ad rectangulum " AEC."

Quoniam enim rectangulum ADC aequale est BDE rectangulo, erit ut AD ad DB, ita ED ad DC. Tota igitur AE ad totam BC, est ut ED ad DC; et, invertendo, " BC " ad AE, ut CD ad DE."



Rursus quoniam rectangulum ADC rectangulo BDE est aequale, ut AD ad DE, ita erit BD ad DC. [Ergo tota AB ad totam CE, est ut BD ad DC.][a] Erat autem ut BC ad AE, ita CD ad DE. Quare ratio composita ex ratione AB ad CE, et ex ratione BC ad AE est eadem quae componitur ex ratio-

[a] Quae inter uncos habentur recte supplevit Commandinus.

ne BD ad DC, et CD ad DE [Prop. G. 5. Elem. Eucl.] Sed ratio quidem compoſita ex ratione AB ad CE, et ex ratione BC ad AE eſt ratio rectanguli ABC ad AEC rectangulum [23. 6.]; ratio vero compoſita ex ratione BD ad DC, et ex ratione DC ad DE eſt ea quam habet BD ad DE [Def. rationis compoſitae]. Ut igitur BD ad DE, ita ABC rectangulum ad rectangulum AEC.

Converſa hujus propoſitionis quâ ſaepius in Sectione Determinata utendum eſt, haec eſt quae ſequitur,

"SI in recta linea ſint quatuor puncta A, C, E, B, et ſumatur quintum D quod facit rationem BD ad DE, eandem rationi rectanguli ABC ad ipſum AEC; erit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE."

Nam ſi non fuerit, ſit rectangulum ADG aequale rectangulo BDE; igitur per Prop. 1. erit BD ad DE, ut rectangulum ABG ad ipſum AEG. Ut igitur rectangulum ABC ad ipſum AEC, ita eſt rectangulum ABG ad AEG rectangulum.



Quare, permutando et per 1. 6. ut CB ad BG, ita eſt CE ad EG; et, dividendo, ut CG ad GB, ita eſt CG ad GE. Aequalis igitur eſt GB ipſi GE; quod fieri non poteſt. Ergo rectangulum ADC aequale eſt ipſi BDE.

PROP. I. ALITER. LEM. 2.

QUONIAM rectangulum ADC aequale eſt rectangulo BDE, ob proportionem, "ſcilicet AD ad DB, ut ED ad DC," et tota

ad totam, erit ut AE ad BC, ita AD ad DB; componendoque, ut utraeque AE, BC ad BC, ita AB ad BD. Quod igitur continetur utriſque AE, CB, et BD aequale eſt rectangulo ABC. Rurſus quoniam eſt ut AD ad DB, ita ED ad DC; et tota AE ad totam BC, erit ut ED ad DC. Quare invertendo, componendoque, ut utraque AE, CB ad AE, ita CE ad ED; igitur id quod continetur utriſque AE, CB, et ED eſt aequale rectangulo AEC. Oſtenſum autem eſt, quod continetur utriſque AE, CB, et BD aequale eſſe rectangulo ABC. Permutando igitur, ut rectangulum ab utriſque AE, CB, et [[a]BD, ad contentum utriſque AE, CB et DE, hoc eſt ut BD ad] DE, ita erit rectangulum ABC ad AEC rectangulum.

Aliter, in Epitagma 1. Prob. 5. praemonſtratis tamen duobus quae ſequuntur.

PROP. II. COMM. 23. LEM. 3.

" SIT recta linea AB aequalis CD, et in ipſa CD ſumatur
" quodvis punctum E. erit rectangulum ACD aequale et rect-
" angulo AED, et rectangulo BEC."

Secetur BC bifariam in F; ergo rectangulum ACD una cum quadrato ex FC aequale eſt quadrato ex FD [5. 2.] eadem ratione rectangulum AED una cum quadrato ex FE aequale eſt quadrato ex FD. Quare rectangulum ACD una cum quadrato ex FC, aequale eſt rectangulo AED una cum quadrato ex FE, hoc eſt



[a] Haec inter uncos recte reſtituit Commandinus.

una cum rectangulo BEC, et quadrato ex FC [6. 2.] commune auferatur quadratum ex FC; reliquum igitur rectangulum ACD aequale est rectangulo AED et rectangulo BEC.

PROP. III. COMM. 24. LEM. 4.

" IISDEM positis sit punctum E extra rectam AD. Erit " rursus rectangulum BEC rectangulo AED [a] et rectangulo " BDC aequale."

Secetur rursus BC bifariam in puncto F; erit rectangulum BEC una cum quadrato ex FC aequale quadrato ex FE [6. 2.] Ergo rectangulum BEC una cum quadrato ex FC aequale est rectangulo



AED una cum quadrato ex FD [6. 2.], hoc est una cum rectangulo BDC [b] et quadrato ex FC [6. 2.]. Commune auferatur quadratum ex FC; reliquum igitur rectangulum BEC aequale erit rectangulo AED [a] et rectangulo BDC.

PROP. IV. COMM. 25. LEM. 5.

" HIS praemonstratis, ostendendum est si rectangulum ADC " aequale sit rectangulo BDE, ut BD ad DE [c], ita esse rect- " angulum ABC ad AEC rectangulum."

[a] In codice regio Parisiensi No. 2368. aeque ac in Commandini habetur αδι, pro quo recte posuit Commandinus αιδ.

[b] Pro γδ in Graeco codice recte posuit Commandinus δγ.

[c] Pro βγ in Graeco codice recte posuit Commandinus βι. In textu vero et schemate hujus propositionis loco B posuimus D, et vice versa, ut similia essent praecedentibus.

Ponatur ipsi CE aequalis FA, quoniam igitur rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE, commune apponatur rectangulum FDE; ergo totum rectangulum FB, DE [d] aequale est rectangulo FDE et rectangulo ADC. Haec autem ex antecedente * aequalia sunt rectangulo FCE, hoc est rectangulo AEC; rectangulum igitur FB, DE aequale est ipsi AEC. Aliud autem rectangulum est



FBE, ergo ut rectangulum FBE ad ipsum FB, DE, hoc est ut BE ad ED, [ita rectangulum FBE ad ipsum AEC. Et componendo, ut BD ad DE, ita rectangulum FBE una cum ipso AEC ad rectangulum AEC.] [e] Sed rectangulum FBE una cum ipso AEC aequale est rectangulo ABC ex antecedente. Ut igitur BD ad DE, ita est rectangulum ABC ad ipsum AEC.

PROP. V. COMM. 26. LEM. 6.

" SI sit triangulum ABC, et duae rectae lineae ducantur, ut " AD, AE, ita ut anguli BAC, DAE duobus rectis sint ae-" quales; erit ut rectangulum BCD ad rectangulum BED, " ita quadratum ex CA ad quadratum ex AE."

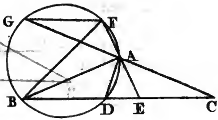
Si enim circa triangulum ABD circulus describatur, et rectae CA, EA, producantur ad puncta G, F, transferetur rectangulum quidem BCD ad rectangulum GCA, rectangulum

[d] Recte posuit Commandinus FB, DE pro DFB in Graeco codice.

* Sc. ex Prop. 2.

[e] Haec inter uncos recte restituit Commandinus vice eorum quae vitiosa et imperfecta sunt in codice Graeco.

vero BED ad ipsum FEA; et oportebit, permutando, quaerere si est ut rectangulum GCA ad quadratum ex CA, ita rectangulum FEA ad quadratum ex EA. Hoc autem idem est ac quaerere si ut GC ad CA, ita sit FE ad EA. Si igitur GF parallela est ipsi BC, erit ut GC ad CA, ita FE ad EA. Parallela est autem; quoniam enim anguli BAC, DAE duobus rectis sunt aequales, erit DAE angulus aequalis ipsi BAG. Sed angulus quidem DAE extra quadrilaterum "BFAD in circulo" aequalis est angulo FBD, angulus vero BAG aequalis est angulo BFG. Angulus igitur FBD angulo BFG aequalis erit; et sunt alterni; ergo GF parallela est ipsi BC. Hoc autem est quod quaerebatur.



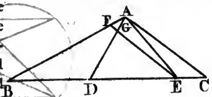
PROP. VI. COMM. 27. LEM. 7.

"Praecedens" Aliter.

"SINT in triangulo ABC anguli BAC, DAE duobus rectis "aequales; erit ut rectangulum BCD ad rectangulum BED,[a] "ita quadratum ex CA ad quadratum ex AE."

[a] Locus hic videtur vitiatus esse in codice Graeco quo utebatur Commandinus, qui eum non recte restituit scribendo "ut rectangulum CBE ad rectangulum CDE;" certissimum enim est, tum ex priore Propositione, tum ex ipsa Demonstratione locum legendum esse ut in textu nostro; et nuper inveni ita scriptum esse in MSto regio.

Ducatur per E ipſi AC parallela EGF; aequalis igitur eſt angulus DAE angulo AFE,[b] et propterea rectangulum FEG quadrato ex AE eſt aequale.[c] Itaque quoniam ut CA ad FE, ita eſt CB ad BE; ut autem CA ad GE, ita CD ad DE, erit ratio compoſita ex ratione CA ad FE, et ex ratione CA ad GE, eadem compoſitae ex ratione CB ad BE, et ex ratione CD ad DE. Sed ratio compoſita ex ratione CA ad FE,



et ex ratione CA ad GE eſt ratio quadrati ex CA ad rectangulum FEG, hoc eſt ad quadratum ex AE. Compoſita vero ex ratione CB ad BE, et ex ratione CD ad DE, eadem eſt rationi rectanguli BCD ad rectangulum BED. Eſt igitur ut rectangulum BCD ad ipſum BED, ita quadratum ex CA ad quadratum ex AE.

PROP. VII. COMM. 29. LEM. 8.

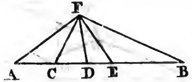
" QUOD cum ita ſit, antedictum Lemma aliter demonſtra-
" bimus, viz. " Si fuerit rectangulum ADC aequale rectan-
" gulo BDE, erit" ut BD ad DE, ita rectangulum ABC ad
" rectangulum AEC."

Ducatur a puncto D quaevis recta linea DF, et rectangulo ADC aequale ponatur quadratum ex DF; junganturque

[b] Uterque enim cum ipſo BAC aequalis eſt duobus rectis. Com.

[c] Quoniam aequiangula ſunt FAE, GAE triangula. Com.

AF, CF, EF, BF. Quoniam igitur rectangulum ADC aequale est quadrato ex DF, erit [16, et 6. 6.] angulus CFD angulo A aequalis. Rursus quoniam rectangulum "ADC, hoc est" BDE aequale est quadrato ex DF, angulus DFE angulo B aequalis erit. Sed et angulus CFD aequalis est angulo A; totus igitur angulus CFE angulis A, B est aequalis. Anguli autem A, B una cum angulo AFB duobus rectis aequales sunt; ergo et anguli AFB, CFE sunt aequales duobus rectis. Est igitur, ob Lemma praecedens, ut quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ita rectangulum ABC ad rectangulum AEC. Sed ut quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ita est BD ad DE, [est enim rectangulum BDE aequale quadrato ex DF].[a] Ut igitur BD ad DE, ita est rectangulum ABC ad rectangulum AEC.



PROP. VIII. COMM. 30. LEM. 9.

Lemma utile ad Epitagma secundum ejusdem "quinti" Problematis, "Lib. I."

"RURSUS si aequale fuerit rectangulum ADE rectangulo "BDC, ostendendum est ut BD ad DC, ita esse ABE rectan- "gulum ad rectangulum ECA."

[a] Unde proportionales sunt BD, DF, DE, quare [Cor. 2. 20. 6.] est BD ad DE, ut quadratum ex BD ad quadratum ex DF. Quoniam vero aequiangula sunt BDF, FDE triangula, est quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ut (quadratum ex BD ad quadratum ex DF, hoc est ut) BD ad DE. Comman-

Quoniam enim eſt ut BD ad DE, ita AD ad DC, erit BD ad DE, ut tota AB ad totam CE [12. 5.] Rurſus quoniam ut BD ad DA, ita ED ad DC, erit reliqua EB ad reliquam AC, ut ED ad DC [19. 5.] Erat autem et ut BD ad DE, ita AB ad CE; ergo ratio compoſita ex ratione BD ad DE, et ex ratione ED ad DC, quae quidem eſt ratio BD ad DC, eadem eſt compoſitae ex ratione AB ad CE, et ex ratione BE ad AC, quae eſt ratio rectanguli ABE ad rectangulum ECA [23. 6.] Ut igitur BD ad DC, ita erit rectangulum ABE ad ECA rectangulum. Q. E. D.



Cor. Eodemque prorſus modo oſtendetur eſſe AD ad DE, ut rectangulum BAC ad CEB rectangulum.

"PROP. VIII." ALITER. LEM. 10.

Quoniam eſt ut AD ad DB, ita CD ad DE, erit reliqua AC ad reliquam EB, ut AD ad DB; et componendo, ut utraque AC, EB ad EB, ita AB ad BD. Rectangulum igitur quod continetur utriſque AC, EB et ipsâ BD aequale eſt rectangulo ABE. Rurſus quoniam ut BD ad DA, ita eſt ED ad DC, erit reliqua EB ad reliquam AC, ut ED ad DC; et componendo, ut utraeque EB, AC ad AC, ita EC ad CD. Ergo rectangulum quod utriſque EB, AC et ipsâ CD continetur, rectangulo ECA eſt aequale. Oſtenſum autem eſt rectangulum contentum utriſque AC, EB et ipsâ BD aequale eſſe rectangulo ABE. Ut igitur rectangulum contentum utriſque AC, EB et BD ad contentum utriſque AC, EB et CD, hoc eſt ut BD ad DC, ita eſt rectangulum ABE ad ipſum ECA. Q. E. D.

dinus quae inter uncos ſunt delevit, quia codex Graecus habet ἴσον ἄρα ἐστί, ſed ſi ponatur γὰρ pro ἄρα, neceſſaria omnino ſunt.

PROP. IX. COMM. 31. LEM. 11.

Idem aliter. Praemonstrato autem hoc,[a] " viz."

" SI sit AB aequalis CD, et sumatur punctum aliquod E " inter B et C." ostendendum est rectangulum AED rectangulo " ACD et rectangulo BEC aequale esse."

Secetur BC bifariam in puncto F. erit rectangulum AED una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex FD; rectangulum autem ACD una cum quadrato ex FC aequale est ei quod fit ex FD quadrato. Ergo rectangulum AED una cum quadrato ex EF aequale est



rectangulo ACD una cum quadrato ex FC, hoc est una cum rectangulo BEC et quadrato ex EF. Commune auferatur quadratum ex EF; reliquum igitur rectangulum AED rectangulo ACD et rectangulo BEC aequale erit.

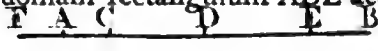
PROP. X. COMM. 32. LEM. 12.

" HOC demonstrato, sit rectangulum ADE aequale rectangulo BDC; erit ut BD ad DC, ita rectangulum ABE ad " rectangulum ACE."

Ponatur ipsi EB aequalis AF; erit ob antecedentem rectangulum FDB aequale rectangulo FEB et rectangulo ADE. Quoniam autem rectangulum ADE rectangulo BDC est ae-

[a] **Ita habet codex regius. Deleantur verba " hoc autem ostenso" in versione Commandini.**

quale, auferatur utrumque eorum a rectangulo FDB, reliquum igitur rectangulum FEB, hoc eſt ABE aequale erit rectangulo FC, DB. Rurſus quoniam rectangulum ADE aequale eſt rectangulo BDC, erit



ob proportionem " ſcili- " cet AD ad DC, ut BD " ad DE" et dividendo AC ad CD, ut BE ad ED, hoc eſt FA ad DE. Tota igitur FC ad totam CE, eſt ut AC ad CD, et propterea rectangulum FCD aequale eſt rectangulo ACE. Oſtenſum autem eſt rectangulum FC, DB aequale rectangulo ABE; quare permutando, ut rectangulum FC, DB ad ipſum FCD, hoc eſt ut BD ad DC, ita eſt rectangulum ABE ad ipſum ACE.

PROP. XI. COMM. 33. LEM. 13.

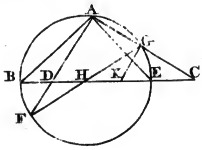
Idem aliter demonſtrabitur, praemonſtrato autem hoc, viz.

" SIT triangulum ABC, et intra ducantur rectae lineae AD, " AE, quae utrumque angulorum BAE, CAD rectum efficiant; erit ut rectangulum BCE ad rectangulum BDE, ita " quadratum ex CA ad quadratum ex AD [a]."

Deſcribatur circa ABE triangulum circulus ABFG, " quae " rectis AD, AC occurrat in F, G" et FG jungatur. Quoniam igitur rectus eſt uterque angulorum BAE, CAD, erit utraque BE, FG circuli diameter; quare centrum ejus eſt punctum H. Et cum FH aequalis ſit ipſi HG, erit ut AC ad

[a] Notas alphabeticas tum in textu tum in ſchemate Commandini mutavimus ut ſimiles eſſent iis in Propp. 8. 10. 13.

CG, ita AD ad DF;[a] et invertendo. Sed ut GC ad CA, ita eſt rectangulum ACG ad quadratum ex CA, hoc eſt [Cor. 36. 3.] rectangulum BCE ad quadratum ex CA. Et ut FD ad DA, ita rectangulum FDA, hoc eſt rectangulum BDE ad quadratum ex DA. Permutando igitur, ut BCE rectangulum ad rectangulum BDE, ita quadratum ex CA ad quadratum ex AD.



PROP. XII. COMM. 28. LEM. 14.

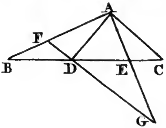
" Praecedens aliter. Propoſitio autem haec quae in manu-
" ſcriptis Graecis, et Commandini verſione, proprio loco
" excidit, hic ponenda eſt."

" SIT rurſus uterque angulorum BAE, CAD rectus; erit ut
" rectangulum BCE ad rectangulum BDE, ita quadratum ex
" CA ad quadratum ex AD."

Ducatur per D ipſi AC parallela FG, et conveniat cum AE in G; rectus igitur eſt angulus ADF. Sed et rectus eſt FAG; ergo rectangulum FDG quadrato ex DA eſt aequale [8, 17. 6.], et ut quadratum ex CA ad quadratum ex AD, ita quadratum

[a] Hoc patebit ductâ GK parallelâ ipſi AD; erit enim GK aequalis ipſi DF, quoniam aequiangula ſunt triangula HKG, HDF. Eſt igitur AC ad CG, ut AD ad GK ſive DF. Com.

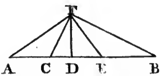
ex CA ad FDG rectangulum. Sed ratio quadrati ex CA ad rectangulum FDG composita est ex ratione quam habet CA ad DG, hoc est ratione CE ad ED, et ex ratione CA ad FD, hoc est ratione CB ad BD. Ratio autem composita ex ratione CE ad ED, et ex ratione CB ad BD eadem est ratione rectanguli BCE ad rectangulum BDE [23. 6.]. Ut igitur rectangulum BCE ad rectangulum BDE, ita est quadratum ex CA ad quadratum ex AD.



PROP. XIII. COMM. 34. LEM. 15.

" QUOD cum ita sit, praecedens " scilicet in Prop. 8. et 10." " aliter demonstrabitur, viz. " Si rectangulum ADE aequale " fuerit ipsi BDC," ut BD ad DC, ita erit rectangulum ABE " ad ipsum ACE."

Erigatur a puncto D ipsi AB ad rectos angulos DF, et alterutri rectangulorum ADE, BDC aequale ponatur quadratum ex DF, et AF, FC, FE, FB jungantur. Erit igitur uterque angulorum AFE, CFB rectus [a]. Quare, ex antecedente, erit ut rectangulum ABE ad rectangulum



[a] Quoniam enim est AD ad DF, ut DF ad DE aequiangula erunt triangula ADF, FDE [6. 6.]; angulus igitur DAF aequalis est ipsi DFE, et angulus

ACE, ita quadratum ex BF ad quadratum ex FC. Ut autem quadratum ex BF ad quadratum ex FC, ita eſt BD ad DC [b]. Ergo ut BD ad DC, ita eſt ABE rectangulum ad rectangulum ACE.

PROP. XIV. COMM. 35. LEM. 16.

In primum Epitagma ſexti Problematis "Lib. 1."

"SIT recta linea AB, et in ipſa tria puncta C, D, E; ſitque "rectangulum ABE aequale rectangulo CBD. Erit ut AB ad "BE, ita DAC rectangulum ad rectangulum CED."

Quoniam enim rectangulum ABE aequale eſt rectangulo CBD, erit ob proportionem, et reliquum ad reliquum; et convertendo, ut AD ad exceſſum ipſarum AC, DE, ita AB ad AC.[a]



Ergo rectangulum quod continetur exceſſu ipſarum AC, DE et AB eſt aequale rectangulo DAC. Rurſus quoniam ut AC ad DE, ita CB ad BE [b], erit, dividendo, ut exceſſus AC, DE ad DE, ita CE ad EB. Quod igitur continetur exceſſu

DEF angulo DFA; quare anguli DAF, DEF ſimul aequales ſunt angulo AFE, qui propterea rectus erit [Cor. 31. 3.]

[b] Eſt enim quadratum ex BF aequale rectangulo CBD, et quadratum ex FC aequale rectangulo BCD [Cor. 8. 6. et 17. 6.]

[a] Eſt enim AB ad BC, ut DB ad BE; quare reliqua AD eſt ad reliquam CE, ut AB ad BC; et convertendo, ut AD ad exceſſum ipſarum AD, CE, hoc eſt ad exceſſum ipſarum AC, DE, ut AB ad AC.

[b] Eſt enim rectangulum ABE aequale ipſi CBD, ut igitur AB ad BD, ita CB ad BE, quare reliqua AC ad reliquam DE, ut CB ad BE. Com.

Teorema

Se dal vertice A del triangolo ABC si conducono alla base le due linee rette AD, AE per modo che gli angoli DAB, EAC che ciascuna di esse forma con il lato adiacente siano fra loro eguali, allora sarà

r.DC,CE : r.DB,BE = q.AC : q.AB.

Si circoscriva al triangolo ADE un circolo. Si prolunghino i lati AB, AC finchè seghino la circonferenza del circolo in F; G e si tiri FG.

Essendo ang. DAG = ang EAF risulta arc. $\widehat{DFG}$ = arc. $\widehat{FGE}$; tolto arc. $\widehat{FG}$ rimane arc. $\widehat{DF}$ = arc. $\widehat{GE}$ e quindi DE || FG.
È anche r.DC,CE = r.AC,CG r.DB,BE = r.AB,BF.
È poi AB : BF = AC : CG ed AC : CG

q.AB : r.AB,BF = AB : BF, q.AC : r.AC,CG =

dunque viene:

q.AB : r.AB,BF = q.AC : r.AC,CG e così

q.AB : q.AC = r.DB,BE : r.DC,CE.

Roberti Simson, & Opera quaedam geometrica. Glasguae; Foulis. 1776 in 4°. Appendix Lemma – pag. 13 –
Est Propositio 12ma Lib. 6^{ti}. Pappi Alexandrini.

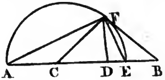
ipſarum AC, DE et EB aequale eſt rectangulo CED. Oſtenſum autem eſt rectangulum contentum exceſſu ipſarum AC, DE et AB aequale rectangulo DAC. Ergo, permutando, ut rectangulum contentum exceſſu AC, DE et AB ad contentum exceſſu AC, DE et EB, hoc eſt ut AB ad BE, ita rectangulum DAC ad ipſum CED.

ALITER per rationem compoſitam. LEM. 17.

Quoniam eſt ut AB ad BC, ita DB ad BE, erit reliqua AD ad reliquam CE, ut AB ad BC. Rurſus quoniam ut AB ad BD, ita CB ad BE, reliqua AC ad DE reliquam eſt ut CB ad BE. Quare ratio compoſita ex ratione AB ad BC, et ratione BC ad BE, quae quidem eſt ratio AB ad BE, eadem eſt rationi compoſitae ex ratione AD ad CE, et ratione AC ad DE, quae [23. 6.] eſt ratio rectanguli DAC ad rectangulum CED.

ALITER. LEM. 18.

Deſcribatur in recta linea AE ſemicirculus AFE, et ducatur contingens BF, junganturque AF, CF, DF, EF. Quoniam igitur BF quidem circulum contingit, ſecat autem BA, rectangulum ABE aequale eſt quadrato ex BF. Sed rectangulum ABE rectangulo CBD aequale ponitur. Ergo rectangulum CBD quadrato ex BF aequale erit; et ideo BFD angulus aequalis eſt angulo BCF [a], quorum



[a] Quoniam enim eſt CB ad BF, ut BF ad BD, aequiangla erunt [6. 6.] triangula CBF, FBD. Com.

angulus BFE eſt aequalis ipſi FAC[b]; reliquus igitur DFE reliquo AFC eſt aequalis[c]. Ergo ut rectangulum DAC ad rectangulum CED, ita quadratum ex AF ad quadratum ex FE[d]. Sed ut quadratum ex AF ad quadratum ex FE, ita eſt AB ad BE[e]. Ut igitur AB ad BE, ita erit DAC rectangulum ad rectangulum CED.

[b] Aequiangula enim ſunt triangula ABF, FBE quia rectangulum ABE aequale eſt quadrato ex BF. Com.

[c] Eſt ſcilicet angulus BCF aequalis utriſque interioribus CAF, AFC, quare ab angulo BCF ablato CAF, reliquus eſt AFC. Com.

[d] Hoc oſtenſum eſt in Prop. 12. Lib. 6. Pappi, quae eſt ut ſequitur,

PROP. XII. LIB. VI. Pappi Alexandrini.

"SIT triangulum ABC, et ducantur duae rectae lineae DA, AE in angulis "aequalibus BAD, EAC. Erit ut rectangulum DCE ad rectangulum EBD, "ita quadratum ex AC ad quadratum ex AB."

Deſcribatur circa triangulum ADE circulus, et FG jungatur. Ergo FG parallela eſt ipſi BC, quia circumferentia FD circumferentiae EG eſt aequalis. Ut igitur AC ad CG, ita eſt AB ad BF; et ideo ut quadratum ex AC ad

fig 1

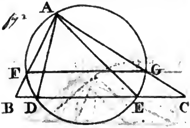
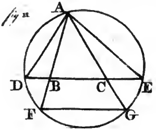


fig 2



rectanglum ACG, ita quadratum ex AB ad ABF rectangulum. Sed rectangulum quidem ACG aequale eſt ipſi DCE, rectangulum vero ABF ipſi EBD. Quare ut quadratum ex AC ad rectangulum DCE, ita quadratum ex AB ad rectangulum EBD. Et permutando, ut quadratum ex AC ad illud ex AB, ita rectangulum DCE ad ipſum EBD.

[e] Quoniam enim aequiangula ſunt ABF, FBE triangula, eſt quadratum ex AF ad illud ex FE, ut quadratum ex AB ad quadratum ex BF, hoc eſt ut AB ad BE, quia proportionales ſunt AB, BF, BE.

" Observandum est quatuor esse demonstrationes Prop. 1. et totidem Prop. 8. et quartam utriusque Propositionis demonstrationem bis fieri, ope scilicet duorum Lemmatum, ita ut quinque utriusque Propositionis demonstrationes habendae sunt. Propositionis vero hujus 14. tres tantum sunt, et forsitan aliae duae olim fuerunt quae nunc non exstant; quare has restituere et prioribus addere visum est; earum prior similis est demonstrationi Prop. 4. vel 10. altera autem ei Prop. 7. vel 13.

PROP. XIV. ALITER.

" SI rectangulum ABE aequale sit rectangulo CBD, erit ut
" AB ad BE, ita DAC rectangulum ad rectangulum CED."

Ponatur FC aequalis ipsi DE; rectangulum igitur DAC aequale est ipsis EAF, DFC simul [Prop. 3. hujus.] Quoniam autem rectangulum ABE aequale est ipsi CBD, ut AB ad BC, ita est DB ad BE; et dividendo permutandoque, ut AC ad DE, hoc est ad CF,

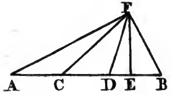


ita CB ad BE, rursusque dividendo, erit AF ad FC, ita CE ad EB. Rectangulum igitur AF, EB aequale est ipsi FCE, hoc est rectangulo DFC; additoque communi rectangulo EAF, erit rectangulum BAF aequale rectangulis EAF, DFC simul, hoc est ipsi DAC. Permutando igitur, ut rectangulum BAF ad ipsum AF, EB, hoc est ut AB ad BE, ita rectangulum DAC ad ipsum DFC sive CED.

IDEM ALITER.

" SIT rursus rectangulum ABE aequale ipsi CBD, ut AB ad
" BE, ita erit rectangulum DAC ad rectangulum CED."

Ducatur EF ad rectos angulos ipsi AB, et fiat quadratum ex EF aequale rectangulo AEB, et jungantur AF, CF, DF, BF. Rectus igitur est angulus AFB, ut in Prop. 13. ostensum fuit, et propterea quadratum ex AF aequale est rectangulo BAE, [Cor. 8. 6.]; et similiter quadratum ex BF aequale est rectangulo ABE, hoc est ipsi CBD. Aequiangula igitur sunt CBF, FBD triangula [17. et 6. 6.], et angulus BFD aequalis ipsi BCF, hoc



est ipsis CAF, AFC simul, quorum aequales sunt anguli BFE, CAF, reliqui igitur EFD, AFC sunt aequales; quare rectangulum DAC est ad ipsum CED, ut quadratum ex AF ad quadratum ex FE per Propositionem 12. Lib. 6. Pappi, quae habetur in notis ad Prop. 14. hujus, hoc est ut BAE rectangulum ad ipsum AEB, hoc est AB ad BE. Ut igitur AB ad BE, ita est rectangulum DAC ad rectangulum CED."

PROP. XV. COMM. 36. LEM. 19.

Lemma utile ad Epitagma tertium sexti Problematis.[a]

"RURSUS si rectangulum ABE aequale sit rectangulo "CBD, ostendendum est ut CB ad BD, ita esse rectangulum "ACE ad rectangulum ADE."

Quoniam enim ut AB ad BD, ita est CB ad BE, erit reliqua AC ad reliquam DE, ut CB ad BE. Eadem ratione[b] et reliqua AD ad CE reliquam, erit ut DB ad BE; et invertendo, "ut CE ad AD, ita EB ad "BD." Ratio igitur composita ex ratione CB ad BE et ratione BE ad BD,



quae quidem est ratio CB ad BD, eadem est rationi compositae ex ratione AC ad DE, et ratione CE ad AD, quae est ratio [23. 6.] rectanguli ACE ad rectangulum ADE. Ergo ut CB ad BD, ita est rectangulum ACE ad ADE rectangulum.

ALITER. LEM. 20.

Quoniam ut AB ad BD, ita est CB ad BE, erit reliqua AC ad reliquam DE, ut CB ad BE, et, convertendo, ut AC ad excessum ipsarum AC, DE, ita CB ad CE. Rectangulum igitur ACE aequale est ei quod continetur excessu ipsarum AC,

[a] Ita restituendum fuit; nam in codicibus Graecis et versione Commandini dictum est "Lemma ad Epitagma 1. Prob. 1." quae corrupta esse recte suspicatus est Commandinus.

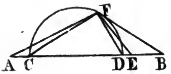
[b] Quoniam scilicet est AB ad BC, ut DB ad BE.

DE et ipſa BC. Rurſus, quoniam reliqua AC eſt ad reliquam DE, ut AB ad BD, erit, dividendo, ut exceſſus ipſarum AC, DE ad DE, ita AD ad DB. Ergo rectangulum ADE aequale eſt rectangulo contento exceſſu ipſarum AC, DE et ipſa DB. Ut igitur rectangulum contentum exceſſu AC, DE et BC ad contentum exceſſu AC, DE et DB, hoc eſt ut CB ad BD, ita ACE rectangulum ad rectangulum ADE. Q. E. D.



ALITER. LEM. 21.

Deſcribatur in recta CD ſemicirculus CFD, et ducatur contingens BF, junganturque AF, CF, DF, EF. Itaque cum rectangulum ABE aequale ſit rectangulo CBD; rectangulum autem CBD aequale quadrato ex contingente BF [36. 3.]; et rectangulum ABE quadrato ex BF aequale erit. Angulus igitur BFE eſt aequalis angulo A [a]. Sed et totus angulus BFD aequalis eſt toti FCB [b]. Ergo reliquus EFD reliquo AFC [32. 1.]. Ut igitur quadratum ex CF ad qudratum ex FD, ita rectangulum ACE ad ADE rectangulum [c], per Prop. Pappi in



[a] Quoniam ſimilia ſunt triangula ABF, FBE [17. et 6. 6.] Com.

[b] Quoniam ſimilia ſunt triangula CBF, FBD. Com.

[c] Commandinus longam et ineptam hujus demonſtrationem tradit, quaſi non eadem eſſet Propoſitio cum 12. lib. 6. Pappi.

notis ad Prop. 14. hujus. Sed ut quadratum ex CF ad quadratum ex FD, ita CB ad BD. Ergo ut CB ad BD, ita rectangulum ACE ad rectangulum ADE.

" Hujus autem Propoſitionis duae aliae ſunt demonſtrati-" ones ſimiles iis quas in praecedente addidimus, viz.

PROP. XV. ALITER.

" SI rectangulum ABE aequale ſit rectangulo CBD, erit ut " CB ad BD, ita rectangulum ACE ad ipſum ADE."

Ponatur AF aequalis ipſi DE, erit igitur per Prop. 9. hujus, rectangulum ACE aequale ipſis AFE, FCD ſimul. Quoniam autem rectangulum ABE aequale eſt rectangulo CBD, erit AB ad BC, ut DB ad BE, et convertendo, erit AB ad AC, ut BD ad DE, permutandoque, AB ad BD, ut

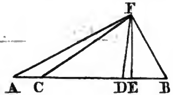


AC ad DE, hoc eſt ad AF; et dividendo, erit AD ad DB, ut CF ad FA. Rectangulum igitur FC, DB aequale eſt ipſi FAD, hoc eſt rectangulo AFE. Addatur commune rectangulum FCD, et rectangulum FCB aequale erit rectangulis AFE, FCD ſimul, hoc eſt rectangulo ACE. Ergo rectangulum FCB eſt ad ipſum FC, DB, hoc eſt CB eſt ad BD, ut rectangulum ACE ad rectangulum AFE, hoc eſt ad ipſum ADE.

IDEM ALITER.

" SI rectangulum ABE aequale ſit ipſi CBD, erit ut CB ad " BD, ita rectangulum ACE ad ipſum ADE."

Erigatur DF ad rectos angulos ipsi AB, et fiat quadratum ex DF aequale rectangulo CDB, et jungantur AF, CF, EF, BF. Rectus igitur est angulus CFB, et angulus BFD aequalis ipsi BCF [8. 6.]. Quoniam vero quadratum ex BF aequale est rectangulo CBD [cor. 8. 6.] hoc est rectangulo ABE, erit angulus BFE aequalis angulo BAF, et ostensus est angulus BFD aequalis ipsi BCF, reliquus igitur EFD aequalis est reliquo AFC. Est igitur, per Prop. in notis ad 14. hujus, rectangulum ACE ad ipsum ADE, ut quadratum ex CF ad quadratum ex FD, hoc est ut rectangulum BCD ad rectangulum BDC, hoc est ut CB ad BD."



" Propositiones 22. 30. 35. lib. 7. Pappi, quae hic sunt 1. 8. 14. ita simul enuntiari possunt, viz.

" SI in recta linea sint quatuor puncta, et in eadem sumatur quintum quod faciat rectangulum contentum segmentis inter ipsum et duo quaevis ex quatuor punctis, quorum alterutrum dicatur punctum primum, reliquum dicatur secundum, aequale rectangulo contento segmentis inter idem punctum quintum, et duo reliqua puncta. Erit segmentum inter primum et quintum punctum ad segmentum inter secundum et quintum, ut rectangulum contentum segmentis inter primum et duo reliqua ex quatuor punctis ad rectangulum contentum segmentis inter secundum punctum et eadem duo reliqua puncta."

Sint quatuor A, C, E, B et ſumatur quintum D faciens rectangulum ADC aequale ipſi BDE, et dicatur A primum, et C ſecundum punctum; erit AD ad DC, ut rectangulum BAE ad rectangulum BCE.



Vel dicatur B primum punctum, et E ſecundum; erit BD ad DE, ut rectangulum ABC ad ipſum AEC.



Sint A, C, E, B quatuor puncta, et quintum D faciens rectangulum ADE aequale ipſi BDC, et dicatur A primum, E ſecundum punctum; erit AD ad DE, ut BAC ad ipſum BEC.

Vel dicatur B primum et C ſecundum punctum; erit BD ad DC, ut rectangulum ABE ad ipſum ACE.



Sint A, C, D, E quatuor puncta, et quintum B faciens rectangulum ABE aequale ipſi CBD, et dicatur A primum, E ſecundum; erit AB ad BE, ut rectangulum DAC ad ipſum CED.

Vel dicatur D primum et C ſecundum; erit DB ad CB, ut rectangulum ADE ad rectangulum ACE.

Fig. Prop. 35. inſervit etiam Prop. 36. ſc. Dicatur C primum et D ſecundum punctum; erit CB ad DB, ut rectangulum ACE ad rectangulum ADE."

PROP. XVI. COMM. 37. LEM. 22.

"SIT recta linea AB, et in ipſa ſumantur duo puncta C, D; "ſit autem ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum "ex DC. Erit rectangulum ABC aequale quadrato ex BD."

Ponatur ipſi CD aequalis DE. Dividendo igitur, ut AC ad CB, ita [6. 2.] rectangulum CAE ad quadratum ex CD, hoc eſt ad rectangulum EDC. Ut autem AC ad CB, ita, ſumpta communi altitudine AE, rectangulum CAE ad rectangulum quod AE, CB continetur. Ergo ut rectangulum CAE ad rectangulum EDC, ita rectangulum CAE ad rectangulum contentum AE, CB. Rectangulum igitur contentum AE, CB rectangulo EDC eſt aequale. Quare ob proportionem [a], componendoque, ut AD ad DE, hoc eſt ad DC, ita erit DB ad BC; et tota AB ad totam BD, ut DB ad BC. Ergo rectangulum ABC aequale eſt quadrato ex DB. Q. E. D.



"Et retrogradiendo oſtendetur converſa, fiet autem brevius ita, viz.

[a] AE ſcilicet eſt ad ED, ut DC ad CB.

CONVERSA PROP. XVI.

" SI rectangulum ABC aequale fuerit quadrato ex BD, erit
" ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC."

Quoniam enim ut AB ad BD, ita BD ad DC, erit [19. 5.] ut AB ad BD, ita AD ad DC; ergo [22. 6.] quadratum ex AB est ad quadratum ex BD, hoc est [cor. 2. 20. 1.] recta AB ad ipsam BC, ut quadratum ex AD ad quadratum ex DC.

Et ex hoc facile sequitur Prop. 16. ex absurdo."

PROP. XVII. COMM. 38. LEM. 23.

" SIT rursus ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad qua-
" dratum ex DC. Erit rectangulum ABC aequale quadrato
" ex BD."

Ponatur ipsi CD aequalis DE; erit, dividendo, ut AC ad CB, hoc est ut rectangulum EAC ad rectangulum EA, BC, ita EAC rectangulum ad rectangulum CDE. Rectangulum igitur EA, BC rectangulo CDE aequale erit. Et ob proportionem *, dividendoque, ut AD ad DE, hoc est ad DC, ita DB ad BC. Ergo et reliqua AB ad BD reliquam, est ut DB ad BC. Rectangulum igitur ABC quadrato ex BD est aequale.

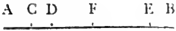


* AE scilicet est ad ED, ut DC ad CB.

PROP. XVIII. COMM. 39. LEM. 24.

" SIT recta linea AB, et in ipsa tria puncta C, D, E; sit autem ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita quadratum ex AC ad quadratum ex CD. Erit rectangulum ABD ad rectangulum AED, ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE."

Sumatur enim aequalitatis punctum F[a], ita ut rectangulum AFD aequale sit rectangulo BFE. Ut igitur AF ad FD, ita est rectangulum BAE ad rectangulum BDE, est enim Lemma in Sectione Determinata " viz. Prop. 1. hujus." Sed ut rectangulum BAE ad ipsum BDE,



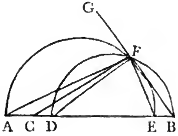
ita est quadratum ex AC ad quadratum ex CD. Ergo et ut AF ad FD, ita quadratum ex AC ad quadratum ex CD. Rectangulum igitur AFD, hoc est rectangulum BFE quadrato ex FC est aequale [Prop. 16. hujus]. Ergo ut BF ad FE, ita est quadratum ex BC ad quadratum ex CE[b]. Sed ut BF ad FE, ita est rectangulum ABD ad ipsum AED, " per Prop. 1. hujus, est enim rectangulum AFD aequale ipsi BFE." Ut igitur rectangulum ABD ad rectangulum AED, ita est quadratum ex BC ad quadratum ex CE.

[a] Punctum F ita invenitur; secetur AE in F ita ut AF sit ad FE, ut AB ad DE; erit igitur [19. 5.] AF ad FE, ut BF ad FD, et rectangulum AFD propterea aequale erit ipsi BFE. Com. Est casus primus Prop. 57. hujus.

[b] Quoniam enim rectangulum BFE aequale est quadrato ex FC, proportionales erunt BF, FC, FE, quare [12. 5.] ut BF ad FC, ita BC ad CE. Est au-

ALITER. LEM. 25.

Describantur in rectis lineis AE, DB semicirculi AFE, DFB, et jungantur AF, FC, FD, FE, FB. Itaque quoniam anguli AFB, DFE duobus rectis sunt aequales, ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita erit quadratum ex AF ad quadratum ex FD [Prop. 5. hujus].



Sed ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex CD; ut igitur quadratum ex AC ad quadratum ex CD, ita quadratum ex AF ad quadratum ex FD, et ideo ut AC ad CD, ita est AF ad FD. Quare angulus AFD bifariam sectus est recta linea CF [3. 6.]. At producta BF ad G, angulus DFE aequalis est angulo GFA.* Totus igitur EFC angulus toti CFG est aequalis. Ergo ut BC ad CE, ita est BF ad FE [A. 6. Elem. in editione nostra]; et ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE, ita quadratum ex BF ad quadratum ex FE. Ut autem quadratum ex BF ad quadratum ex FE, ita est [Prop. 5. hujus.] rectangulum ABD ad ipsum AED. Quare ut rectangulum ABD ad rectangulum AED, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CE. Q. E. D.

tem [cor. 2. 20. 6.] BF ad FE, ut quadratum ex BF ad quadratum ex FC, hoc est ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE.

* Uterque enim cum angulo DFE aequalis est duobus rectis. Com.

" CONVERSA PROP. XVIII.

" SIT recta linea AB, et in ipsa tria puncta C, D, E; sit au-
" tem ut rectangulum ABD ad rectangulum AED, ita qua-
" dratum ex BC ad quadratum ex CE. Erit rectangulum
" BAE ad rectangulum BDE, ut quadratum ex AC ad qua-
" dratum ex CD."

Sumatur enim aequalitatis punctum F, et, ut in Prop. 18. ostendetur esse AF ad FD, ut rectangulum BAE ad rectangulum BDE. Et similiter, quoniam rectangulum BFE aequale est ipso AFD, erit [Prop. 1.] ut BF ad FE, ita (rectangulum ABD ad ipsum AED, et ita, ex hypothesi,) est quadratum ex BC ad quadratum ex CE. Igitur [Prop. 17.] rectangulum BFE, hoc est AFD, aequale est quadrato ex CF; quare, per conversam Prop. 16. ut AF ad FD, ita quadratum ex AC ad quadratum ex CD. Ostensum autem fuit ut AF ad FD, ita rectangulum BAE ad rectangulum BDE. Ut igitur rectangulum BAE ad rectangulum BDE, ita est quadratum ex AC ad quadratum ex CD.



Eſt et alius caſus hujus Propoſitionis 18vae, in quo ſcilicet punctum C eſt in AD producta, reliquis ut in hoc manentibus, viz.

Si rectangulum BAE ſit ad rectangulum BDE, ut quadratum ex AC ad quadratum ex CD; erit rectangulum ABD ad rectangulum AED ut quadratum ex BC ad quadratum ex CE."



Et hujus duae ſunt Demonſtrationes, quarum prima ſit iiſdem verbis cum prima praecedentis, adhibendo autem Prop. 17. vice Prop. 16. hujus. Altera etiam, paucis mutatis, eadem eſt cum altera praecedentis."

PROP. XIX. COMM. 40. LEM. 26.

" SIT rurſus ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB,
" ita quadratum ex CD ad quadratum ex DE. Erit ut rect-
" angulum EAC ad rectangulum CBE, ita quadratum ex AD
" ad quadratum ex DB."

Sumatur rurſus aequalitatis punctum F [a], ut rectangulum AFB rectangulo CFE ſit aequale. Eſt igitur [Prop. 15.] ut CF ad FE, ita (rectangulum ACB ad



[a] Punctum F ita invenitur; in CB producta ſumatur punctum F ita ut CF ſit ad FB, ut AC ad EB. Erit igitur [12. 5.] CF ad FB, ut AF ad FE, et

ipſum AEB. Ut autem rectangulum ACB ad rectangulum AEB, ita) quadratum ex CD ad quadratum ex DE. Aequale igitur eſt [Prop. 16.] rectangulum CFE, hoc eſt AFB quadrato ex FD. Quare ut AF ad FB, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB[b]. Sed ut AF ad FB,



ita eſt rectangulum EAC ad rectangulum CBE [Prop. 14.], " quia rectangulum AFB aequale eſt ipſi CFE." Eſt igitur ut rectangulum EAC ad rectangulum CBE, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB.

ALITER. LEM. 27.

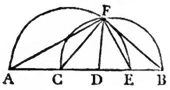
Deſcribantur circa AE, CB ſemicirculi AFE, CFB, et jungantur AF, CF, DF, EF, BF. Erit angulus AFC angulo EFB aequalis. Eſt igitur ut rectangulum ACB ad rectangulum AEB, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FE[c]. Ut autem

propterea rectangulum AFB aequale eſt rectangulo CFE. Com. Eſt Caſus primus Prop. 65. hujus.

[b] Quoniam enim rectangulum AFB aequale eſt quadrato ex FD, proportionales erunt AF, DF, BF; quare [19. 5.] AF eſt ad FD, ut AD ad DB. Eſt autem [cor. 2. 20. 6.] AF ad FB, ut quadratum ex AF ad quadratum ex FD, hoc eſt ut quadratum ex AD ad quadratum ex DB. Per ambages multas hoc oſtendit Commandinus.

[c] Sequitur hoc ex Prop. Pappi quae habetur in notis ad Prop. 14. In nota autem H ad hunc locum Commandinus dicit hoc ſequi ex demonſtratis ab ipſo ad Prop. 36. Lib. 7. Pappi " ad notam ſcilicet Q in pag. 182. a." Deceptus autem fuit, ſchemate Prop. hujus 40. non attentè ſatis ſpectato. In figura enim ejus ad notam Q angulus ABC, quem putat aequalem eſſe angulo CFE in figura Prop. 40. rectus ponitur; non autem rectus eſt CFE, eſt enim CFB, non CFE ſemicirculus. Sequitur igitur propoſitum ex Propoſitione quidem

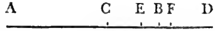
rectangulum ACB ad rectangulum AEB, sic ponitur quadratum ex CD ad quadratum ex DE. Ergo ut quadratum ex CD ad quadratum ex DE, ita quadratum ex CF ad quadratum ex FE. Aequalis igitur est [3, et 22. 6.] angulus CFD angulo DFE. Sed et angulus AFC aequalis est angulo EFB, ergo totus AFD angulus toti DFB est aequalis. Ac propterea ut quadratum ex AF ad quadratum ex FB, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB [3, et 22. 6.]. Ut autem quadratum ex AF ad quadratum ex FB, ita rectangulum EAC ad rectangulum CBE, per Prop. Pappi in notis ad Prop. 14. hujus. Ergo ut rectangulum EAC ad CBE rectangulum, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB. Q. E. D.



" Et retrogradiendo conversa ostendetur in utraque demonstratione.

Est et alius Casus hujus Propositionis, in quo scilicet punctum D est in AB producta, reliquis ut in hac manentibus, viz.

Si rectangulum ACB sit ad rectangulum AEB, ut quadratum ex CD ad quadratum ex DE; erit ut rectangulum EAC ad rectangulum EAB, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DB.



quam citasse debuit ad notam Q, Prop. sc. 12. Lib. 6. Pappi, sed non ex Propositione quam ibi demonstrat.

Et hujus duae ſunt Demonſtrationes, quarum prima fit iiſdem verbis cum prima praecedentis; adhibendo autem Prop. 17. vice Prop. 16. Altera etiam, paucis mutatis, eadem eſt cum altera praecedentis.

LEMMATA
IN
SECUNDUM LIBRUM
DE SECTIONE
DETERMINATA.

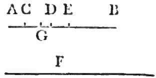
PROP. XX. COMM. 41. LEM. 1.

" SIT recta linea AB in qua sumantur tria puncta C, D, E " ita ut rectangulum ADC sit aequale rectangulo BDE; et " utrisque AE, CB aequalis ponatur recta linea F. Erit rect- " angulum quidem F, AD rectangulo BAE aequale; rectan- " gulum autem F, CD aequale rectangulo BCE; rectangu- " lumque F, BD rectangulo ABC; et rectangulum F, ED " rectangulo AEC aequale."

Quoniam enim rectangulum ADC rectangulo BDE est aequale, erit ob proportionem, et invertendo, et tota ad totam, componendoque [1], ut CB, AE simul, hoc est F ad AE, ita

[1] Est scilicet AD ad DB, ut ED ad DC, et invertendo CD ad DE, ut BD ad DA, et tota ad totam [12. 5.] CB ad AE, ut BD ad DA, componendoque, ut CB, AE simul, hoc est F ad ¡AE, ita BA ad AD. Verum prima harum proportionum superflua est, sequitur enim secunda, quae fit inverten-

BA ad AD. Rectangulum igitur F, AD est aequale rectangulo BAE, " quae est prima pars." Rursus quoniam tota AE est ad totam CB, ut ED ad DC[b], erit componendo, ut utraque AE, CB ad CB, hoc est ut F ad CB, ita EC ad CD. Ergo rectangulum F, CD rectangulo BCE aequale erit, " quae est secunda pars." Eodem modo in reliquis. " viz. tertia pars ita ostenditur; quoniam ut AE ad CB, ita est (ED ad DC, et ita) AD ad DB, erit componendo utraque AE, CB, hoc est F ad CB, ut AB ad BD. Rectangulum igitur F, BD aequale est ipsi ABC. Quarta autem pars ita; est CB ad AE, ut CD ad DE, et componendo utraque AE, CB ad AE, hoc est F ad AE, ut CE ad ED. Rectangulum igitur F, ED aequale est rectangulo AEC." Fient igitur quatuor, " ut dictum est[c]."



Conversa primae partis Propositionis hujus haec est,

" SIT recta linea AB in qua sumantur tria puncta C, D, E,
" et utrisque AE, CB aequalis ponatur recta F, sit autem rect-

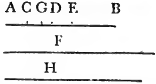
do, immediate ex aequalitate rectangulorum ADC, BDE, aeque ac prima; scribi igitur solummodo debuit, ob proportionem, et tota ad totam, componendoque. Commandinus autem in nota ad hunc locum non paucioribus quam sex proportionibus propositum ostendit; neque utitur proportione tota ad totam, quae in textu habetur.

[b] Quoniam enim rectangulum ADC aequale est rectangulo BDE, erit AD ad DB, ut ED ad DC, et tota AE ad totam CB, ut ED ad DC. Commandinus textum hujus Demonstrationis in codicibus Graecis non parum corruptum et mutilatum recte restituit; ut et in locis aliis quam plurimis.

[c] Verba haec " ut dictum est" desunt in codice regio.

" angulum F, AD aequale ipſi BAE; erit rectangulum ADC
" aequale ipſi BDE."

Si enim non fuerit, ſit ADG rectangulum aequale ipſi BDE; et utriſque AE, GB aequalis ponatur recta H. Igitur per partem primam Prop. 20. rectangulum H, AD aequale eſt ipſi BAE, hoc eſt ipſi F, AD. Ergo recta H aequalis eſt ipſi F, quod fieri non poteſt. Rectangulum igitur ADC aequale eſt ipſi BDE.



Similiter reliquarum partium Prop. 20. ut et partium Propp. 21. 22. converſae oſtendi poſſunt.

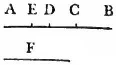
PROP. XXI. COMM. 41. LEM. 2.

" SIT rurſus nunc rectangulum ADC aequale rectangulo
" BDE, et utriſque AE, CB aequalis ponatur recta linea F.
" Rurſus quatuor fient, videlicet rectangulum quidem F, AD
" aequale erit rectangulo BAE; rectangulum vero F, CD
" rectangulo BCE; rectangulumque F, BD aequale erit rect-
" angulo ABC; et rectangulum F, ED rectangulo AEC.

Quoniam enim rectangulum ADC aequale eſt rectangulo BDE, erit ob proportionem, et invertendo, et reliqua ad reliquam, componendoque, ut utraque AE, CB ad AE, ita BA ad AD [a].

[a] Et hic etiam prima quatuor proportionum ſuperflua eſt, ſequitur enim ſecunda immediate ex aequalitate rectangulorum ADC, BDE; eſt ſcilicet BD ad

Utraque autem [b] AE, CB aequales ſunt ipſi F. Ergo ut F ad AE, ita BA ad AD; et ideo rectangulum F, AD aequale eſt rectangulo BAE, " quae eſt prima pars." Rurſus, quoniam ut AD ad DB, ita ED ad DC, erit reliqua AE ad reliquam CB, ut ED ad DC; quare, componendo, ut AE, CB ſimul, hoc eſt ut F ad BC, ita EC ad CD. Rectangulum igitur F, CD rectangulo BCE aequale erit, " quae eſt ſecunda pars." Eadem et in duobus reliquis oſtendemus.



" Tertia ſcilicet pars ita oſtenditur; quoniam eſt CB ad AE, ut BD ad DA, invertendo, et componendo erit AE una cum CB, hoc eſt erit F ad CB, ut AB ad BD. Rectangulum igitur F, BD aequale eſt ipſi ABC. Quarta autem pars ita; eſt CB ad AE, ut (BD ad DA, hoc eſt ut) CD ad DE; igitur, componendo, eſt F ad AE, ut CE ad ED, quare rectangulum F, ED aequale eſt rectangulo AEC." Quatuor igitur fient, " ut proponebatur [c]."

DA, ut CD ad DE, reliqua igitur CB eſt ad reliquam AE, ut BD ad DA; et componendo, ut utraque AE, CB, hoc eſt F ad AE, ita BA ad AD. Scribi igitur ſolummodo debuit ob proportionem, et reliqua ad reliquam, componendoque.

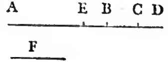
[b] Commandinus habet " igitur," ſenſus vero requirit " autem;" et in codice regio habetur δὲ.

[c] Deſunt " ut proponebatur" in codice regio.

PROP. XXII. COMM. 43. LEM. 3.

" SIT autem punctum " ſcilicet D" extra totam rectam " ſcilicet AC," et ſit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE. " Si rectarum AE, BC exceſſui aequalis ponatur " recta" F, " rurſus quatuor fient, videlicet rectangulum F, AD aequale " erit rectangulo BAE; rectangulum vero F, CD rectangulo " BCE; rectangulumque F, BD aequale erit rectangulo ABC; " et rectangulum F, DE rectangulo AEC."

Quoniam nimirum rectangulum ADC aequale eſt rectangulo BDE, erit ob proportionem, et reliqua ad reliquam, et convertendo, ut AE ad exceſſum rectarum AE, BC, ita DA ad AB[a]. Sed ipſarum AE, BC exceſſus eſt " recta" F; ergo rectangulum F, AD eſt aequale rectangulo BAE, " quae eſt prima pars." Rurſus, quoniam reliqua AE eſt ad reliquam BC, ut ED ad DC, erit, dividendo, ut exceſſus rectarum AE, BC, hoc eſt ut " recta" F ad BC, ita EC ad CD. Rectangulum igitur F, CD eſt aequale rectangulo BCE, " quae eſt ſecunda pars." Eadem et in reliquis duabus oſtendentur. " Tertia ſcilicet pars ita oſtenditur; quoniam ut AE ad BC, ita eſt AD ad DB, dividendo exceſſus ipſarum AE, BC, hoc eſt recta F erit ad BC, ut AB ad BD. Rectangulum igitur F, BD aequale eſt ipſi ABC. Quarta autem pars ita;



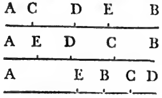
[a] Eſt enim AD ad DB, ut ED ad DC, ergo reliqua AE eſt ad reliquam BC, ut AD ad DB; et convertendo, ut AE ad exceſſum ipſarum AE, BC, ita DA ad AB. Com.

quoniam est AD ad DB, ut ED ad DC, erit reliqua AE ad reliquam BC, ut ED ad DC [cor. 19. 5.], et convertendo, ut AE ad excessum ipsarum AE, BC, hoc est ad rectam F, ut DE ad EC. Rectangulum igitur F, DE aequale est rectangulo AEC." Fiunt igitur quatuor ut proponebatur.

PROP. XXIII. COMM. 44. LEM. 4.

" Hoc autem demonstrato facile invenientur quae in " Li-
" brum" primum de Sectione Determinata " prius ostensa
" sunt Lemmata," iisdem positis in hunc modum, " Si rect-
" angulum ADC aequale fuerit rectangulo BDE;" Dico ut
" BD ad DE, ita esse rectangulum ABC ad rectangulum
" AEC [a]."

Quoniam nimirum demonstratum est, " in tribus praecedentibus Propositionibus," rectangulum quidem F, BD rectangulo ABC aequale, rectangulum vero F, ED aequale rectangulo AEC, erit ut rectangulum F, BD ad rectangulum F, DE, hoc est ut BD ad DE, ita rectangulum ABC ad rectangulum AEC.



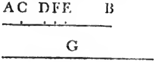
[a] In impressis Commandini unicum tantum habetur schema ad hanc Propositionem, quod hic tertium est. Codex regius tria habet, in quorum tertio vitiose ponitur γ loco δ, et vice versa. Primum hic positum, nam est secundum in codice regio, spectat ad Prop. 1. hujus. Secundum ad Prop. 8. et tertium ad Prop. 15.

PROP. XXIV. COMM. 45. LEM. 5.

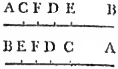
In Epitagma primum primi Problematis.

"SIT rurſus rectangulum ADC aequale rectangulo BDE, et "quodvis punctum F "inter D et E." Si utriſque AE, CB "ponatur aequalis "recta" G, rectangulum AFC excedet rectangulum BFE rectangulo G, DF."

Quoniam nimirum demonſtratum eſt "in quarta parte Prop. 20." rectangulum G, DE aequale rectangulo AEC, commune auferatur rectangulum G, FE; reliquum igitur rectangulum G, DF eſt exceſſus quo rectangulum AEC excedit rectangulum G, FE. Quo autem rectangulum AEC excedit ipſum G, FE, ablato communi rectangulo AEF, eodem rectangulum AE, CF excedit rectangulum CB, FE [1. 2.], "eſt enim recta G aequalis utriſque AE, CB." Et quo rectangulum AE, CF excedit rectangulum CB, EF, ablato communi rectangulo CFE, eodem rectangulum AFC excedit rectangulum BFE. Rectangulum igitur AFC excedit ipſum BFE rectangulo G, DF. Q. E. D.



"Si vero punctum F ſumatur inter D et C, reliquis manentibus, rectangulum BFE excedet rectangulum AFC rectangulo G, DF. Demonſtratur autem iiſdem verbis quibus Propoſitio, mutatis notis alphabeticis, ut in figura."

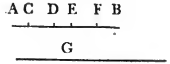


PROP. XXV. COMM. 46. LEM. 6.

Aliud in tertium Epitagma ſecundi [a] Problematis.

" SIT punctum F inter E, B " reliquis ut in praecedente " manentibus;" erit rectangulum AFC una cum ipſo EFB " aequale rectangulo G, DF."

Quoniam igitur prius oſtenſum eſt rectangulum G, DE rectangulo AEC aequale, commune apponatur rectangulum G, EF; totum igitur rectangulum G, DF aequale eſt rectangulo AEC, ipſoque AEF, et rectangulo CB, EF [1. 2.]. Sed rectangulum AEC una cum rectangulo AEF eſt totum rectangulum AE, CF. Rectangulum igitur G, DF eſt aequale rectangulo AE, CF una cum ipſo CB, EF. At rurſus rectangulum CB, EF aequale eſt [1. 2.] rectangulis CFE, EFB; rectangulum vero AE, CF una cum ipſo CFE eſt totum rectangulum AFC [1. 2.]. Sed habebamus etiam rectangulum EFB; ergo rectangulum G, DF aequale eſt rectangulo AFC una cum ipſo EFB.



" Idem ſequitur ſi punctum F ſumatur inter puncta A, C reliquis manentibus. Si enim notae alphabeticae ponantur ordine inverſo, ut in additamento ad praecedentem, demonſtratio fiet iiſdem verbis quibus ea Propoſitionis."

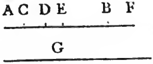
[a] In manuſcriptis et Commandini impreſſis vitioſe habetur " tertii" vice ſecundi Problematis.

PROP. XXVI. COMM. 47. LEM. 7.

In Epitagma primum tertii Problematis.

" SIT rurſus punctum F extra rectam AB " reliquis manen-
" tibus." Oſtendendum eſt rectangulum AFC excedere rect-
" angulum EFB rectangulo G, DF."

Quoniam enim rectangulum G, DB aequale eſt rectangulo ABC, " per tertiam partem Prop. 20." commune apponatur rectangulum G, BF; totum igitur rectangulum G, DF aequale eſt rectangulo ABC, ipſique G, BF; quod ultimum aequale eſt rectangulo AE, BF una cum ipſo CBF [1. 2.]; rectangulum autem ABC una cum ipſo CBF eſt totum rectangulum AF, CB [1. 2.]. Ergo rectangulum G, DF aequale eſt rectangulo AF, CB et ipſo AE, BF ſimul. Sed rectangulum AF, CB una cum ipſo AE, BF eſt exceſſus quo rectangulum AFC excedit ipſum EFB [a]. Rectangulum igitur G, DF eſt exceſſus quo AFC rectangulum excedit ipſum EFB.



[a] Eſt enim rectangulum EFB una cum ipſo AE, BF aequale rectangulo AFB [1. 2.]; cui ſi addatur rectangulum AF, CB fiet totum AFC.

PROP. XXVII. COMM. 48. LEM. 8.

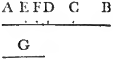
In ſecundum Epitagma ejuſdem primi Problematis.

" SIT rectangulum ADC aequale rectangulo EDB, ſitque " punctum F inter D et C, et utriſque AE, CB aequalis po- " natur recta G. Rectangulum EFB excedet rectangulum " AFC rectangulo G, DF."

Quoniam enim rectangulum G, DC aequale eſt rectangulo BCE, per partem ſecundam Prop. 21. commune auferatur rectangulum G, FC; reliquum igitur rectangulum G, DF eſt exceſſus quo ECB rectangulum excedit ipſum G, FC. Quo autem rectangulum ECB excedit rectangulum G, FC, communi ablato rectangulo FCB, eodem rectangulum EF, CB excedit rectangulum AE, FC. Et quo rectangulum EF, CB excedit rectangulum AE, FC, addito communi rectangulo EFC, eodem rectangulum EFB excedit rectangulum AFC. Rectangulum igitur EFB excedit ipſum AFC rectangulo G, DF.



" Si vero ſumatur punctum F inter D et E, reliquis manentibus, rectangulum AFC excedet rectangulum EFB rectangulo G, DF. Hoc autem demonſtratur iiſdem verbis quibus ipſa Propoſitio, mutatis notis alphabeticis ut in figura.



Cor. Hinc ſi fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo EDB, et inter E, C ſumatur punctum F faciens rectangulum AFC majus rectangulo EFB, erit punctum F inter puncta E, D.

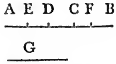


Si vero inter E, C ſumatur punctum F faciens rectangulum AFC minus rectangulo EFB, erit punctum F inter D, C puncta."

PROP. XXVIII. COMM. 49. LEM. 9.

" SED ſit punctum F inter C, B; " reliquis ut in praece-
" dente manentibus." Erit rectangulum AFC una cum rect-
" angulo BFE aequale rectangulo G, DF."

Quoniam enim rectangulum G, DC aequale eſt rectangulo BCE, commune addatur rectangulum G, CF; totum igitur G, DF eſt aequale rectangulo BCE una cum ipſo G, CF, hoc eſt una cum rectangulo AE, CF et rectangulo BCF. Rectangulum autem ECB una cum ipſo BCF eſt totum rectangulum EF, CB. Ergo rectangulum EF, CB una cum ipſo AE, CF eſt aequale rectangulo G, DF. Sed rectangulum quidem EF, CB eſt aequale rectangulis EFC, BFE ſimul [1. 2.]; rectangulum autem EFC una cum ipſo AE, CF eſt totum rectangulum AFC. Rectangulum igitur AFC una cum ipſo BFE eſt aequale rectangulo G, DF.



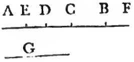
Cor. Ex hac et Prop. 27. ſequitur, Si fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo EDB, exiſtente puncto D inter E, C puncta, et ſumatur inter D, B punctum F faciens rectangulum G, DF minus ipſo EFB, erit F inter puncta D, C. Si vero ſumatur punctum F faciens rectangulum G, DF majus ipſo EFB, erit F inter C, B puncta.

PROP. XXIX. COMM. 50. LEM. 10.

In ſecundum Epitagma tertii Problematis.

" SIT punctum F extra rectam AB, reliquis manentibus;" " Dico rectangulum AFC excedere rectangulum EFB rectan-" lo G, DF."

Quoniam enim rectangulum G, DB eſt aequale rectangulo ABC " per partem tertiam Prop. 21." commune apponatur rectangulum G, BF, totum igitur rectangulum G, DF eſt aequale rectangulo ABC una cum ipſo G, BF, hoc eſt una cum rectangulo AE, BF et rectangulo CBF.



Rectangulum autem ABC una cum ipſo CBF eſt totum rectangulum AF, CB. Ergo rectangulum AF, CB una cum ipſo AE, BF eſt aequale rectangulo G, DF. Sed rectangulum AF, CB una cum ipſo AE, BF eſt exceſſus quo rectangulum AFC excedit rectangulum EFB [a]. Rectangulum igitur AFC excedit rectangulum EFB rectangulo G, DF. Q. E. D.

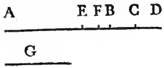
[a] Eſt enim rectangulum EFB una cum ipſo AE, BF aequale rectangulo AFB, cui ſi addatur rectangulum AF, CB, fiet rectangulum AFC.

PROP. XXX. COMM. 51. LEM. 11.

In tertium Epitagma primi Problematis.

" SIT rectangulum ADC rectangulo BDE aequale; et excessui rectarum AE, BC aequalis ponatur " recta" G; sumaturque punctum F inter ipsa E, B. Rectangulum AFC excedet rectangulum EFB rectangulo G, DF."

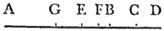
Quoniam enim rectangulum G, BD est aequale rectangulo ABC, per tertiam partem Prop. 22. commune apponatur rectangulum G, BF, totum igitur G, FD aequale est rectangulo ABC una cum rectangulo G, BF, hoc est una cum rectangulo quod excessu ipsarum AE, BC et recta BF continetur. Sed rectangulum ABC est id quod continetur AF, BC una cum rectangulo FBC. Rectangulum igitur G, FD est aequale rectangulo AF, BC una cum rectangulo FBC et eo quod excessu ipsarum AE, BC et BF continetur. Rectangulum autem CBF una cum eo quod excessu ipsarum AE, BC et BF continetur totum est rectangulum AE, BF. Ergo rectangulum G, FD est aequale rectangulo AF, BC una cum ipso AE, BF. Sed rectangulum AF, BC una cum ipso AE, BF est excessus quo rectangulum AFC excedit rectangulum EFB [a]. Rectangulum igitur AFC excedit rectangulum EFB rectangulo G, FD. Q. E. D.



[a] Est enim rectangulum EFB una cum ipso AE, FB aequale rectangulo AFB, cui si addatur rectangulum AF, BC fiet rectangulum AFC.

" IDEM magis perſpicue.

Fiat GE aequalis ipſi BC; eſt igitur AG exceſſus ipſarum AE, BC, quare per tertiam partem Prop. 22. rectangulum AG, BD aequale eſt rectangulo ABC; eſt vero rectangulum GE, BD aequale ipſi DBC; ergo totum AE, BD rectangulum eſt aequale ipſis ABC, DBC ſimul, hoc eſt rectangulo AD, BC. Commune apponatur rectangulum AE, FB una cum ipſo EFB, quae ſimul aequalia ſunt rectangulo AFB; totum igitur, rectangulum ſcilicet AE, FD una cum ipſo EFB aequale erit (toti, rectangulo ſcilicet AD, BC una cum ipſo AFB, hoc eſt rectangulis DF, BC; AF, BC; AFB; hoc eſt) ipſis DF, BC; AFC; quorum rectangulum GE, DF aequale eſt ipſi BC, DF. Reliquum igitur AG, DF una cum ipſo EFB aequale eſt reliquo rectangulo AFC."



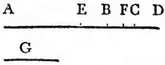
PROP. XXXI. COMM. 52. LEM. 12.

In primum Epitagma ſecundi Problematis.

" Iiſdem poſitis, ſit punctum F inter B, C. Erit rectangulum
" AFC una cum rectangulo EFB aequale rectangulo G, FD."

Quoniam enim rectangulum G, CD aequale eſt rectangulo ECB, per partem ſecundam Prop. 22. commune apponatur rectangulum G, FC, totum igitur G, FD eſt aequale rectangulo ECB et ipſi G, FC. Sed rectangulum quidem G, FC eſt id quod exceſſu ipſarum AE, BC et ipſa FC continetur. Rect-

angulum autem ECB est rectangulum BCF una cum ipso EF, BC. Ergo rectangulum G, FD aequale est rectangulo EF, BC ipsique BCF et ei quod excessu ipsarum AE, BC et ipsa FC continetur. Rectangulum vero contentum excessu ipsarum AE, BC et ipsâ FC una cum rectangulo BCF est totum rectangulum AE, FC. Rectangulum igitur G, FD aequale est rectangulo AE, FC una cum ipso EF, BC. At rectangulum quidem EF, BC est rectangulum EFC una cum ipso EFB; rectangulum autem EFC una cum ipso AE, FC est totum rectangulum AFC. Sed habebamus etiam rectangulum EFB. Rectangulum igitur AFC una cum rectangulo EFB aequale est rectangulo G, FD. Q. E. D.

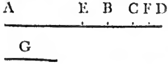


PROP. XXXII. COMM. 53. LEM. 13.

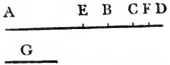
In tertium Epitagma tertii Problematis.

" SIT rursus punctum F inter C, D " reliquis ut in Prop. 30.
" manentibus." Erit rectangulum AFC minus quam rectan-
" gulum EFB, rectangulo G, FD."

Quoniam enim rectangulum G, CD est aequale rectangulo ECB, commune auferatur G, CF rectangulum, reliquum igitur G, FD est excessus quo rectangulum ECB superat rectangulum G, CF, hoc est id quod excessu ipsarum AE, BC et ipsâ CF continetur. Quo autem



rectangulum ECB superat rectangulum contentum excessu ipsarum AE, CB et CF, addito communi rectangulo FCB, eodem rectangulum EF, CB superat rectangulum AE, CF. Et rursus communi addito EFC rectangulo, eodem rectangulum EFB superat ipsum AFC.



Ergo rectangulum AFC minus est quam rectangulum EFB, rectangulo G, FD.

Cor. Ex hac et Prop. 31. sequitur, si fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE, existente puncto D in AC producta, et sumatur inter B et D punctum F faciens rectangulum G, DF majus ipso EFB, erit punctum F inter B, C puncta. Si vero sumatur punctum F faciens rectangulum G, DF minus ipso EFB, erit F inter puncta C, D.

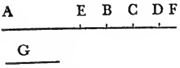
PROP. XXXIII. COMM. 54. LEM. 14.

In tertium Epitagma tertii Problematis.

" SED sit punctum F extra " rectam AD ad partes ipsius D, " reliquis manentibus." Erit rectangulum AFC majus rect- " angulo EFB rectangulo G, DF."

Quoniam enim rectangulum G, CD est aequale rectangulo ECB, " per partem secundam Prop. 22." utraque auferantur a rectangulo G, CF. Reliquum igitur G, DF est excessus quo G, CF rectangulum superat ipsum ECB, et communi addito rectangulo BCF, eodem excessu rectangulum AE, CF superat

ipſum EF, BC; etenim exceſſus ipſarum AE, BC una cum BC aequalis eſt ipſi AE. Quo autem rurſus rectangulum AE, CF ſuperat ipſum EF, BC, addito communi rectangulo EFC, eodem rectangulum AFC ſuperat ipſum EFB. Rectangulum igitur AFC ſuperat rectangulum EFB rectangulo G, DF.



" Cor. Ex Propp. 32. et 33. ſequitur ſi fuerit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE, exiſtente puncto D in AC producta, et in eadem AC producta ſumatur punctum F faciens rectangulum AFC majus rectangulo EFB; erit punctum F in CD producta. Si vero ſumatur punctum F in AC producta faciens AFC rectangulum minus rectangulo EFB, erit punctum F inter C et D.

PROP. XXXIV. COMM. 55. LEM. 15.

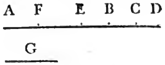
In primum Epitagma ſecundi Problematis.[a]

" SIT punctum F inter A et E, " reliquis manentibus." E- " rit rectangulum AFC una cum ipſo EFB aequale rectangu- " lo G, FD."

Quoniam enim rectangulum G, BD aequale eſt rectangulo ABC, " per partem tertiam Prop. 22." commune addatur rectangulum G, BF; totum igitur rectangulum G, FD eſt

[a] Ita reſtituendum fuit, nam in codicibus Graecis ſcriptum eſt, In tertium Epitagma tertii Problematis. Ratio mutationis patebit ex Propp. Lib. 2. de Sectione Determinata.

aequale rectangulis ABC, G, BF simul. Sed rectangulum quidem ABC aequale est rectangulo AF, BC una cum ipso FBC; rectangulum vero " G, BF, hoc est" contentum excessu ipsarum AE, BC et ipsâ BF, una cum rectangulo CBF aequale est ipsi AE, BF. At rectangulum quidem AE, BF est rectangulum BFE una cum ipso AFB; quod quidem AFB una cum ipso AF, BC est rectangulum AFC; rectangulum igitur AFC una cum ipso BFE aequale est rectangulo G, FD. Q. E. D.

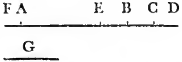


PROP. XXXV. COMM. 56. LEM. 16.

In tertium Epitagma tertii Problematis.

" SIT rursus punctum F extra rectam " AD ad partes ipsius " A, reliquis manentibus;" erit rectangulum AFC minus " rectangulo EFB, rectangulo G, FD."

Quoniam enim rectangulum G, AD est aequale rectangulo BAE, " per partem primam Prop. 22." commune apponatur rectangulum G, AF, totum igitur rectangulum G, DF est aequale rectangulo BAE et rectangulo contento excessu ipsarum AE, BC et ipsâ AF, hoc est rectangulo FB, AE dempto rectangulo FA, BC [a].



[a] Graecus codex quo Commandinus utebatur, ut et codex regius habent τὸ ὑπὸ ΖΒ, ΑΕ. λοιπον τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΒΓ. Quae corrupta et manca esse existimat

Rectangulum igitur G, DF est excessus quo rectangulum FB, AE superat ipsum FA, BC. Sed quo rectangulum FB, AE superat rectangulum FA, BC, addito communi rectangulo BFA, eodem et rectangulum BFE superat rectangulum CFA. Rectangulum igitur BFE superat ipsum CFA rectangulo G, DF. Q. E. D.

"ALITER.

Fiat GE aequalis ipsi BC; est igitur AG excessus ipsarum AE, BC. Et quoniam, "per primam partem Prop. 22." rectangulum GAD est aequale rectangulo BAE, commune apponatur rectangulum GAF, totum igitur rectangulum AG, FD est aequale rectangulo BAE una cum ipso GAF. Rursus apponatur commune rectangulum FA, BC, sive FA, GE; rectangulum igitur AG, FD una cum ipso FA, BC aequale est rectangulis BAE, FAE, hoc est rectangulo FB, AE. Rectangulum igitur AG, FD est excessus quo rectangulum FB, AE superat ipsum FA, BC. Sed quo, &c. ut in praecedente."



Cor. Ex hac et Prop. 34. sequitur, Si fuerit rectangulum ADC aequale ipsi BDE, existente puncto D in AC producta, et

Commandinus ad notam B in pag. 193. 6. Lib. 7. Pappi Alexandrini. Minime autem sunt, sed hisce verbis Pappus significat, nimis quidem breviter, rectangulum BAE una cum contento excessu ipsarum AE, BC et ipsâ AF aequale esse rectangulo FB, AE dempto rectangulo FA, BC. Quod quidem verum est. Λοιπὸν igitur hic idem est quod λεῖψει apud Diophantum.

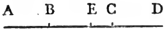
sumatur punctum F in DE producta ad partes E faciens rectangulum G, DF majus ipso EFB, erit punctum F inter A et E. Si vero sumatur punctum F faciens rectangulum G, DF minus ipso EFB, erit F in EA producta ad partes A.

PROP. XXXVI. COMM. 57. LEM. 17.

In tertium Epitagma primi Problematis.

" SIT AB aequalis ipsi CD, et quodvis punctum E inter B, C
" puncta. Rectangulum AED superabit rectangulum BEC
" rectangulo ACD."

Quoniam enim rectangulum AED aequale est rectangulo AEC et ipsi AE, CD, quorum rectangulum AEC rursus est aequale rectangulo BEC ipsique AB, EC; erit rectangulum AED aequale rectangulo BEC una cum rectangulo AB, EC et ipso AE, CD. Rectangulum igitur AED



superat rectangulum BEC et rectangulo AB, EC, hoc est ipso ECD (etenim AB, CD aequales sunt) et rectangulo AE, CD. Sed rectangulum ECD una cum ipso AE, CD est totum rectangulum ACD. Ergo rectangulum AED superat ipsum BEC rectangulo ACD. " Est haec alia demonstratio Prop. 9. hujus."

PROP. XXXVII. COMM. 58. LEM. 18.

In primum Epitagma ſecundi Problematis [a].

" SIT AB aequalis ipſi CD, et ſumatur punctum E inter
" C, D. Rectangulum AED una cum ipſo BEC aequale erit
" rectangulo ACD."

Quoniam enim rectangulum AED eſt aequale rectangulo AC, ED ipſique CED ſimul, commune apponatur rectangulum BEC; rectangulum igitur AED una cum rectangulo BEC eſt aequale rectangulo AC, ED, rectanguloque CED, et rectangulo BEC. Sed rectangulum quidem CED una cum ipſo BEC totum eſt rectangulum BD, CE, hoc eſt ACE, aequales enim ſunt et totae rectae AC, BD; rectangulum vero AC, ED una cum ipſo ACE eſt aequale rectangulo ACD. " Eſt haec alia demonſtratio Prop. 2. hujus."



PROP. XXXVIII. COMM. 63. LEM. 19.

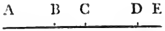
Propoſitio haec in manuſcriptis Graecis proprio ſuo loco excidit, atque hic ponenda eſt.

" SIT AB quidem aequalis CD, rectangulum autem BEC
" rectangulo ABD majus [b]. Rectangulum BEC ſuperabit ip-
" ſum AED rectangulo BDC."

[a] Ita legendum vice eorum quae habentur in codice Graeco, viz. " In tertium Epitagma primi Problematis."

[b] Hoc eſt rectangulum BEC rectangulo BDC majus, hoc eſt, ſit punctum E in AD producta.

Quoniam enim rectangulum BEC aequale eſt et rectangulo BCE, et quadrato ex CE [3. 2.], hoc eſt et rectangulis CED, ECD [2. 2.]; rectangulum autem BCE una cum ECD rectangulo totum eſt rectangulum BD, CE, hoc eſt ACE; erit rectangulum BEC aequale rectangulo ACE una cum ipſo CED. Sed rectangulum ACE aequale eſt et rectangulo AC, DE et rectangulo ACD; rectangulum vero AC, DE una cum ipſo CED totum eſt AED rectangulum. Factum igitur eſt rectangulum BEC aequale rectangulo AED una cum ipſo ACD, hoc eſt una cum ipſo BDC. Quare BEC rectangulum ſuperat ipſum AED rectangulo BDC. " Haec eſt alia demonſtratio Prop. 3. hujus."



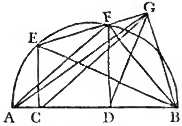
In Monachos " ſeu caſus ſingulares" tertii Epitagmatis primi Problematis, et tertii tertii Problematis [a].

PROP. XXXIX. COMM. 59. LEM. 20.

" In Monachum tertii Epitagmatis primi Problematis."
" SEMICIRCULO exiſtente AEB, et diametro AB, exi-
" ſtentibuſque perpendicularibus CE, DF, et ductâ rectâ li-
" neâ EFG, et ad ipſam perpendiculari BG; tria porrò fient,
" videlicet, rectangulum quidem CBD aequale erit quadrato
" ex BG; rectangulum vero AC, BD quadrato ex FG; et
" rectangulum AD, CB quadrato ex EG."

[a] Vice horum vitioſe habentur apud Commandinum " In Monachos primi, ſecundi et tertii Epitagmatis."

Jungantur enim CG, GD, FA, AG, FB. Quoniam igitur rectus est angulus AFB, et perpendicularis FD, erit [8. 6.] angulus DFB angulo BAF aequalis. Sed angulus quidem DFB est aequalis angulo DGB [b], angulus vero BAF (junctâ EB) est aequalis angulo BEF [21. 3.], hoc est angulo BCG [c]. Angulus igitur DGB angulo BCG aequalis erit; et propterea rectangulum CBD est aequale quadrato ex



BG [4, et 16. 3.]. Est autem totum rectangulum ABD aequale quadrato ex BF; reliquum igitur rectangulum AC, BD est aequale quadrato ex FG. Rursus quoniam rectangulum ABC aequale est quadrato ex BE, quorum rectangulum CBD est aequale quadrato ex BG, erit reliquum rectangulum AD, CB aequale quadrato ex EG. Fiunt igitur tria quae proponebantur.

PROP. XL. COMM 60. LEM. 21.

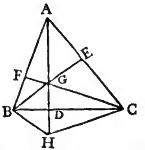
" In Monachum tertii Epitagmatis secundi Problematis."

" SIT triangulum ABC, et ducantur AD, BE, CF sitque AD
" perpendicularis ad BC, et puncta A, F, G, E sint in circu-
" lo; erunt anguli ad E, F recti.

[b] Quoniam enim recti sunt anguli BDF, BGF, puncta B, D, F, G sunt in circulo. Conv. 22. 3.

[c] Similiter quoniam recti sunt anguli BCE, BGE erunt puncta B, C, E, G in circulo. Ergo per 21. 3. in utroque casu.

Producatur enim AD, et ipſi GD aequalis ponatur DH, junganturque BH, HC. Aequalis igitur eſt angulus BHC angulo BGC, hoc eſt ipſi FGE. Sed angulus FGE una cum angulo ad A duobus rectis eſt aequalis; ergo et BHC angulus una cum angulo ad A aequalis eſt duobus rectis. In circulo igitur ſunt A, B, H, C puncta; et ideo angulus BAG aequalis eſt angulo BCH, hoc eſt GCD. Sunt autem et anguli DGC, AGF ad verticem aequales; reliquus igitur angulus ad D reliquo ad F eſt aequalis. Sed angulus ad D eſt rectus; ergo et reliquus qui ad F. Eadem ratione et angulus qui ad E eſt rectus. Anguli igitur qui ad F, E puncta recti ſunt. Q. E. D.



PROP. COMM. 61. LEM. 22.

Monachus tertii Epitagmatis primi Problematis.

Haec eſt pars demonſtrationis tertii Epitagmatis primi Problematis Lib. 2. et habetur in proprio ejus loco ad finem Prop. 59. hujus.

PROP. COMM. 62. LEM. 23.

Monachus tertii Epitagmatis ſecundi Problematis [a].

Et haec eſt pars demonſtrationis hujus Epitagmatis, et habetur ad finem Prop. 62. hujus.

[a] Commandinus vitioſe habet " tertii Problematis ſecundi Epitagmatis."

PROP. COMM. 64 LEM. 24.

Monachus tertii Epitagmatis tertii Problematis [b].

Haec eſt pars demonſtrationis hujus Epitagmatis, et habetur ad finem Prop. 65. hujus.

Observandum eſt Lemmata in 5ti et 6ti Problematis Lib. 1. Epitagmata eodem ordine diſpoſita eſſe quo Propoſitiones et Epitagmata quibus inſerviunt. Non autem ita diſpoſita ſunt Lemmata in Epitagmata Libri ſecundi, cujus haec eſt ratio, viz. Tria prima Lemmata in Librum ſecundum, Propoſitiones ſcilicet 41. 42. 43. Lib. 7. Pappi ſecundum Commandini enumerationem inſerviunt Propoſitionibus 45, 46. &c. uſque ad Propoſitionem 57. viz. Prop. 41. inſervit Propp. 45. 46. 47. Prop. 42. ipſis 48. 49. 50. et Prop. 43. ipſis 51. 52. 53. 54. 55. 56. Recte igitur diſpoſitae ſunt hae duodecim Propoſitiones ſecundum ordinem Propoſitionum 41. 42. 43. ex quibus dependent, non autem ſecundum ordinem Epitagmatum Lib. 2. quibus inſerviunt.

[b] Commandinus tantum habet "Monachus tertii Problematis."

LEMMATUM PAPPI ALEXANDRINI
IN LIBROS DUOS APOLLONII
DE SECTIONE DETERMINATA
FINIS.

APOLLONII PERGAEI

DE

SECTIONE

DETERMINATA

LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA I.

" DATIS duobus punctis, tertium invenire in recta linea " quae per ea transit, quod faciet quadratum ex segmento " inter ipsum et alterum ex punctis datis, ad quadratum ex " segmento inter ipsum et reliquum punctum datum, in ra- " tione data.

Potest autem requiri ut punctum inveniendum sit vel inter puncta data, vel extra eadem ad utrasvis partes; eadem vero in utroque casu erit solutio, quare duo hi casus constituunt solummodo

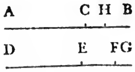
EPITAGMA UNICUM, viz.

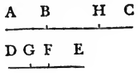
" DATIS duobus punctis A, B tertium invenire in recta " quae per ea transit, sive inter puncta data, sive extra ea- " dem, quod faciet quadratum ex AC ad quadratum ex BC " in ratione data."

Factum puta; quoniam igitur quadratum ex AC eſt ad quadratum ex CB, ut recta AC ad tertiam proportiona-
[a] 2.cor. 20.6. lem [a] ipſis AC, CB; et data eſt ratio quadrati ex AC ad quadratum ex CB; data erit et ratio rectae AC ad tertiam propor-
[b] 13. Dat. tionalem; igitur data [b] eſt ratio AC ad CB, et propterea ratio
[c] 2. Dat. AB ad BC data eſt; et data eſt AB, quare [c] et BC. Punctum igitur C datum eſt.

Componetur ita,

Sit ratio quam quadratum ex AC habere debet ad quadratum ex CB eadem rationi datae rectae DE ad datam EF, ponatur autem EF in DE producta, ſi C requiratur eſſe inter A et B; ſi vero C debeat eſſe in AB producta, ponatur EF verſus punctum D; et inter DE, EF inveniatur media proportionalis EG, quae ponatur ad eaſdem partes ad quas eſt F; et fiat ut DG ad GE, ita AB ad BC. Erit C punctum inveniendum. Quoniam enim ut





AB ad BC, ita eſt DG ad GE, componendo, ſi C ſit extra, dividendo vero, ſi fuerit inter puncta data, erit ut AC ad CB,
[d] 22. 6. ita DE ad EG. Igitur [d] quadratum ex AC eſt ad quadratum
[a] 2.cor. 20.6. ex CB, ut quadratum ex DE ad quadratum ex EG, hoc eſt [a] ut recta DE ad ipſam EF, proportionales enim ſunt DE, EG,

N. B. Citationes Datorum fiunt ex editione noſtra, quae Glaſguae impreſſa eſt anno 1762.

EF. Quadratum igitur ex AC eſt ad quadratum ex CB, in data ratione quam habet recta DE ad ipſam EF.

In utroque autem caſu puncta ipſi B propiora majores faciunt rationes quam puncta remotiora; quod quidem, ſi puncta fuerint inter A et B, manifeſtum eſt; in caſu vero altero ita oſtenditur. Sit punctum C extra puncta A, B, punctum vero H propius ſit puncto B quam eſt punctum C, ad eaſdem tamen partes ipſius B. Eſt igitur ratio AB ad BH, major ratione AB ad BC, et componendo, ratio AH ad HB, major eſt ratione AC ad CB; ergo et ratio quadrati ex AH ad quadratum ex HB, major eſt ratione quadrati ex AC ad illud ex CB.

PROB. II.

" DATIS duobus punctis tertium invenire in recta quae per
" illa tranſit, quod faciet rectangulum contentum ſegmento
" inter ipſum et alterum ex punctis datis, et data recta, ad
" quadratum ex ſegmento inter ipſum et reliquum punctum
" datum, in ratione data."

PROP. XLII. PROB. II. EPITAGMA 1.

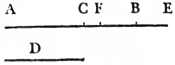
" DATIS duobus punctis A, B tertium C invenire in recta
" quae per ea tranſit, inter puncta data, quod faciet rectan-
" gulum contentum AC inter ipſum et utrumlibet ex punc-
" tis datis, et datâ rectâ D, ad quadratum ex reliquo ſegmen-
" to CB in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum AC, D ad quadratum ex CB in ratione data. Erit igitur, per 63. Dat. AC ad

CB, ut CB ad eam ad quam habet recta D rationem datam, quam ſcilicet rectangulum AC, D habet ad quadratum ex CB. Sit ea BE quae data erit propter D datam. Quoniam igitur eſt AC ad CB, ut CB ad BE, erit, componendo, AB ad BC, ut CE ad EB; quare rectangulum ABE aequale eſt ipſi BCE. Datum autem eſt ABE, datum igitur eſt rectangulum BCE;
[a] 85. Dat. et data eſt recta BE, quare datae [a] ſunt BC, CE, datumque erit punctum C. Indeterminatum autem eſt Problema.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae D ad ipſam BE quae ponatur in AB
[b] 29. 6. producta ad partes B. Et ad rectam BE applicetur [b] rectangulum aequale ipſi ABE excedens quadrato. Sitque C illud applicationis punctum quod eſt in EB producta ad partes B; erit C punctum inveniendum.

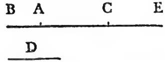


Quoniam enim, ex constructione, rectangulum BCE aequale eſt ipſi ABE, erit AB ad BC, ut CE ad EB. Eſt autem CE major EB, igitur AB major BC, et propterea cadet punctum C inter A, B puncta. Et propter praedictam proportionem, et dividendo, erit AC ad CB, ut CB ad BE; quare rectangulum AC, BE aequale eſt quadrato ex CB. Eſt igitur rectangulum AC, D ad quadratum ex CB, ſive rectangulum AC, BE, ut recta D ad ipſam BE. Patet autem puncta, ut F, remotiora a puncto A facere majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora ut C.

PROP. XLIII. PROB. II. EPITAGMA 2.

" DATIS duobus punctis B, A tertium C invenire in recta " quae per ea transit, extra data puncta, quod faciet rectan- " gulum contentum segmento AC inter ipsum et punctum " ipsi propius, et datâ rectâ D, ad quadratum ex segmento " BC inter ipsum et reliquum punctum datum, in ratione " data."

Factum puta; sit scilicet rectangulum AC, D ad quadratum ex BC, in ratione data. Est igitur [a] AC ad CB, ut CB ad eam ad quam habet recta D rationem datam, eam scilicet quam habet rectangulum AC, D ad quadratum ex BC; sit ea BE, quae ponatur a B versus partes A, et quoniam data est ratio rectae D ad ipsam BE, data erit BE; quia vero ut AC ad CB, ita est tota BC ad totam BE, erit reliqua BA ad reliquam CE, ut BC ad BE. Rectangulum igitur EBA aequale est ipsi BCE, quod propterea datum est. Et data est BE; ergo BC, CE sunt datae [b], datumque erit punctum C.



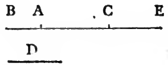
[a] 63. Dat.

[b] 86. Dat.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ad datam rectam BE applicetur rectangulum dato rectangulo EBA aequale, deficiens quadrato, quod non semper fieri potest, quoties scilicet rectangulum EBA majus est quadrato ex dimidio ipsius BE [c], ideo Problema non semper construi potest. Fiet autem modo singulari, hoc est unica erit ejusdem solutio si acciderit applicationis punctum C cadere in medio ipsius BE.

[c] 27. 6.

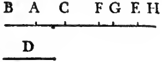
Ratio autem rectanguli ad quadratum, ſive ratio datae rectae D ad quaeſitam BE, et punctum C quae hoc efficient, ita invenientur. Quoniam requiritur ut aequales ſint BC, CE, et ex prius oſtenſis debet eſſe ut AC ad CB, ita CB ad BE; et eſt BE dupla ipſius BC, erit BC dupla ipſius BA. Data autem eſt BA, data igitur eſt BC, et



punctum C. Fiat igitur BC dupla ipſius BA, et BE dupla ipſius BC; et quoniam eſt AC ad CB, ut CB ad BE; erit rectangulum AC, D ad quadratum ex CB, hoc eſt ad rectangulum AC, BE, ut D ad BE. Ratio autem ipſius D ad BE ea eſt quam habet D ad qudruplam rectae BA.

Inquirendum autem eſt an punctum C faciat majorem vel minorem rationem rectanguli ad quadratum, quovis alio puncto in BA producta ad partes A. Manentibus igitur jam deſcriptis, ſit aliud quodvis punctum F, quod primò ſit inter A et E. Comparanda igitur eſt ratio rectanguli AC, D ad quadratum ex BC, cum ratione rectanguli AF, D ad quadratum ex BF. Et permutando, et per 1. 6. comparanda venit ratio rectae AC ad rectam AF, hoc eſt ratio rectanguli AC, BE ad ipſum AF, BE, cum ratione quadrati ex BC ad quadratum ex BF. Quia vero proportionales oſtenſae ſunt AC, CB, BE, rectangulum AC, BE aequale eſt quadrato ex BC; igitur comparandum eſt rectangulum AF, BE cum quadrato ex BF. Et ablatis utriſque ex rectangulo FBE, comparandum eſt reliquum rectangulum ABE cum reliquo BFE. Eſt autem rect-
d 5. 2. angulum ABE aequale quadrato ex BC quod majus [d] eſt rectangulo BFE, quia recta BE bifariam ſecta eſt in C. Ablato

igitur rectangulo ABE, et ipso BFE ex rectangulo FBE, erit reliquum rectangulum AF, BE minus reliquo, quadrato scilicet ex BF. Si autem punctum F cadat in ipsum E, vel fuerit in BE producta ultra E, manifestum est rectangulum AF, BE minus esse quadrato ex BF. Igitur, in quocunque casu, rectangulum AC, BE majorem habet rationem ad ipsum AF, BE quam idem AC, BE, vel ipsi aequale quadratum ex BC habet ad quadratum ex BF. Quare per 1. 6. et permutando, rectangulum AC, D majorem rationem habet ad quadratum ex BC, quam rectangulum AF, D habet ad quadratum ex BF. Punctum igitur C facit maximam rationem rectanguli ad quadratum, quae quidem ostensa est eadem rationi rectae D ad quadruplum ipsius BA.

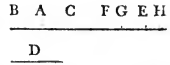


Praeterea puncta, ut F, ipsi C propiora ad utrasvis ipsius C partes, faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora ad easdem partes puncti C, ut G.

Fiat enim ut AF ad FB, ita FB ad quartam BH. Est igitur rectangulum AF, D ad quadratum ex FB (sive rectangulum AF, BH) ut recta D ad ipsam BH. Rectangulum vero AC, D ostensum fuit ad quadratum ex BC, ut D ad BE. Igitur ex praemissis ratio D ad BE, major est ratione D ad BH, et propterea recta BH major est ipsâ BE. Quoniam vero est AF ad FB, ut tota FB ad totam BH, erit reliqua BA ad reliquam FH, ut FB ad BH; rectangulum igitur ABH aequale est ipsi BFH.

Comparanda autem proponitur ratio rectanguli AF, D ad quadratum ex BF, cum ratione rectanguli AG, D ad quadra-

tum ex BG. Et permutando, et per 1. 6. comparanda eſt ratio rectae AF ad ipſam AG, hoc eſt ratio rectanguli AF, BH ad ipſum AG, BH, cum ratione quadrati ex BF ad quadratum ex BG. Rectangulum autem AF, BH aequale eſt quadrato ex BF; comparandum igitur eſt rectangulum AG, BH cum quadrato ex BG. Et ablato utroque ex rectangulo GBH, comparandum eſt reliquum rectangulum ABH cum reliquo rectangulo BGH. Eſt autem ABH rectangulum aequale rectangulo BFH quod propterea comparandum eſt cum ipſo BGH. Fiet hoc ſi inveniatur utrum punctum F an G propius ſit puncto medio ipſius BH. Et primò inveniatur utrum punctum C an F puncto iſto medio ſit propius, hoc eſt conferatur rectangulum BCH (cum ipſo BFH, hoc eſt) cum rectangulo ABH. Et ablato utroque ex rectangulo CBH, conferatur reliquum, quadratum ſcilicet ex BC cum reliquo rectangulo AC, BH. Eſt vero quadratum ex BC aequale rectangulo AC, BE, quod propterea cum rectangulo AC, BH comparandum eſt. Minor autem eſt recta BE ipsâ BH, ut prius oſtenſum, igitur rectangulum AC, BE, hoc eſt quadratum ex BC minus eſt rectangulo AC, BH; quorum utroque ex rectangulo CBH ablato, reliquum, rectangulum ſcilicet BCH majus eſt reliquo rectangulo ABH, hoc eſt BFH. Punctum igitur C propius eſt medio puncto ipſius BH quam punctum F,* et F quam G, quia, ex hypotheſi, F propius eſt puncto C quam eſt punctum G, et ad eaſdem ipſius C partes. Igitur rectangulum BFH, hoc eſt ABH majus eſt ipſo BGH; et ablato utroque ex rectangulo GBH, reliquum,

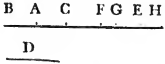


rectangulum ſcilicet AG, BH minus eſt reliquo, quadrato ſcilicet ex BG. Quare rectangulum AF, BH majorem habet rationem ad ipſum AG, BH, quam idem AF, BH, hoc eſt quadratum ex BF habet ad quadratum ex BG. Et per 1. 6. rectangulum AF, D ad ipſum AG, D majorem habet rationem quam quadratum ex BF ad quadratum ex BG; et permutando.

Componetur vero Problema primo propoſitum ita,

Sint B, A puncta data, et data recta ſit D, juxtâque BA, in ipſa producta ad eas partes ad quas inveniendum eſt punctum, puta ad partes ipſius A, ſumatur AC ipſi BA aequalis, et CE aequalis rectae BC. Si igitur ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum, eadem fuerit rationi rectae D ad quadruplum rectae BA, hoc eſt ad ipſam BE, punctum C idque ſolum Problema ſolvit, ut in praemiſſis oſtenſum eſt. Si vero ratio data non eadem ſit rationi rectae D ad ipſam BE, erit hac neceſſariò minor, quoniam oſtenſum fuit rationem D ad BE maximam eſſe. Sit igitur ratio data eadem rationi rectae D ad ipſam BH; et quoniam ratio haec minor eſt rationi D ad BE, erit BH major quam BE. rectangulum igitur AC, BH majus eſt (ipſo AC, BE, hoc eſt) quadrato ex BC; quorum utroque ablato ex rectangulo CBH, erit reliquum ABH minus reliquo rectangulo BCH. Rectangulum autem BCH minus eſt quadrato ex dimidio ipſius BH, quia punctum C quod ipſam BE bifariam ſecat, non ſecat bifariam rectam BH. Multo igitur rectangulum ABH minus eſt quadrato ex dimidio BH. Quare per 28. 6. ad datam rectam BH applicari poteſt rectangulum aequale ipſi ABH deficiens quadrato. Applicetur, ſitque

F quodvis ex applicationum punctis. Quoniam igitur, ex conſtructione, rectangulum BFH aequale eſt ipſi ABH, major autem eſt BH quam FH, erit BF major quam BA, et propterea punctum F eſt in BA producta. Si autem ex rectangulo FBH auferantur



aequalia rectangula ABH, BFH, erit reliquum rectangulum AF, BH aequale reliquo quadrato ex BF. Habet igitur rectangulum AF, D ad quadratum ex BF, (hoc eſt ad rectangulum AF, BH) rationem eandem rationi rectae D ad rectam BH, hoc eſt eandem rationi datae.

Quamvis vero oſtenſum fuit puncta ipſi C propiora facere majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad eaſdem partes puncti C; non tamen ſequitur puncta propiora facere majores rationes quam puncta remotiora ad contrarias partes puncti C. Sint enim F, f puncta applicationum in praecedente compoſitione inventa, et bifariam ſectâ BH in K, quoniam



oſtenſum eſt * utrumque ex punctis F, f remotius eſſe a puncto K medio ſcilicet ipſius BH, quam punctum C; unum ex ipſis cadet inter A, C puncta. Sit hoc punctum F, et quoniam aequales ſunt FK, Kf, erit FC minor Cf. Fiat igitur CL aequalis ipſi CF, et quoniam punctum f eandem facit rationem quam facit punctum F, patet quodvis punctum inter L et f facere majorem rationem quam punctum f, ſive quam punctum F, quamvis remotiora

* Vide hanc notam in pag. 66.

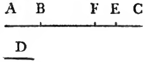
ſunt a puncto C quam eſt punctum F. Idemque in ſimilibus caſibus eſt obſervandum.

PROP. XLIV. PROB. II. EPITAGMA 3.

" DATIS duobus punctis A, B, tertium C invenire extra " data puncta, in recta quae per A, B tranſit, quod faciet " rectangulum contentum ſegmento AC inter punctum C et " punctum ab ipſo remotius, et datâ rectâ D ad quadratum " ex ſegmento CB inter ipſum et reliquum punctum datum, " in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum contentum AC et D ad quadratum ex CB in ratione data. Erit igitur [a] AC ad CB, ut CB ad eam ad quam habet recta D rationem datam, quam ſcilicet habet rectangulum AC, D ad quadratum ex CB; ſit ea BE quae ponatur verſus partes C, et quoniam data eſt ratio rectae D ad ipſam BE, data erit BE; quia vero ut AC ad CB, ita eſt CB ad BE, dividendo erit AB ad BC, ut CE ad EB; rectangulum igitur ABE aequale eſt ipſi BCE. Datum autem eſt ABE rectangulum, datae enim ſunt AB,BE rectae, quare datum eſt rectangulum BCE; et data eſt BE, datae igitur [b] ſunt BC, EC, datumque erit punctum C. Et indeterminatum eſt Problema.

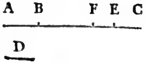
[a] 63. Dat.
[b] 85. Dat.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae D ad ipſam BE, quae ponatur

a puncto B in recta AB producta. Et ad rectam BE applice-
[c] 29. 6. tur [c] rectangulum aequale ipſi ABE excedens quadrato, ſitque C illud applicationis punctum quod eſt in BE producta ad partes E; erit C punctum inveniendum. Quoniam enim ex conſtructione, rectangulum BCE eſt aequale ipſi ABE, erit AB ad BC, ut CE ad EB, et componendo, ut AC ad CB, ita CB ad BE. Igitur quadratum ex CB aequale eſt rectangulo AC, BE, et rectangulum AC, D erit ad quadratum ex CB, hoc eſt ad rectangulum AC, BE, ut recta D ad ipſam BE, hoc eſt in ratione data.



Puncta autem, ut F, propiora ipſi B majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta a B remotiora, ut C. Quoniam enim AB habet ad BF, majorem rationem quam AB ad BC, componendo erit ratio AF ad FB, major ratione AC ad CB, et, permutando, erit ratio FA ad AC, major ratione FB ad BC. Eſt vero ratio FB ad BC, major ratione
[d] 2. cor. 20. 6. (FB ad tertiam proportionalem ipſis FB, BC, hoc eſt [d] ratione) quadrati ex FB ad quadratum ex BC. Multo igitur ratio FA ad AC, major eſt ratione quadrati ex FB ad quadratum ex
[e] 1. 6. BC. Igitur [e] ratio rectanguli AF, D ad ipſum AC, D, major eſt ratione quadrati ex FB ad quadratum ex BC; et, permutando, ratio rectanguli AF, D ad quadratum ex FB, major eſt ratione rectanguli AC, D ad quadratum ex CB.

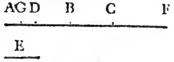
PROB. III.

" DATIS in recta linea tribus punctis, quartum invenire
" inter ipsa, viz. inter utrumlibet ex punctis extremis et
" punctum medium, quod faciet rectangulum a segmento
" inter ipsum et quodlibet ex punctis datis et datâ rectâ, ad
" rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua data punc-
" ta, in ratione data."

PROP. XLV. PROB. III. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
" invenire inter puncta A, B quod faciet rectangulum a seg-
" mento DA inter ipsum et punctum A, et data recta E, ad
" rectangulum BDC inter ipsum et reliqua puncta B, C quae
" scilicet sunt ad easdem partes puncti D, in ratione data."

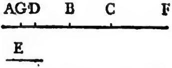
Factum puta; sit scilicet rectangulum AD, E ad ipsum BDC in ratione data. Est igitur [a] AD ad DB, ut DC ad eam ad quam habet recta E rationem datam quam scilicet habet rectangulum AD, E ad ipsum BDC; sit ea BF, quae data erit propter datam E. Et quoniam est AD ad DB, ut DC ad BF, erit [b] AC ad DF, ut DC ad BF; rectangulum igitur CDF aequale est rectangulo dato AC, BF. Et data est recta CF, quare data [c] est CD, datumque erit punctum D.



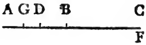
[a] 63. Dat.
[b] 12. 5.
[c] 85. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipſum BDC eadem rationi rectae E ad ipſam BF, et ponatur BF a puncto B verſus partes C. Et, ſi punctum F non inci-
[d] 29. 6. derit in ipſum C, ad rectam CF, applicetur[d] rectangulum aequale ipſi AC, BF excedens quadrato, ſitque D punctum applicationis quod eſt in CF producta ad partes B; erit D punctum inveniendum. Eſt enim, ex conſtructione, rectangulum FDC aequale ipſi AC, BF, quare FDC minus eſt rectangulo FAC, et propterea cadit D inter puncta A, C. Et quoniam AC major eſt BC, erit rectangulum AC, BF, hoc eſt ipſum FDC majus rectangulo FBC; igitur punctum D eſt in CB producta verſus A, et cadet inter puncta A, B. quoniam vero rectangulum AC, BF aequale eſt
[e] cor. 19. 5. ipſi FDC, erit AC ad FD, ut DC ad BF, et[e] AD ad DB, ut DC ad BF. Et rectangulum AD, E eſt ad ipſum AD, BF, hoc eſt ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipſam BF, hoc eſt in ratione data.



Si vero punctum F inciderit in ipſum C, hoc eſt, ſi ratio data eadem fuerit rationi E ad BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, ut in analyſi oſtenſum, eſt AC ad CD, ut (DF ad BF, id eſt in hoc caſu) DC ad BC; ſi inter AC et CB media proportionalis inveniatur CD, et ponatur a puncto C verſus A, erit D punctum in-



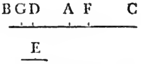
veniendum. Eſt enim AC ad CD, ut CD ad CB, et [e] AD ad DB, ut DC ad CB. Igitur rectangulum AD, E eſt ad ipſum AD, CB, hoc eſt ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipſam CB, hoc eſt in ratione data. [e] cor. 19. 5.

Puncta autem, ut D remotiora a puncto A faciunt majores rationes quam puncta propiora ut G. Eſt enim rectangulum AD, E majus ipſo AG, E; at rectangulum BDC minus ipſo BGC.

PROP. XLVI. PROB. III. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C invenire " quartum D inter puncta B, A quod faciet rectangulum a " ſegmento DA inter ipſum et punctum medium A, et datâ " rectâ E, ad rectangulum BDC a ſegmentis inter ipſum et " reliqua puncta B, C, in ratione data."

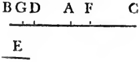
Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum DA, E ad ipſum BDC in ratione data. Eſt igitur [a] AD ad DB, ut DC ad eam ad quam habet E rationem datam quam ſcilicet habet rectangulum AD, E ad ipſum BDC. [a] 63. Dat.



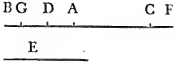
Sit ea BF, quae propter datam E data erit. Et quoniam eſt ut AD ad DB, ita DC ad BF, erit [b] AC ad DF, ut DC ad BF. Rectangulum igitur FDC aequale eſt dato rectangulo BF, AC; et data eſt CF, igitur [c] data eſt CD, et punctum D datum erit. [b] 19. 5. [c] 85. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipsum BDC eadem rationi rectae E ad ipsam BF, et ponatur BF a puncto B versus partes C. Et, si punctum F non inci-
[d] 29. 6. derit in ipsum C, applicetur [d] ad rectam CF rectangulum aequale ipsi BF, AC excedens quadrato, sitque D punctum applicationis quod est in CF producta ad partes puncti B; erit D punctum inveniendum.

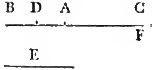


Est enim, ex constructione, rectangulum FDC aequale ipsi BF, AC, minus igitur est FDC rectangulo FBC, quare punctum D cadit inter punctum B et rectam CF, et propterea DF minor est ipsa BF. Quoniam vero rectangulum FDC aequale est ipsi BF, AC, erit DF ad AC, ut BF ad



[e] 14. 5. DC; et est DF minor BF, igitur [e] et AC minor est DC, et propterea cadet punctum D inter puncta A, B. Est autem AC
[b] 19. 5. ad DF, ut DC ad BF, quare [b] ut AD ad DB, ita est DC ad BF; rectangulum vero AD, E est ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF, hoc est in ratione data.

Si vero punctum F inciderit in ipsum C, hoc est si ratio data eadem fuerit rationi E ad BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, ut in analysi ostensum, est AC ad CD, ut (DF ad FB, id est in hoc casu) DC ad CB; si inter



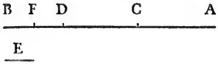
AC et CB media proportionalis inveniatur CD, et ponatur a puncto C versus B, erit D punctum inveniendum. Est enim BC ad CD, ut CD ad CA, quare [b] BD est ad DA, ut BC ad CD. Rectangulum vero AD, E est ad ipsum AD, BC, hoc est ad ipsum BDC ut recta E ad rectam BC, hoc est in ratione data. [b] 19. 5.

Puncta autem, ut G, propiora puncto B faciunt majores rationes quam puncta remotiora, ut D. Quoniam enim punctum C est in GA producta, ratio GA ad AD, hoc est ratio rectanguli GA, E ad ipsum AD, E major est (ratione GC ad CD, hoc est ratione) rectanguli BD, GC ad ipsum BDC. Majus autem est rectangulum BD, GC ipso BGC, quare ratio rectanguli BD, GC ad ipsum BDC major est ratione rectanguli BGC ad idem BDC; multo igitur ratio rectanguli GA, E ad ipsum DA, E major est ratione rectanguli BGC ad ipsum BDC; et permutando, ratio rectanguli GA, E ad ipsum BGC, major est ratione rectanguli DA, E ad ipsum BDC. Puncta igitur ipsi B propiora faciunt majores rationes quam puncta remotiora.

PROP. XLVII. PROB. III. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D
" invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum DA, E
" a segmento inter D et punctum extremum A quod est ad
" eas partes ipsius D ad quas est punctum medium C, et da-
" ta recta E, ad rectangulum BDC a segmentis inter D et re-
" liqua puncta B, C, in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum DA, E ad ipſum
[a] 63. Dat. BDC in ratione data. Eſt igitur [a] AD ad DC, ut BD ad eam ad quam habet E rationem datam quam ſcilicet habet rectangulum DA, E ad ipſum BDC. Sit ea BF, quae, propter datam E, data erit. Et quoniam eſt AD ad DC, ut BD ad BF, dividendo, erit AC ad CD, ut DF ad FB. Rectangulum igitur FDC aequale eſt dato rectangulo BF, CA; et data eſt recta FC, et eſt punctum D inter F et C, quia AD
[b] 86. Dat. major eſt DC, et propterea BD major BF; data igitur [b] eſt FD, datumque punctum D.

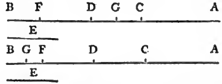


Quoniam vero ad compoſitionem requiritur ut ad datam rectam FC applicetur rectangulum aequale dato rectangulo BF, CA deficiens quadrato, quod non ſemper fieri poteſt, quoties ſcilicet rectangulum BF, CA majus fuerit quadrato ex dimidio ipſius FC; ideo Problema non ſemper conſtrui poteſt. Fiet autem modo ſingulari in caſu quo rectangulum BF, CA eſt aequale quadrato ex dimidio ipſius FC, hoc eſt quando punctum applicationis D cadit in medio ipſius FC.

Invenietur autem in hoc caſu punctum D, et ratio datae E ad quaeſitam BF, ut ſequitur. Quoniam punctum D, ex hypotheſi, bifariam ſecat rectam FC, et ex praemiſſis debet rectangulum BF, CA aequale eſſe (rectangulo FDC, hoc eſt) quadrato ex DC, addito communi rectangulo FAC, erit rectangulum BAC aequale quadrato ex DA. Datum autem eſt BAC rectangulum, quadratum igitur ex DA datum eſt, et ipſa DA data; datum igitur eſt punctum D, et propterea punctum F.

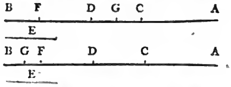
Inveniatur scilicet inter BA, AC media proportionalis AD quae ponatur in AC producta versus punctum B, et fiat DF aequalis ipsi DC; erit D punctum inveniendum, et ratio quaesita eadem erit rationi rectae E ad ipsam BF. Quoniam enim rectangulum BAC aequale est quadrato ex DA, ablato communi rectangulo FAC, reliquum BF, CA aequale est (reliquo, quadrato scilicet ex DC, sive) rectangulo FDC. Est igitur AC ad CD, ut DF ad FB, et componendo, ut * AD ad DC, * ita est DB ad BF. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF.

Inquirendum autem est an punctum D faciat rationem rectanguli DA, E ad ipsum BDC majorem vel minorem ratione quam facit aliud quodvis punctum inter puncta B, C. Sit aliud istiusmodi punctum G. Comparanda igitur est ratio rectanguli DA, E ad ipsum BDC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BF, cum ratione rectanguli GA, E ad ipsum BGC. Et [c] comparanda est ratio rectanguli GA, E ad ipsum GA, BF cum ratione ipsius GA, E ad ipsum BGC. Igitur comparandum est rectangulum GA, BF cum rectangulo BGC. Si igitur punctum G inciderit in ipsum F, vel fuerit inter B et F, patet rectangulum GA, BF majus esse rectangulo BGC. Si vero fuerit G inter F et C, ex rectangulis BF, GA et BGC quae inter se comparanda sunt, auferatur commune BF, GC, et conferatur reliquum BF, CA cum reli-



[c] 1. 6.

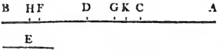
quo rectangulo FGC. Eſt autem BF, CA aequale quadrato ex
[d 5. 2.] DC, quod majus [d] eſt rectangulo FGC; rectangulum igitur BF, CA majus eſt ipſo FGC; hiſce addatur commune rectangulum BF, GC, et rectangulum BF, GA majus erit ipſo BGC; quod etiam in altero caſu oſtenſum fuit. Igitur in quocunque caſu rectangulum GA, E ad ipſum BF, GA, et propterea recta E ad ipſam BF, minorem habet rationem quam rectangulum GA, E ad ipſum BGC. Ratio au-



tem rectanguli DA, E ad ipſum BDC, eadem eſt rationi rectae E ad ipſam BF, quare rectangulum DA, E ad ipſum BDC minorem habet rationem quam rectangulum GA, E ad ipſum BGC. Punctum igitur D facit minimam rationem rectanguli DA, E ad rectangulum BDC.

Oſtendendum reſtat puncta ipſi D propiora minores facere rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes ipſius D.

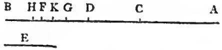
† Fiat enim, manentibus jam deſcriptis, ut AG ad GC, † ita GB ad BH. Erit igitur rectangulum GA, E ad ipſum BGC, hoc eſt ad ipſum GA, BH, ut recta E ad ipſam BH. Oſtenſa autem eſt ratio rectanguli DA, E ad ipſum BDC, hoc eſt ratio rectae E ad rectam BF, minor ratione rect-



anguli GA, E ad ipſum BGC; igitur ratio rectae E ad ipſam BF minor eſt ratione ipſius E ad rectam BH, et propterea

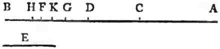
recta BF major est ipsâ BH. Quoniam vero est AG ad GC, ut GB ad BH, dividendo erit AC ad CG, ut GH ad HB; igitur rectangulum BH, CA aequale est ipsi HGC.

Sit jam aliud quodvis punctum K inter B et C remotius a puncto D quam est punctum G, ad easdem autem partes puncti D ad quas est G. Et comparanda est ratio rectanguli GA, E ad rectangulum BGC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BH, hoc est ratio rectanguli KA, E ad ipsum BH, KA, cum ratione rectanguli KA, E ad rectangulum BKC.



Comparandum igitur est rectangulum BH, KA cum ipso BKC; et ablato communi rectangulo BH, KC, comparandum est reliquum rectangulum BH, CA cum reliquo HKC. Est autem BH, CA aequale rectangulo HGC, quod propterea comparandum est cum ipso HKC. Inveniatur igitur utrum punctum G an K propius sit puncto quod bifariam secat ipsam HC. Ut hoc fiat inveniatur utrum punctum D an G puncto isto medio sit propius. Conferatur igitur rectangulum HDC cum ipso (HGC, hoc est cum ipso) BH, CA; additoque communi rectangulo BH, DC, conferatur rectangulum BDC cum ipso BH, DA. Est autem rectangulum BDC aequale ipsi BF, DA, ostensum enim fuit * esse AD ad DC, ut DB ad BF; comparandum igitur est BF, DA cum ipso BH, DA. Vide ad * in pag. 77.
Ostensa autem est recta BF major ipsâ BH; igitur rectangulum BF, DA, hoc est ipsum BDC majus est rectangulo BH, DA; et ablato communi rectangulo BH, DC, erit reliquum HDC majus (reliquo BH, CA, hoc est ipso) HGC. Est igitur

punctum D propius puncto medio ipſius HC quam punctum G; quare et punctum G propius eſt eidem puncto medio quam eſt punctum K quod remotius eſt a D quam eſt punctum G, et ad eaſdem puncti D partes. Igitur rectangulum HGC, hoc eſt ipſum BH, CA majus eſt ipſo HKC, additoque communi rectangulo BH, KC, erit ipſum BH, KA majus rectangulo BKC. Ratio igitur rectanguli KA, E ad BH, KA, hoc eſt ratio rectae E ad ipſam BH, hoc eſt ratio rectanguli GA, E ad ipſum GA, BH, hoc eſt ad BGC, † minor eſt ratione rectanguli KA, E ad ipſum BKC. Puncta igitur propiora puncto D faciunt minores rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes ipſius D.



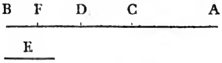
Vide ad † in pag. 78.

Componetur vero Problema ita,

Sit E recta data, et inveniatur punctum D, ut in praemiſſis oſtenſum fuit, quod facit rationem minimam rectanguli DA, E ad rectangulum BDC, et fiat DF aequalis ipſi DC. Si igitur ratio propoſita eadem fuerit rationi rectae E ad ipſam BF, punctum D, idque ſolum Problema efficiet, ut in praemiſſis oſtenſum fuit. Si autem ratio propoſita non eadem fuerit rationi minimae E ad BF, erit hac ratione major, nam ſi non fuerit, Problema non conſtrui poteſt. Sit igitur ratio propoſita ea quam habet E ad BH, quae quoniam major eſt ratione E ad BF, erit recta BF major ipsâ BH, et rectangulum BF, DA majus erit ipſo BH, DA. Oſtenſum autem fuit rect-

angulum BF, CA aequale rectangulo FDC, additoque communi rectangulo BF, DC, erit rectangulum BF, DA aequale ipſi BDC. Igitur rectangulum BDC majus eſt ipſo BH, DA, et ablato communi BH, DC, erit reliquum HDC majus reliquo BH, CA. Eſt autem rectangulum HDC minus quadrato ex dimidio ipſius HC, quia punctum D non bifariam ſecat rectam HC; multo igitur rectangulum BH, CA minus eſt eodem quadrato. Quare ad rectam HC applicari poteſt rectangulum aequale ipſi BH, CA deficiens quadrato [c]. Applicetur, [c] 28. 6.
et ſit G utrumlibet applicationis punctum; erit G punctum inveniendum. Quoniam enim, ex conſtructione qua inventum fuit punctum D, proportionales ſunt BA, DA, CA, erit BD major quam DC, hoc eſt quam FD, et cadet punctum F et propterea punctum H inter puncta B, C. Rectangulum autem HGC, ex conſtructione, aequale eſt ipſi BH, CA, et addito communi BH, GC, erit rectangulum BGC aequale ipſi BH, GA. Eſt igitur rectangulum GA, E ad ipſum BH, GA, hoc eſt ad ipſum BGC, ut recta E ad ipſam BH, hoc eſt in ratione data.

Ratio autem minima, quam ſcilicet habet recta E ad ipſam BF, ita determinatur. Eſt BF exceſſus quo utraeque BA, AC excedunt utraſque FA, AC, utraeque vero FA, AC ſunt duae DA, quia FC dupla eſt ipſius DC; DA autem eſt ea quae poteſt rectangulum BAC, quare DA bis eſt ea quae poteſt rectangulum BAC quater. Ratio igitur minima, hoc eſt ratio rectae E ad ipſam BF, ea eſt quam habet E ad



exceſſum quo BA, AC ſimul excedunt eam quae poteſt rectangulum BAC quater. Eſt autem haec determinatio Prop. 19. Lib. 7. Pappi; et eſt Lemma Pappi ad Apollonii libros de Sectione Rationis et Spatii.

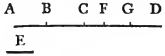
PROB. IV.

" DATIS in recta linea tribus punctis, quartum invenire
" extra ipſa, ad utraſvis partes, quod faciet rectangulum a
" ſegmento inter ipſum et unum ex punctis datis, et datâ
" rectâ ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et reliqua
" duo puncta, in ratione data."

PROP. XLVIII. PROB. IV. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum in-
" venire D extra puncta data quod faciet rectangulum AD, E
" a ſegmento inter punctum D et punctum A ab eo remo-
" tiſſimum, et data recta E, ad rectangulum BDC a ſegmen-
" tis inter D et reliqua puncta B, C, in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum AD, E ad ipſum
* 63. Dat. BDC in ratione data. Eſt igitur * AD ad DC, ut DB ad eam ad quam habet reliqua E rationem datam quam ſcilicet habet rectangulum AD, E ad ipſum BDC. Sit ea BF quae, propter datam E, data erit. Et quoniam eſt AD ad DC, ut DB ad BF, dividendo, erit AC ad CD, ut DF ad FB.

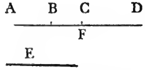


Igitur rectangulum CDF aequale est rectangulo dato AC, BF; et data est CF, et est D in CF producta, quia enim AD major DC, erit DB major BF; data igitur [b] est CD, datumque erit punctum D. [b] 85. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipsum BDC, eadem rationi rectae E ad rectam BF quae ponatur a puncto B versus partes puncti C, et, si punctum F non inciderit in ipsum C, applicetur [c] ad rectam CF rectangulum aequale ipsi AC, BF excedens quadrato, sitque D punctum applicationis quod est in CF producta ad partes contrarias iis ad quas est punctum B; erit D punctum inveniendum. Est enim, ex constructione, rectangulum CDF aequale ipsi AC, BF, ut igitur AC ad CD, ita est DF ad FB; et componendo, ut AD ad DC, ita DB ad BF. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF, hoc est in ratione data. [c] 29. 6.

Si vero punctum F inciderit in ipsum C, hoc est si ratio data eadem fuerit rationi E ad ipsum BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, in analysi, ostensum fuit esse AC ad CD, ut (DF ad FB, hoc est in praesenti casu ut) DC ad CB; si inter AC et CB media proportionalis inveniatur CD, et ponatur in AC producta, erit D punctum inveniendum. Quoniam enim est AC ad CD, ut CD ad CB, erit, componendo, AD ad DC, ut DB ad BC. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BC, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BC, hoc est in ratione data.



Puncta autem, ut G, propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora, ut D. Quoniam enim AG major eſt CG, et punctum D in CG producta, erit ratio AG ad AD, major ratione CG ad CD; igitur et ratio rectanguli AG, E ad ipſum AD, E, major eſt ratione rectanguli BD, CG ad ipſum BDC; quoniam vero BD major eſt BG, rectangulum BD, CG majus eſt ipſo BGC, quare ratio rectanguli BD, CG ad ipſum BDC, major eſt ratione rectanguli BGC ad idem BDC. Multo igitur ratio rectanguli AG, E ad ipſum AD, E, major eſt ratione rectanguli BGC ad ipſum BDC; et permutando, ratio rectanguli AG, E ad ipſum BGC, major eſt ratione rectanguli AD, E ad ipſum BDC. Puncta igitur propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora.



PROP. XLIX. PROB. IV. EPITAGMA 2.

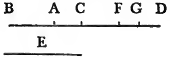
" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
" invenire extra puncta data quod faciet rectangulum AD, E
" a ſegmento inter ipſum et punctum medium A et data rec-
" ta E, ad rectangulum BDC a ſegmentis inter D et reliqua
" puncta B, C in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum AD, E ad ipſum
[a] 63. Dat. BDC in ratione data. Eſt igitur [a] AD ad DC, ut BD ad eam ad quam habet reliqua E rationem datam quam ſcilicet rectangulum AD, E habet ad ipſum BDC. Sit ea BF, quae, prop-

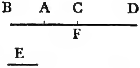
ter datam rectam E, data erit. Et quoniam est AD ad DE, ut DB ad BF, dividendo, erit AC ad CD, ut DF ad FB. Igitur rectangulum CDF aequale est rectangulo dato AC, BF; et data est CF, et est punctum D in CF producta, nam est AD major DC, quare et BD major est BF; data igitur [b] est CD, datumque erit punctum D. [b] 85. Dat.

Componetur ita,

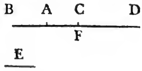
Sit ratio data quam habere debet rectangulum AD, E ad ipsum BDC eadem rationi rectae E ad rectam BF quae ponatur a puncto B versus partes puncti C; et, si punctum F non inciderit in ipsum C, applicetur [c] ad rectam CF rectangulum aequale ipsi AC, BF excedens quadrato, sitque D punctum applicationis quod est in CF producta ad partes contrarias iis ad quas est punctum A; erit D punctum inveniendum. Est enim, ex constructione, rectangulum CDF aequale ipsi AC, BF; quare est AC ad CD, ut DF ad FB, et componendo, ut AD ad DC, ita est DB ad BF. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum AD, BF, hoc est ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipsam BF, hoc est in ratione data. [c] 29. 6.



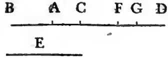
Si vero punctum F inciderit in ipsum C, hoc est, si ratio data eadem fuerit rationi rectae E ad ipsam BC, punctum D ita invenietur. Quoniam, in analysi, ostensum fuit esse AC ad CD, ut (DF ad FB, hoc est in praesenti casu ut) DC ad CB; si inter AC et CB media proportionalis inveniatur



CD, et ponatur in AC producta, erit D punctum inveniendum. Quoniam enim eſt ut AC ad CD, ita CD ad CB, componendo, erit AD ad DC, ut DB ad BC. Eſt autem rectangulum AD, E ad ipſum AD, BC, hoc eſt ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipſum BC, hoc eſt in ratione data.



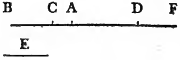
Puncta autem, ut G, propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora, ut D. Nam quoniam AG major eſt CG, et eſt punctum D in CG producta, erit ratio AG ad AD, major ratione CG ad CD; igitur et ratio rectanguli AG, E ad ipſum AD, E major eſt ratione rectanguli BD, CG ad ipſum BDC, quoniam vero BD major eſt BG, rectangulum BD, CG majus eſt ipſo BGC; quare ratio rectanguli BD, CG ad rectangulum BDC major eſt ratione ipſius BGC ad idem BDC. Multo igitur ratio rectanguli AG, E ad ipſum AD, E, major eſt ratione rectanguli BGC ad ipſum BDC; et permutando, ratio rectanguli AG, E ad ipſum BGC, major eſt ratione rectanguli AD, E ad rectangulum BDC. Puncta igitur propiora puncto C majores faciunt rationes quam puncta remotiora.



PROP. L. PROB. IV. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D
" invenire extra puncta data, quod faciet rectangulum AD, E
" a ſegmento inter punctum D et punctum ipſi proximum A
" et recta data E, ad rectangulum BDC a ſegmentis inter D
" et reliqua puncta B, C, in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum AD, E ad ipſum BDC in ratione data. Eſt igitur [a] AD ad DC, ut BD ad eam ad quam habet reliqua E rationem datam quam ſcilicet habet rectangulum AD, E ad ipſum BDC. Sit ea BF, quae data erit, quia data eſt recta E. Et quoniam eſt AD ad DC, ut BD ad BF, erit, invertendo, ut * FB ad BD, ita CD ad DA, et convertendo, BF ad FD, ut DC ad CA. Igitur rectangulum CDF aequale eſt rectangulo dato CA, BF; et data eſt recta CF, et eſt punctum D inter C et F, quoniam enim CD major eſt DA, erit BF major BD; data igitur [b] eſt CD, datumque erit punctum D.



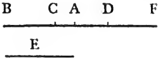
[a] 63. Dat.

*

[b] 86. Dat.

Quoniam vero ad compoſitionem requiritur ut ad datam rectam CF applicetur rectangulum dato rectangulo CA, BF aequale deficiens quadrato, quod non ſemper fieri poteſt, quoties ſcilicet rectangulum CA, BF majus fuerit quadrato ex dimidio ipſius CF; ideo Problema non ſemper conſtrui poteſt. Fiet autem modo ſingulari quando rectangulum CA, BF aequale eſt quadrato ex dimidio ipſius CF, hoc eſt quando punctum applicationis cadit in medio rectae CF.

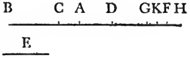
Invenietur autem in hoc caſu punctum D, et ratio rectanguli AD, E ad ipſum BDC, ſive ratio datae rectae E ad quaeſitam BF, ut ſequitur. Quoniam punctum D, ex hypotheſi, biſariam ſecat rectam CF, et, ex praemiſſis, debet rectangulum CA, BF aequale eſſe (rectangulo CDF, hoc eſt) quadrato ex CD, ablato communi rectangulo CAF, erit reliquum rectangulum BAC aequale reliquo, quadrato ſcilicet ex AD. Datum autem eſt BAC rectangulum, datum igitur eſt quadratum ex AD, et ipſa AD data; quare datum eſt punctum D, et propterea punctum F. Inveniatur igitur



inter BA, AC media proportionalis AD quae ponatur in BA producta ad partes A, et fiat DF aequalis ipſi DC, erit D punctum inveniendum, et ratio quaeſita eadem rationi rectae E ad ipſam BF. Eſt enim rectangulum BAC aequale quadrato ex AD, additoque communi rectangulo CAF, erit rectangulum CA, BF aequale (quadrato ex CD, hoc eſt) rectangulo CDF. Eſt igitur BF ad FD, ut DC ad CA, et convertendo, FB ad BD, ut CD ad DA. Eſt autem rectangulum AD, E ad ipſum AD, BF, hoc eſt ad rectangulum BDC, ut recta E ad ipſam BF.

Inquirendum autem eſt an punctum D faciat rationem rectanguli AD, E ad ipſum BDC majorem vel minorem ratione quam facit aliud quodvis punctum in BA producta ad partes A. Sit aliud quodvis punctum G; comparanda igitur eſt ratio rectanguli AD, E ad ipſum BDC, cum ratione rectanguli AG, E ad ipſum BGC, hoc eſt ratio rectae E ad ipſam
[c] 1. 6. BF, cum ratione rectanguli AG, E ad ipſum BGC. Et [c] com-

paranda est ratio rectanguli AG, E ad ipsum AG, BF, cum ratione ejusdem AG, E ad ipsum BGC. Igitur comparandum est rectangulum AG, BF cum ipso BGC. Si vero punctum G inciderit in ipsum F, vel fuerit in recta AF producta ultra F, patet rectangulum AG, BF minus esse ipso BGC. Si autem punctum G fuerit inter A et F, ex rectangulo CG, BF auferatur rectangulum AG, BF, et ex eodem rectangulum BGC, et comparandum erit reliquum rectangulum CA, BF cum reliquo CGF. Est autem CA, BF aequale quadrato ex CD quod majus [d] est rectangulo CGF. Rectangulum igitur CA, BF majus est ipso CGF, et hisce ex rectangulo CG, BF ablatis, erit reliquum AG, BF minus reliquo [d] 5. 2.



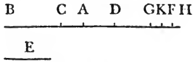
BGC, quod etiam in altero casu ostensum fuit. Igitur in quocunque casu rectangulum AG, E ad ipsum AG, BF, sive recta E ad ipsam BF, majorem habet rationem quam rectangulum AG, E ad ipsum BGC. Est autem rectangulum AD, E ad ipsum BDC, ut recta E ad ipsam BF; ratio igitur rectanguli AD, E ad ipsum BDC, major est ratione rectanguli AG, E ad ipsum BGC; et propterea punctum D facit maximam rationem rectanguli AD, E ad ipsum BDC.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora majores facere rationes quam puncta remotiora ad easdem puncti D partes.

Fiat enim, manentibus jam descriptis, ut AG ad GC, ita BG ad quartam BH. Erit igitur rectangulum AG, E ad ipsum BGC, hoc est ad ipsum AG, BH, ut recta E ad ipsam BH. Ostensa autem est ratio rectanguli AD, E ad ipsum BDC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BF, major ratione rect-

anguli AG, E ad ipsum BGC; quare ratio rectae E ad ipsam BF, major est ratione ipsius E ad rectam BH; recta igitur BF minor est ipsâ BH. Et quoniam est AG ad GC, ut BG ad BH, erit invertendo HB ad BG, ut CG ad GA, et convertendo BH ad HG, ut GC ad CA; rectangulum igitur CA, BH aequale est ipsi CGH.

Sit jam aliud quodvis punctum K in BA producta remotius a puncto D quam est punctum G, ad easdem autem ipsius D partes ad quas est G. Et comparanda est ratio rectanguli AG, E ad ipsum BGC, hoc est ratio rectae E ad ipsam BH, hoc est ratio rectanguli AK, E ad ipsum AK, BH, cum ratione rectanguli AK, E ad ipsum BKC. Comparandum igitur est rectangulum AK, BH cum ipso BKC; et utroque ablato ex rectanglo CK, BH, comparandum est reliquum rectangulum CA, BH cum reliquo CKH. Est autem CA, BH aequale ipsi CGH, quod propterea comparandum est cum ipso CKH. Inveniatur igitur utrum punctum G an K propius sit puncto quod bifariam secat ipsam CH. Ut hoc fiat inveniatur utrum punctum D an G puncto isto medio sit propius. Conferatur igitur rectangulum CDH cum ipso (CGH, hoc est cum ipso) CA, BH; et ablato utroque ex rectangulo CD, BH conferatur reliquum BDC cum reliquo rectangulo AD, BH. Est autem rectangulum BDC aequale ipsi AD, BF, ostensum * enim fuit esse FB ad BD, ut CD ad DA; comparandum igitur est rectangulum AD, BF cum ipso AD, BH. Ostensa autem est recta BF minor ipsa BH; igitur rectangulum AD, BF, hoc est ip-



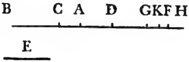
* ad notam hanc in pag. 87.

ſum BDC minus eſt rectangulo AD, BH, quorum utroque ablato ex rectangulo CD, BH, erit reliquum CDH majus (reliquo CA, BH, hoc eſt) rectangulo CGH. Eſt igitur Punctum D propius puncto medio ipſius CH quam punctum G. Puncta autem G, K ſunt ad eaſdem partes puncti D, et G propius ipſi D quam eſt punctum K; quare et G propius eſt puncto medio ipſius CH quam K. Rectangulum igitur CGH, hoc eſt ipſum CA, BH majus eſt ipſo CKH, et ablato utroque ex rectangulo CK, BH, erit reliquum AK, BH minus reliquo BKC. Igitur ratio rectanguli AK, E ad ipſum AK, BH, hoc eſt ratio rectae E ad ipſam BH, hoc eſt ratio rectanguli AG, E ad ipſum BGC, major eſt ratione rectanguli AK, E ad ipſum BKC. Puncta igitur propiora puncto D faciunt majores rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes puncti D.

Componetur vero Problema ita,

Sit E recta data, et inveniatur punctum D, ut in praemiſſis oſtenſum fuit, quod facit maximam rationem rectanguli AD, E ad ipſum BDC; et fiat DF aequalis ipſi DC. Si igitur ratio propoſita eadem fuerit rationi rectae E ad ipſam BF, punctum D, idque ſolum, efficiet Problema, ut prius oſtenſum. Si autem ratio propoſita non eadem fuerit rationi maximae, rectae E ad ipſam BF, erit haec ratione minor. Sit igitur ratio propoſita ea quam habet recta E ad ipſam BH, quae quoniam minor eſt ratione E ad BF, erit recta BF minor ipſa BH, et rectangulum AD, BF minus ipſo AD, BH. Oſtenſum autem fuit rectangulum CA, BF aequale rectangulo CDF, et ablatis hiſce ex rectangulo CD, BF, erit reliquum rectangu-

lum AD, BF aequale reliquo BDC, quod propterea minus erit ipſo AD, BH; et hiſce ex rectangulo CD, BH ablatis, erit reliquum CDH majus reliquo CA, BH. Eſt autem CDH minus quadrato ex dimidio ipſius CH, quia inaequales ſunt CD, DH; multo igitur rectangulum CA, BH minus eſt eodem
[e] 28. 6. quadrato. Igitur [e] ad rectam CH applicari poteſt rectangulum aequale ipſi CA, BH deficiens quadrato. Applicetur, ſitque G utrumlibet applicationis punctum; erit G punctum inveniendum. Quoniam enim CH major oſtenſa eſt quam CF, erit medium ipſius CH punctum ultra D medium ſcilicet punctum ipſius CF; et, ex conſtructione, rectangulum CGH aequale eſt ipſi CA, BH quod majus eſt rectangulo CAH; quare punctum G cadit propius medio puncto ipſius CH quam punctum A, et propterea G eſt in BA producta. Et quoniam rectangulum CGH aequale eſt ipſi CA, BH, ablatis hiſce ex rectangulo CG, BH, erit reliquum BGC rectangulum aequale reliquo AG, BH. Eſt autem rectangulum AG, E ad ipſum AG, BH, hoc eſt ad rectangulum BGC, ut recta E ad ipſam BH, hoc eſt in ratione data.



Ratio autem maxima, quam ſcilicet habet recta E ad ipſam BF, ita determinatur. Eſt BF aequalis ipſi BC, et rectae CD bis; hoc eſt ipſi BC, rectiſque CA, AD bis ſumptis, hoc eſt ipſis BA, AC ſimul, et rectae AD bis. Eſt autem AD ea quae poteſt rectangulum BAC, quia proportionales ſunt BA, AD, AC, quare AD bis eſt ea quae poteſt rectangulum BAC quater. Igitur ratio maxima, hoc eſt ratio rectae E ad ipſam

BF, ea eſt quam habet E ad utramque BA, AC una cum ea quae poteſt rectangulum BAC quater. Determinatio autem haec habetur in Prop. 20. Lib. 7. Pappi Alexandrini, et eſt Lemma in Libros Apollonii de Sectione Rationis et Spatii.

PROB. V.

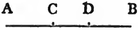
" DATIS in recta linea tribus punctis, quartum invenire " inter ipſa, viz. inter quodlibet ex extremis et punctum me- " dium, quod faciet rectangulum a ſegmentis inter ipſum et " duo ex punctis datis, ad quadratum ex ſegmento inter ip- " ſum et reliquum punctun datum, in ratione data."

PROP. LI. PROB. V. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D " invenire inter puncta C, B, quod faciet rectangulum ADC " a ſegmentis inter D et puncta A, C quae ſunt ad eaſdem " ipſius partes, ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et " reliquum punctum B, in ratione data."

CAS. 1. Quando ratio data eſt aequalis ad aequale.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC aequale quadrato ex DB. Eſt igitur AD ad DB, ut BD ad DC; et [a] AD ad DB, ut AB ad BC. Data autem eſt ratio AB ad BC, quare data eſt ratio AD ad DB. Et data eſt AB, igitur [b] datum eſt punctum D.



a 12. 5.

b 8. Dat.

Componetur ita,

Secetur AB in D ita ut AD ſit ad DB, ut AB ad BC; erit
[c] 19. 5. D punctum inveniendum. Nam erit [c] AD ad DB, ut DB ad DC. Igitur rectangulum ADC aequale eſt quadrato ex DB.

Cas. 2. Quando ratio data non eſt aequalis ad aequale.

Factum puta; habeat ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB rationem datam; rectangulo autem ADC aequale ſit rectangulum BDE, poſitâ DE ad partes puncti B. Quoniam igitur data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt ipſius BDE ad quadratum ex BD, data erit ratio rectae ED ad ipſam DB. Eſt autem, per Prop. 1. hujus, BD ad DE, ut rectangulum ABC ad ipſum AEC; horum igitur ratio data eſt. Et datum eſt rectangulum ABC, datum igitur eſt ipſum AEC; et data eſt



[d] 85. Dat. recta AC, quare datum eſt [d] punctum E, et recta EB data erit.
[e] 6. et 2. Dat. Data autem oſtenſa eſt ratio ED ad DB, datum igitur [e] eſt punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ea quam habet recta M ad ipſam N; et fiat ut N ad M, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita CB ad BF, nam ita erit rectangulum
[f] 29. 6. ABC ad ipſum ABF. Ad rectam vero AC applicetur [f] verſus partes puncti B rectangulum aequale ipſi ABF excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis, et ut FC ad CB, ita fiat EB ad BD, ſumatur autem punctum D in BE producta

verſus C; erit D punctum inveniendum. Primò autem oſtendendum eſt ipſum cadere inter puncta C, B. Quoniam eſt FC ad CB, ut EB ad BD, erit (componendo in caſu quo M major eſt N, et dividendo inverſe in caſu quo M minor eſt N) FB ad BC, ut ED ad DB; igitur rectangulum ABF, hoc eſt, ex conſtructione, rectangulum AEC eſt ad ipſum ABC, ut ED ad DB. Si igitur ratio data rectae M ad ipſam N ſit majoris ad minorem, erit rectangulum ABF majus ipſo ABC, ut ex praemiſſis patet, quare et DE major erit DB; unde et AE major erit AB, et rectangulum AEC majus rectangulo AB, EC. Ratio igitur rectanguli AEC ad ipſum ABC, major erit ratione rectanguli AB, EC ad idem ABC, hoc eſt ratione rectae EC ad ipſam CB. Oſtenſum autem fuit eſſe rectangulum AEC ad ipſum ABC, ut recta ED ad ipſam DB; ratio igitur ED ad DB, major eſt ratione EC ad CB; igitur recta ED minor eſt ipsâ EC, et cadet punctum D inter puncta C, B. Eadem vero demonſtratio inſervit caſui in quo ratio data M ad N eſt minoris ad majorem, legendo "minor" vice "major," et "minus" vice "majus," uſque ad "igitur recta ED minor eſt ipſa EC," &c. quae in utroque caſu legenda ſunt. Quoniam vero eſt ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipſum ABC, erit, per converſam Prop. 1. rectangulum ADC aequale ipſi BDE. Rectangulum autem ADC, hoc eſt ipſum BDE, eſt ad quadratum ex BD, ut recta ED ad ipſam DB, hoc eſt ut FB ad BC, hoc eſt ut recta M ad ipſam N, hoc eſt in ratione data.



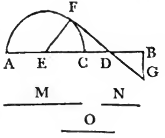
Manifeſtum autem eſt puncta ipſi B propiora majores facere rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora.

PROB. V. EPITAGMA I. ALITER.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D " invenire inter puncta C, B quod faciat rectangulum ADC " ad quadratum ex DB in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, centroque E, intervallo EC deſcribatur ſemicirculus AFC, et a puncto D ducatur recta DF ipſum contingens in F, occurratque FD in puncto G rectae BG quae ad rectos angulos
[a] 36. 3. ducta eſt ipſi AB. Eſt igitur[a] quadratum ex FD aequale rectangulo ADC, quare, ex hypotheſi, data eſt ratio quadrati ex FD ad quadratum ex DB, et propterea ratio rectae FD ad ipſam DB data[b] eſt. Junctâ autem EF, rectus[c] eſt angulus EFD, et rectus eſt DBG, quare aequiangula ſunt triangula DFE, DBG. Ut igitur FD ad DB, ita eſt EF ad BG; data propterea eſt ratio EF ad BG, et data eſt recta EF, magnitudine igitur data eſt BG, ſed et poſitione, datumque eſt punctum B, quare datum eſt punctum G, et recta GF poſitione data erit[d]. Sed et recta AB poſitione data eſt; datum igitur eſt punctum D.

[b] 59. Dat.
[c] 18. 3.
[d] 94. Dat.



Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet data recta M ad datam N, et

inter M et N media proportionalis inveniatur O; bifariamque sectâ AC in E, fiat ut M ad O, ita EC ad quartam BG, quae ponatur a puncto B ad rectos angulos ipsi AB. A puncto vero G ducatur recta GF contingens circulum super diametrum AC descriptum in puncto F, ad contrarias scilicet partes rectae AB ad quas est G; occurratque GF ipsi AB in D; erit D punctum inveniendum. Patet enim illud esse inter C, B puncta, et junctâ EF, propter aequiangula triangula, est quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, sive EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta M ad quadratum ex ipsa O, hoc est [e] ut recta M ad rectam N, hoc est in ratione data. [e] 2. cor. 20. 6.

Hanc solutionem dedit Rogerius Ventemiglia in pag. 256. Analyseos Geometricae Hugonis de Omerique, quae Gadibus impressa est anno 1698. et multo melior est eâ quam dedit Alexander Andersonus in Cas. 1. Prob. 9. supplementi sui Apollonii redivivi.

PROP. LII. PROB. V. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
" invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum ADC
" a segmentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad qua-
" dratum ex segmento DB inter ipsum et punctum medium
" B, in ratione data."

CAS. 1. Quando ratio data est aequalis ad aequale.

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC aequale quadrato ex DB, et ipsi BD aequalis fiat DE. Quoniam igitur est

AD ad DB, ut DB, sive DE ad DC, dividendo, erit AB ad BD, ut EC ad CD; et permutando, ut AB ad CE, ita BD ad DC; quare et AB ad CE, est ut BD bis, hoc est BE ad DC bis; ut igi-



a 12. 5. tur [a] AB ad CE, ita est AE ad ED una cum DC, hoc est ad BC. Rectangulum igitur AEC aequale est dato rectangulo ABC. Et data est recta AC, et punctum E est in AC producta, quia AD major est DB, et propterea BD, sive DE major est ipsâ DC;
b 85. Dat. datum igitur [b] est punctum E, quare et punctum D.

Componetur ita,

c 29. 6. Ad datam rectam AC applicetur [c] rectangulum aequale dato rectangulo ABC excedens quadrato, sitque E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes puncti C, et bifariam secetur BE in D; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum AEC aequale est ipsi ABC, ut EA ad AB, ita est BC ad CE; major autem est EA ipsâ AB, quare BC major est CE; est igitur BC major dimidio ipsius BE, hoc est ipsâ BD, quare punctum D cadit inter puncta B, C. Et quoniam est AB ad CE, ut AE ad CB, hoc
d 19. 5. est ad DE una cum DC, erit [d] AB ad CE, ut (BE ad DC bis, hoc est ut) BD ad DC; et permutando, componendoque, est AD ad DB, ut ED, hoc est BD ad DC. Igitur rectangulum ADC aequale est quadrato ex BD.

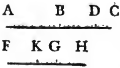
CAS. 2. Quando aequales sunt AB, BC.

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex BD in ratione data. Igitur, componendo, quadratum

ex AB erit [a] ad quadratum ex BD in ratione data. Datum autem eſt quadratum ex AB, quare et quadratum ex BD, et ipſa BD data erit; datum igitur eſt punctum D. [a] 7. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex BD ea quam habet recta FG ad ipſam GH, et inter FH et HG media proportionalis inveniatur HK, ut vero FH ad HK, ita fiat AB ad BD; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim FH major eſt HK, erit AB, hoc eſt BC major BD; quare cadet punctum D inter B, C. Et quoniam eſt AB ad BD, ut FH ad HK, erit [b] quadratum ex AB ad quadratum ex BD, ut (quadratum ex FH ad illud ex HK, hoc eſt [d] ut) recta FH ad ipſam HG. Igitur, dividendo, eſt rectangulum ADC ad quadratum ex BD, ut FG ad GH, hoc eſt in ratione data.



[b] 22. 6.

[d] cor. 2. 20. 6.

Si vero in hoc caſu ratio data fuerit aequalis ad aequale, erit FH dupla ipſius HG, quare et quadratum ex AB duplum erit quadrati ex BD. Unde BD erit latus quadrati cujus diameter eſt AB.

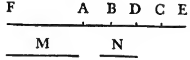
Cas. 3. Quando ratio data non eſt aequalis ad aequale, et inaequales ſunt AB, BC.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Et ipſi ADC aequale ſit rectangulum BDE, poſitâ rectâ DE in AD producta ad partes C. Quoniam igitur data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt ipſius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipſam DB.

Eſt autem, per Prop. 8. ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipſum ABC; horum igitur ratio data eſt; et datum eſt ABC, quare et rectangulum AEC. Et quoniam rectangulum ADC aequale eſt ipſi BDE, et eſt AD major BD, erit DE major DC; punctum igitur E eſt in AC producta. Quoniam vero datum
[a] 85. Dat. eſt rectangulum AEC, datum erit [a] punctum E, quare data eſt recta EB; et data oſtenſa eſt ratio rectae ED ad ipſam
[b] 8. Dat. DB, punctum igitur [b] D datum eſt.

Componetur vero ita,

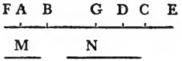
Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet recta M ad rectam N. Et fiat ut N ad M, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita CB ad BF, nam ita erit rectangulum
[a] 29. 6. ABC ad ipſum ABF. Ad rectam vero AC applicetur [a], verſus partes C, rectangulum aequale ipſi ABF excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis; ut vero FC ad CB, ita fiat EB ad BD, ſumatur



autem punctum D in AB producta verſus C; erit D punctum inveniendum. Primò autem oſtendendum eſt ipſum cadere inter puncta B, C. Quoniam eſt FC ad CB, ut EB ad BD, erit FB ad BC, ut ED ad DB; igitur rectangulum ABF, hoc eſt, ex conſtructione, rectangulum AEC eſt ad ipſum ABC, ut ED ad DB. Eſt autem AE major AB, quare rectangulum AEC majus eſt ipſo AB, EC; ratio igitur rectanguli AEC ad ipſum ABC, hoc eſt ratio rectae ED ad ipſam DB, major eſt ratione rectanguli AB, EC ad idem ABC, hoc eſt ratione rectae EC ad ipſam CB. Quoniam igitur ratio ED ad DB, major

eſt ratione EC ad CB, erit punctum D propius puncto B quam eſt punctum C. Cadit igitur punctum D inter puncta B, C. Quoniam vero eſt ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipſum ABC, erit per converſam Prop. 8. rectangulum ADC aequale ipſi BDE. Eſt autem rectangulum ADC, hoc eſt BDE, ad quadratum ex DB, ut ED ad DB, hoc eſt ut FB ad BC, hoc eſt in ratione data.

Puncta autem ipſi B propiora majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora. Sit enim punctum G propius ipſi B quam punctum D. Eſt igitur ratio CG ad GA, major ratione CD ad DA, quare et ratio rectanguli AGC ad quadratum ex AG, major eſt rectanguli ADC ad quadratum ex DA. Eſt autem ratio quadrati ex AG ad quadratum ex GB, major ratione quadrati ex AD ad quadratum ex DB, quia ratio rectae AG ad ipſam GB, major eſt ratione AD ad DB. Igitur ex aequali ratio rectanguli AGC ad quadratum ex GB, major eſt ratione rectanguli ADC ad quadratum ex DB.

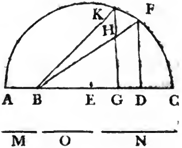


Cor. Hinc ſi rectangulum ADC aequale fuerit quadrato ex DB, puncta quaevis inter B et D faciunt rectangulum majus quadrato; puncta autem inter D et C faciunt rectangulum minus quadrato.

PROB. V. EPITAGMA 2. ALITER.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
" invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum ADC
" ad quadratum ex DB in ratione data."

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, centroque E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur ad rectos angulos ipsi AC recta DF, et BF jungatur. Est igitur quadratum ex DF aequale rectangulo ADC, quare, ex hypothesi, data est ratio quadrati ex FD ad quadratum ex DB, et propterea



a 59. Dat. data [a] est ratio rectae FD ad ipsam DB; datus autem est angulus BDF; triangulum igitur
b 44. Dat. BDF specie datum [b] est, datus propterea est angulus DBF; et datum est punctum B, recta
c 32. Dat. igitur BF positione data [c] est;
d 28. Dat. et positione data est circumferentia AFC, datum [d] igitur est punctum F, et propterea recta FD positione data [e] est; et data
e 33. Dat. est AC positione, datum [e] igitur est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet data recta M ad datam N, et inter M et N media proportionalis inveniatur O. Sumatur autem quodvis punctum G inter B et C, et fiat ut recta O ad

M, ita BG ad quartam GH, quae ponatur ad rectos angulos ipſi AC, et juncta BH occurrat circumferentiae ſuper diametrum AC deſcriptae in F, ad eas ſcilicet partes rectae AC ad quas eſt H; ad AC vero ducatur perpendicularis FD, erit D punctum inveniendum. Patet enim D eſſe inter puncta B, C; et quia aequiangula ſunt triangula BDF, BGH, eſt quadratum ex FD, hoc eſt rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex HG ad quadratum ex GB, hoc eſt ut quadratum ex recta M ad quadratum ex recta O, hoc eſt [f] ut recta M ad ipſam N, hoc eſt in ratione data. [f] 2. cor. 20. 6.

Hanc conſtructionem dedit Alexander Anderſonus in Caſ. 1. Prob. 9. pag. 22. ſupplementi Apollonii redivivi.

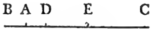
Puncta autem ipſi B propiora majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora. Sit enim punctum G propius ipſi B quam punctum D, et ad rectos angulos ipſi AC ducatur GH, occurratque rectae BF in H, et circumferentiae AFC in K. Ratio igitur rectanguli AGC, hoc eſt quadrati ex GK ad quadratum ex GB, major eſt ratione (quadrati ex GH ad quadratum ex GB, hoc eſt ratione quadrati ex DF, ſive) rectanguli ADC ad quadratum ex DB.

PROP. LIII. PROB. V. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D " invenire inter punctum medium A et utrumlibet ex extre- " mis C, quod faciet rectangulum ADC a ſegmentis inter D " et puncta A, C ad quadratum ex ſegmento DB inter D et " reliquum extremum B, in ratione data."

Cas. 1. Quando ratio data eſt aequalis ad aequale.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC aequale quadrato ex BD, et ipſi BD aequalis fiat DE. Quoniam igitur eſt CD ad DB, hoc eſt ad DE, ut BD ad DA, erit, dividendo, CE ad ED, ut BA ad AD; permutandoque, CE ad AB, ut ED ad DA; quare et CE ad AB, ut ED

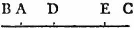


a 12. 5. bis, hoc eſt BE ad AD bis; et [a] CE ad AB, ut BC ad AD una cum BD, hoc eſt ad AE. Rectangulum igitur AEC aequale eſt dato rectangulo CBA. Et data eſt recta AC, et eſt punctum E inter A, C quia CD major eſt DB, hoc
b 86. Dat. eſt ipsâ DE, eſt enim BD major DA. Datum igitur [b] eſt punctum E, et propterea punctum D.

Ut vero constructio fieri poſſit, neceſſe eſt rectangulum
c 5. 2. CBA non majus [c] ſit quadrato ex dimidio ipſius AC. Si vero ſpatia haec inter ſe aequalia fuerint, bifariam ſecetur AC in E, et rurſus bifariam ſecetur BE in D, punctumque D efficiet
d 6. 2. Problema. Eſt [d] enim quadratum ex BE aequale rectangulo CBA una cum quadrato ex AE, hoc eſt, ex hypotheſi, quadrato ex AE bis. Dimidium igitur quadrati ex BE, hoc eſt quadratum ex BD bis, aequale eſt quadrato ex AE, quorum quadratum ex BD aequale eſt quadrato ex DE; reliquum igitur quadratum ex BD aequale eſt reliquo, rectangulo ſcilicet ADC.

Si vero rectangulum CBA minus fuerit quadrato ex dimi-
e 28. 6. dio ipſius AC, applicetur [e] ad rectam AC rectangulum aequale ipſi CBA, deficiens quadrato, ſitque E punctum applicationis utrumlibet, et bifariam ſecetur BE in D; erit D punc-

tum inveniendum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum AEC aequale est rectangulo CBA, erit BC ad CE, ut EA ad AB; est autem BC major CE, quare EA major est AB, et propterea EA major est dimidio ipsius EB, hoc est ipsâ ED; cadit igitur punctum D inter puncta A, C. Et quoniam est CE ad AB, ut CB ad EA,



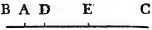
hoc est ad BD una cum DA, erit [f] CE ad AB, ut (BE ad AD [f] cor. 19. 5.
bis, hoc est ut) ED ad DA; et permutando, componendoque, est CD ad DE, ut BD ad DA. Rectangulum igitur ADC est aequale ipsi BDE, hoc est quadrato ex DB.

Cas. 2. Quando, bifariam sectâ AC in E, ratio data eadem est rationi quadrati ex AE ad quadratum ex EB.

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB. Erit igitur invertendo, ut quadratum ex BE ad quadratum ex EA, ita quadratum ex DB ad rectangulum ADC; quare [a] erit re- [a] 19. 5.
liquum, excessus scilicet quadrati ex BE supra quadratum ex DB, ad reliquum [b] quadratum ex DE, ut totum, quadratum [b] 5. 2.
scilicet ex BE ad totum quadratum ex AE; igitur componendo, ut excessus quadratorum ex BE, ED supra quadratum ex DB, hoc est [c] ut duplum rectangulum BE, ED ad quadra- [c] 7. 2.
tum ex DE, hoc est ut recta BE bis ad rectam DE, ita quadrata BE, EA ad quadratum ex AE. Horum autem ratio data est, quia data sunt B, A, E puncta; data igitur est ratio rectae BE bis ad rectam ED; et data est BE, igitur data est ED, et datum erit punctum D.

Componetur ita.

Fiat ut quadrata ex BE, EA ſimul ad quadratum ex AE, ita recta BE bis ad quartam ED quae ponatur a puncto E verſus A; erit D punctum inveniendum. Primò autem oſtendendum eſt ED minorem eſſe EA, hoc eſt punctum D eſſe inter E, A puncta. Ex proportione praecedente, et dividendo, eſt quadratum ex BE ad quadratum ex EA, ita (recta BD bis una cum DE ad ipſam DE, et ita) eſt duplum rectangulum BDE una cum quadrato ex DE ad quadratum ex DE. Qua-
[d] 4. 2. dratum autem ex BE majus [d] eſt duplo rectangulo BDE una
[e] 14. 5. cum quadrato ex DE, ergo [e] quadratum ex AE majus eſt quadrato ex ED. Et recta AE major ipſa ED; cadit igitur punctum D inter A et C. Et quoniam, ex conſtructione, ut quadrata ex BE,



AE ſimul ad quadratum ex AE, ita (recta BE bis ad ipſam ED, hoc eſt ita duplum rectangulum BED ad quadratum ex
[c] 7. 2. ED, hoc eſt [c] ita) exceſſus quadratorum ex BE, ED ſupra quadratum ex BD ad quadratum ex DE, dividendo, erit quadratum ex BE ad quadratum ex EA, ut exceſſus quadrati ex
[a] 19. 5. BE ſupra quadratum ex BD ad quadratum ex DE; quare [a] ut reliquum, quadratum ſcilicet ex BD ad reliquum rectangulum ADC, ita eſt quadratum ex BE ad quadratum ex EA; et invertendo, ut rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ita eſt quadratum ex AE ad quadratum ex EB.

CAS. 3. Quando ratio data eſt quaevis alia quam in duobus praecedentibus caſibus.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Rectangulo ADC aequale ſit rectangulum BDE, poſitâ DE verſus partes puncti C. Quoniam igitur data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt ipſius BDE, ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipſam DB. Eſt autem, per Prop. 8. BD ad DE, ut rectangulum CBA ad ipſum AEC, horum igitur ratio data eſt; et datum eſt rectangulum CBA, quare et AEC datum eſt. Et quoniam rectangulum BDE aequale eſt ipſi ADC, eſt autem BD major AD, erit CD major DE. Punctum igitur E cadit inter A, C puncta. Et quoniam datum eſt rectangulum AEC, et data eſt recta AC, datum [a] erit punctum E, quare data eſt recta BE. Et data oſtenſa eſt ratio BD ad DE, datum [b] igitur eſt punctum D. [a] 86. Dat. [b] 8. Dat.

Quoniam vero ad compoſitionem, qua inveniendum eſt punctum E, requiritur ut ad datam rectam AC applicetur rectangulum AEC dato rectangulo aequale, eì ſcilicet ad quod rectangulum CBA datam habet rationem BD ad DE, deficiens quadrato, Problema non ſemper conſtrui poteſt, quoties ſcilicet rectangulum datum, cui aequale applicandum eſt rectae AC, majus fuerit quadrato ex dimidio ipſius AC [c]. Fiet autem modo ſingulari, ſi rectangulum hoc aequale fuerit quadrato ex dimidio rectae AC, hoc eſt ſi punctum applicationis E inciderit in medium rectae AC. [c] 27. 6.

Ita autem invenietur punctum D, et ratio rectanguli ADC ad quadratum ex DB in hoc caſu. Bifariam ſecetur AC in E, et puta D eſſe punctum inveniendum quod ſcilicet facit rectangulum BDE aequale ipſi ADC; addito igitur communi

[d] 3, et 5. 2. quadrato ex DE, erit rectangulum BED aequale[d] dato quadrato ex AE, datum propterea eſt rectangulum EDB, et data eſt recta BE; data igitur eſt ED, datumque erit punctum D.

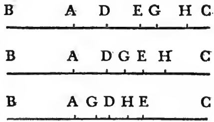
Componetur hoc ita,

Bifariam ſecetur AC in E, et ipſis BE, EA tertia proportionalis inveniatur ED, quae ponatur a puncto E verſus B. Et quoniam BE major eſt AE, erit AE major ED, et cadet punctum D inter A, C puncta. Eſt autem rectangulum BED aequale quadrato ex AE, et ablato communi quadrato ex DE, reliquum rectangulum BDE aequale eſt reliquo rectangulo ADC. Et quoniam proportionales
[e] 2. cor. 20. 6. ſunt BE, EA, ED, erit[e] BE ad ED, ut quadratum ex BE ad quadratum ex EA, et dividendo, ut BD ad DE, ita eſt rectangulum CBA ad quadratum ex AE, invertendoque, erit ut ED ad DB, hoc eſt ut rectangulum BDE, ſive ADC ad quadratum ex DB, ita quadratum ex AE ſive rectangulum AEC ad rectangulum CBA. Data igitur eſt ratio rectanguli ADC ad quadratum ex DB, eadem ſcilicet rationi quadrati ex dimidio ipſius AC ad rectangulum CBA, hoc eſt eadem rationi quadrati ex AC ad quadruplum rectanguli CBA.



Inquirendum autem eſt an punctum D majorem facit rationem an minorem rectanguli ad quadratum, quovis alio puncto in ipſa AC. Manentibus igitur jam deſcriptis, ſumatur inter A et C aliud quodvis punctum G, et rectangulo AGC aequale fiat BGH; eſt igitur BG ad AG, ut GC ad GH; major autem eſt BG ipsâ AG, quare GC major eſt GH; cadit igitur punctum H inter puncta G, C. Non autem incidet H in punctum E, quod patet ſi fuerit G inter E et C, neque

cadet in E si G fuerit inter A et E, etenim esset rectangulum BGE, hoc est ipsum BGH aequale rectangulo AGC, et, addito communi quadrato ex GE, esset rectangulum BEG aequale quadrato ex AE, hoc est rectangulo BED, et punctum G coincideret puncto D, contra hypothesin. Quoniam vero aequales sunt AE, EC, rectangulum AEC majus [f] est ipso AHC, igitur ratio rectanguli AEC ad ipsum CBA major est ratione rectanguli AHC ad idem CBA. Ostensum autem fuit esse ED ad DB, ut



f 5. 2.

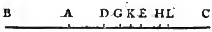
rectangulum AEC ad ipsum CBA; et similiter quoniam rectangulum AGC aequale est ipsi HGB, erit, per Prop. 8. ut HG †
ad GB, ita rectangulum AHC ad ipsum CBA; quare ratio rectae ED ad rectam DB, major est ratione rectae HG ad ipsam GB, et propterea ratio rectanguli BDE, hoc est rectanguli ADC ad quadratum ex DB, major est ratione rectanguli BGH, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB. Punctum igitur D facit maximam rationem rectanguli ad quadratum.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora majores facere rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti D.

Manentibus jam descriptis, sit in recta AC punctum K remotius a puncto D quam est punctum G, sint autem puncta K, G ad easdem partes ipsius D. Rectangulo AKC aequale fiat rectangulum BKL. Erit igitur punctum L inter puncta K, C, quod eodem modo ostendetur quo punctum H osten-

sum fuit esse inter puncta G, C. Et primò, sit punctum G inter punctum D, quod facit maximam rationem, et punctum C; et in hoc casu erit punctum H inter punctum E quod bifariam secat rectam AC, et punctum C; quod quidem manifestum est si fuerit G in E, vel inter E, C puncta, quia rectangulum AGC aequale est ipsi BGH. At si G fuerit inter puncta





D, E, quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, erit, per partem 1. Prop. 27. rectangulum BGE minus ipso AGC, hoc est rectangulo BGH, quare recta GE minor est ipsâ GH, et punctum H erit inter E et C. Si igitur punctum K inciderit in ipsum H, vel fuerit inter H et C, patet punctum L quod est inter K et C remotius esse a puncto E quam punctum H. Si vero punctum K fuerit inter puncta G, H, quoniam rectangulum BGH aequale est ipsi AGC, erit, per partem primam Prop. 27. rectangulum BKH minus ipso AKC, hoc est rectangulo BKL; quare recta KH minor est ipsâ KL, et punctum L remotius erit a puncto E quam punctum H. Secundo, sit punctum G inter punctum D et ipsum A; et quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, erit, per partem 2. Prop. 27. rectangulum BGE majus



ipso AGC, hoc est rectangulo BGH, quare recta GE major est rectâ GH, et punctum H erit inter puncta G, E. Et quoniam punctum K est inter A, G puncta, est enim remotius a

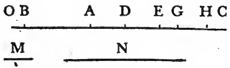
puncto D quam ipsum G, et ad easdem partes ipsius D, et quoniam rectangulum BGH aequale est ipsi AGC, erit, per partem 2. Prop. 27. rectangulum BKH majus ipso AKC, hoc est rectangulo BKL; recta igitur KH major est ipsâ KL, et punctum L remotius erit a puncto E quam punctum H; quod etiam in casu primo ostensum fuit. In utroque igitur casu rectangulum AHC majus [e] est ipso ALC. Ergo ratio rectanguli AHC ad ipsum CBA, major est ratione rectanguli ALC ad idem CBA. Ostensum autem fuit † rectangulum AHC esse ad ipsum CBA, ut recta HG ad ipsam GB; et quoniam rectangulum AKC aequale est ipsi BKL, similiter prorsus ostendetur rectangulum ALC esse ad ipsum CBA, ut recta LK ad ipsam KB. Est igitur ratio rectae HG ad rectam GB, major ratione rectae LK ad ipsam KB; quare et ratio rectanguli BGH, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB, major est ratione rectanguli BKL, hoc est rectanguli AKC ad quadratum ex KB. Puncta igitur propiora ipsi D ad utrasvis ipsius partes faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora ad easdem partes.

[e] 5. 2.

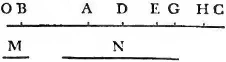
† Vide hanc notam in pag. 109.

Componetur vero Problema ita,

Sint B,A,C tria puncta data in recta linea, sitque ratio quam habere debet rectangulum a segmentis inter punctum inveniendum et puncta A, C ad quadratum ex segmento inter ipsum et reliquum punctum B, ea quam habet recta M ad rectam N. Et inve-



niatur, ut in praemissis ostensum, punctum D quod facit maximam rationem rectanguli ad quadratum, hoc est rationem eandem quam habet quadratum ex AE dimidio ipsius AC ad rectangulum CBA. Si igitur ratio M ad N eadem fuerit huic rationi, punctum D, idque solum, efficiet Problema, quia punctum aliud quodvis inter A et C facit minorem rationem rectanguli ad quadratum. Si vero ratio M ad N major fuerit ratione hac maxima, Problema construi non potest. Quod si proponatur ratio M ad N minor ratione quadrati ex AE ad rectangulum CBA, fiat ut N ad M, ita rectangulum CBA ad aliud, quod inveniatur faciendo ut N ad M, ita AB ad rectam BO, nam ita erit rectangulum CBA ad ipsum CBO. Et quoniam, ex hypothesi, ratio M ad N, hoc est ratio rectanguli CBO ad ipsam CBA minor est ratione quadrati ex AE ad idem rectangulum CBA, erit rectangulum CBO minus quadrato ex AE.



[g] 28. 6. Igitur ad rectam AC applicari potest [g] rectangulum aequale ipsi CBO deficiens quadrato; applicetur, et sit H utrumlibet ex applicationum punctis. Fiat autem ut AO ad OB, ita BH ad HG, sumpto G inter puncta B et H; erit G punctum inveniendum. Est enim, ex constructione, rectangulum AHC aequale ipsi CBO, et AO ad OB, ut BH ad HG; quare est AB ad BO, ut BG ad GH, et propterea rectangulum CBA est ad ipsum CBO, hoc est ad rectangulum AHC, ut BG ad GH. Est autem BC major HC, quare rectangulum AH, BC majus est ipso AHC; ratio igitur rectanguli CBA ad ipsum AHC,

hoc est ratio rectae BG ad rectam GH, major est ratione (ejusdem CBA ad ipsum AH, BC, hoc est ratione) BA ad AH; igitur BG major est BA, et punctum G cadit propterea inter A, C puncta. Quoniam vero rectangulum CBA est ad ipsum AHC, ut BG ad GH, ut prius ostensum; erit, per conversam Prop. 8. rectangulum BGH aequale rectangulo AGC. Est autem rectangulum AGC, hoc est ipsum BGH ad quadratum ex GB, ut recta HG ad rectam GB, hoc est ut OB ad BA, hoc est ut recta M ad rectam N, hoc est in ratione data. Et similiter invenietur alterum punctum quod solvet Problema, ope reliqui puncti applicationis.

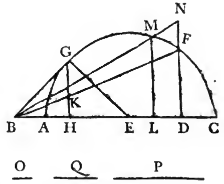
PROB. V. EPITAGMA 3. ALITER.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
" invenire inter punctum medium A et utrumlibet ex extre-
" mis C, quod faciet rectangulum ADC ad quadratum ex DB,
" in ratione data."

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, centroque E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ipsi AC ad rectos angulos ducatur DF quae circumferentiae occurrat in F, et jungatur BF. Est igitur quadratum ex DF aequale rectangulo ADC, quare, ex hypothesi, data est ratio quadrati ex DF ad quadratum ex DB, quare data [a] est ratio rectae DF ad ipsam DB; et datus est [a] 59. Dat.

[b] 44. Dat. angulus BDF, igitur [b] triangulum BDF ſpecie datum eſt, da-
[c] 32. Dat. tuſque erit angulus DBF; et datum eſt punctum B, quare [c] recta BF poſitione data eſt; et poſitione data eſt circumferen-
[d] 28. Dat. tia AFC, datum igitur [d] eſt punctum F, et recta FD poſitione [e];
[e] 33. Dat. et propterea datum [d] eſt punctum D.

Quoniam vero ad compoſitionem requiritur ut recta BF, quae poſitione data oſtenſa eſt, occurrat circumferentiae poſitione datae AFC, quod non ſemper fieri poteſt, ideo Problema in omni caſu non conſtrui poteſt. Fiet autem modo ſingulari ſi recta ea circumferentiam AFC contigerit. Punctum vero, et ratio rectanguli ad quadratum in hoc caſu invenientur ducendo rectam BG circulum in G contingentem, et a puncto G ducendo ad AC perpendicularem GH; erit enim H punctum inveniendum, et, junctâ EG, ratio rectanguli AHC, hoc eſt quadrati ex GH ad quadratum ex HB,



[f] 8, et 22. 6. eadem erit [f] rationi quadrati ex EG ad quadratum ex GB, hoc eſt rationi quadrati ex EA dimidio ipſius AC ad rectan-
[g] 36. 3. gulum [g] CBA.

Inquirendum autem eſt an punctum H facit majorem vel minorem rationem rectanguli ad quadratum quovis alio puncto in recta AC. Manentibus igitur deſcriptis, ſumatur

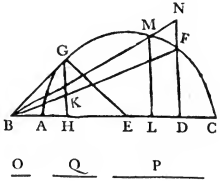
inter A et C aliud quodvis punctum D, et ducatur DF ad rectos angulos ipsi AC, occurratque circumferentiae in F, jungatur BF quae occurrat ipsi GH in K. Ratio igitur quadrati ex GH, hoc est rectanguli AHC, ad quadratum ex HB, major est ratione (quadrati ex KH ad idem ex HB quadratum, hoc est ratione quadrati ex FD, hoc est) rectanguli ADC ad quadratum ex DB. Quare punctum H facit maximam rationem rectanguli ad quadratum.

Puncta autem ipsi H propiora faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti H. Sit enim punctum L propius puncto H quam punctum D, et ad easdem partes ipsius H, et ducatur LM ad rectos angulos ipsi AC, occurratque circumferentiae in M, et juncta BM occurrat DF productae in N. Igitur ratio rectanguli ALC, hoc est quadrati ex ML ad quadratum ex LB, (hoc est ratio quadrati ex ND ad quadratum ex DB,) major est ratione quadrati ex FD ad quadratum ex DB, hoc est ratione rectanguli ADC ad quadratum ex DB. Puncta igitur ipsi H propiora ad utrasvis ipsius partes faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum, quam puncta remotiora ad easdem partes.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta O ad rectam P, et inter O et P media proportionalis inveniatur Q. Bifariam secetur AC in E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus, quem contingat recta ducta a puncto B in G, et ad AC ducatur perpendicularis GH. Si igitur ratio data O ad P, hoc est[h] ratio quadrati ex O ad quadratum ex Q eadem fuerit rationi [h] 2. cor. 20. 6.

quadrati ex EC ad rectangulum CBA, punctum H, idque solum, efficiet Problema, quia punctum quodvis aliud in recta AC minorem facit rationem rectanguli ad quadratum. Si autem ratio data O ad P non fuerit eadem rationi maximae, quadrati scilicet ex EC ad rectangulum CBA, erit hâc ratione minor. Sit igitur ratio O ad P minor ratione quadrati ex EC, hoc est ex EC ad rectangulum CBA, hoc est ad quadratum ex GB; erit igitur ratio quadrati ex O ad quadratum ex Q, minor ratione quadrati ex GH ad quadratum ex HB, et propterea ratio rectae O ad rectam Q, minor erit ratione GH ad HB. Fiat ut O ad Q, ita KH ad HB, et KH minor erit GH; quare juncta BK necessario circumferentiae occurret in duobus punctis. Sit F eorum utrumlibet, et ad AC ducatur perpendicularis FD; erit D punctum inveniendum. Est enim quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex KH ad quadratum ex HB, hoc est ut quadratum ex recta O ad quadratum ex recta Q, hoc est ut recta O ad rectam P, hoc est in ratione data.



Constructionem hanc dedit Hugo de Omerique in pag. 260. Analyseos suae Geometricae

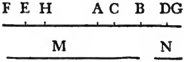
PROB. VI.

" DATIS in recta linea tribus punctis quartum invenire ex-
" tra ipſa ad utraſvis partes quod faciet rectangulum a ſeg-
" mentis inter ipſum et duo ex punctis datis ad quadratum
" ex ſegmento inter ipſum et reliquum punctum datum, in
" ratione data."

PROP. LIV. PROB. VI. EPITAGMA I.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D
" invenire extra puncta data ad partes B quod faciet rectan-
" gulum ADC a ſegmentis inter ipſum et duo puncta A, C
" ab ipſo remotiora ad quadratum ex DB ſegmento inter ip-
" ſum et reliquum punctum B, in ratione data, quae, ut
" patet, debet eſſe majoris ad minorem."

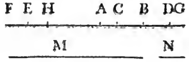
Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Rectangulo ADC aequale ſit rectangulum BDE, poſitâ DE ad eaſdem partes ad quas eſt DB; erit autem punctum E in BA producta ad partes ipſius A. Et quoniam data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt ipſius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipſam DB. Eſt autem per Prop. 14. ED ad DB, ut rectangulum CEA ad ipſum ABC; horum igitur ratio data eſt, et datum eſt rectangulum ABC, quare et CEA; dataque eſt recta AC, et eſt punctum E in CA



[a] 85. Dat. producta, igitur [a] datum est punctum E, et data erit recta
[b] 6. Dat. EB. Data autem est ratio ED ad DB, datum igitur [b] est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ea quam habet recta M ad rectam N, et fiat ut recta N ad ipsam M, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita CB ad BF, nam ita erit rectangulum ABC ad ipsum ABF. Ad rectam vero AC
[c] 85. Dat. applicetur [c], versus partes puncti A, rectangulum aequale ipsi ABF excedens quadrato, sitque E punctum applicationis; et ut FC ad CB, ita fiet EB ad BD; erit D punctum inveniendum. Erit enim FB ad BC, ut ED ad DB; igitur rectangulum ABF, hoc est ipsum



CEA est ad rectangulum ABC, ut ED ad DB; et per conversam Prop. 14. erit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Rectangulum autem ADC, hoc est EDB est ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipsam DB, hoc est ut FB ad BC, hoc est ut recta M ad rectam N, hoc est in ratione data.

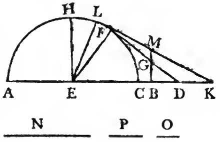
Puncta autem ipsi B propiora faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora. Sit enim punctum D propius ipsi B quam punctum G; et rectangulo ADC aequale fiat BDE, rectangulo autem AGC rectangulum BGH. Erit igitur per Prop. 33. rectangulum EGB majus ipso AGC, hoc est ipso BGH; quare recta EG major est ipsa GH, et punctum H erit inter puncta E, A. Rectangulum igitur CEA majus est ipso CHA, et propterea CEA majorem

habet rationem ad rectangulum ABC quam habet rectangulum CHA ad idem ABC. Ut autem ED ad DB, ita, per Prop. 14. est rectangulum CEA ad ipsum ABC; et, per eandem, ut HG ad GB, ita est rectangulum CHA ad ipsum ABC. Igitur ratio ED ad DB, major est ratione HG ad GB, quare ratio rectanguli EDB, hoc est ipsius ADC ad quadratum ex DB, major est ratione rectanguli HGB, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB.

PROB. VI. EPITAGMA 1. ALITER.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D
" invenire extra puncta data quod faciet rectangulum ADC
" ad quadratum ex DB, in ratione data, majoris scilicet ad
" minorem."

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur recta DF ipsum contingens in F, occurratque DF in puncto G rectae BG quae ad angulos rectos ducta est ipsi AB. Est igitur qua-



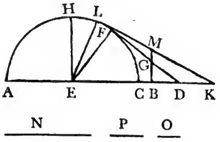
dratum ex FD aequale [a] rectangulo ADC, quare data est ratio quadrati ex FD ad quadratum ex DB, et propterea [b] data est

[a] 36. 3.
[b] 59. Dat.

ratio rectae FD ad ipsam DB. Junctâ autem EF rectus erit angulus EFD, quare aequiangula sunt triangula EFD, GBD; ut igitur FD ad DB, ita est EF ad BG, quare data est ratio EF ad BG, et data est EF, ideoque et BG magnitudine; sed et positione, datumque est punctum B, datum igitur est punc-
[c] 94. Dat. tum G; quare [c] recta GF positione data est, sed et AB data est positione; datum propterea est punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB ea quam habet recta N ad ipsam O, et inter N et O media proportionalis inveniatur P; bifariamque sectâ AC in E, fiat ut N ad P, ita EC ad quartam BG quae ponatur a puncto B ad rectos angulos ipsi AB. A puncto vero G ducatur recta GF contingens circulum super diametrum AC descriptum in puncto F ad easdem scilicet partes rectae AB ad quas est punctum G,



ducatur autem EH parallela ipsi GB, occurratque circumferentiae AFC in H. Et quoniam ratio data, hoc est ratio N ad O est majoris ad minorem, erit et ratio N ad P majoris ad minorem; recta igitur EC, hoc est EH major est ipsâ GB, ideoque punctum contactus F, erit inter H et C, et recta FG occurret ipsi AB productae versus partes B; occurrat ei in D, erit D punctum inveniendum. Jungatur enim EF, et quoniam aequiangula sunt triangula EFD, GBD, erit quadratum

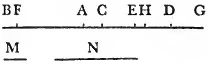
ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, hoc est ex EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta N ad quadratum ex ipsâ P, hoc est [d] ut recta N ad rectam O, hoc est in ratione data. [d] 2. cor. 20. 6.

Puncta autem ipsi B propiora majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora. Sit enim D propius ipsi B quam punctum K, et ducatur KL contingens semicirculum AHC in L, et ipsi KL occurrat BG in M, et jungatur EL. Patet punctum L cadere inter ipsa F, H, quare BG minor erit BM. Habet igitur quadratum ex EF majorem rationem ad quadratum ex BG, quam quadratum ex EL ad quadratum ex BM, quare et quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC majorem habet rationem ad quadratum ex DB, quam quadratum ex LK, hoc est rectangulum AKC ad quadratum ex KB.

PROP. LV. PROB. VI. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D " invenire extra puncta data, quod faciet rectangulum ADC " a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C ipsi propiora " ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum " punctum B, in ratione data, quae, ut patet, debet esse mi- " noris ad majorem."

Factum puta; et rectangulo ADC aequale sit rectangulum BDE, positâ DE ad easdem partes ad

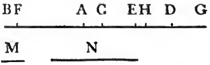


Q

quas eſt DC; erit igitur punctum E inter puncta C, D. Et quoniam data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt ipſius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipſam DB. Eſt autem, per Prop. 14. BD ad DE, ut rectangulum CBA ad ipſum AEC; horum igitur ratio data eſt; et datum eſt rectangulum CBA, quare datum eſt AEC. Data autem eſt recta AC,
[a] 85. Dat. et eſt punctum E in AC producta; datum igitur [a] eſt punctum E, et data erit recta BE. Et data eſt ratio BD ad DE, et propterea datum eſt punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ea quam habet recta M ad rectam N; et fiat ut N ad M, ita rectangulum CBA ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita recta AB ad ipſam BF, nam ita erit rectangulum CBA ad ipſum CBF. Ad rectam vero AC



[b] 29. 6. applicetur [b] rectangulum aequale ipſi CBF excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC pruducta ad partes C; et ut AF ad FB, ita fiat BE ad ED; erit D punctum inveniendum. Erit enim AB ad BF, ut BD ad DE, quare et rectangulum CBA erit ad ipſum CBF, hoc eſt ad rectangulum AEC, ut recta BD ad rectam DE. Igitur per converſam Prop. 14. erit rectangulum ADC aequale ipſi BDE. Eſt autem rectangulum ADC, hoc eſt BDE ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipſam DB, hoc eſt ut FB ad BA, hoc eſt ut M ad N, hoc eſt in ratione data.

Puncta autem ab ipſo C remotiora faciunt majores ratio-

nes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora. Sit enim punctum G remotius a puncto C quam est punctum D. Et rectangulo ADC aequale fiat ipsum BDE, rectangulo autem AGC aequale fiat BGH, igitur per Prop. 33. rectangulum BGE majus est ipso AGC, hoc est ipso BGH; quare recta GE major est ipsa GH, et punctum H erit in CE producta; et propterea rectangulum AHC majus est ipso AEC, ideoque habet AHC majorem rationem ad rectangulum CBA, quam rectangulum AEC ad idem CBA. Quoniam vero rectangulum AGC aequale est ipsi BGH, erit, per Prop. 14. HG ad GB, ut rectangulum AHC ad ipsum CBA; et similiter, quoniam ADC aequale est ipsi BDE rectangulo, erit ED ad DB, ut rectangulum AEC ad ipsum CBA. Ratio igitur HG ad GB, major est ratione ED ad DB; quare et ratio rectanguli BGH, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB, major est ratione rectanguli BDE, hoc est ipsius ADC ad quadratum ex DB.

PROB. VI. EPITAGMA 2. ALITER.

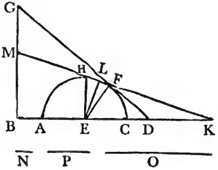
" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
" invenire extra puncta data quod faciet rectangulum ADC
" ad quadratum ex DB in ratione data minoris ad majorem."

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Secetur AC bifariam in puncto E, et centro E, intervallo EC describatur semicirculus AFC, et a puncto D ducatur DF ipsum contingens in F, occurratque in puncto G rectae BG quae ad rectos angulos ducta est ipsi

[a] 36. 3. AB. Quoniam igitur data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt [a] [b] 59. Dat. quadrati ex FD ad quadratum ex DB, data erit [b] ratio rectae FD ad ipſam DB. Junctâ autem EF aequiangula erunt triangula EFD, GBD; ut igitur FD ad DB, ita eſt EF ad BG; et datae ſunt FD, DB, quare data eſt ratio EF ad BG; et data eſt EF, ideoque et BG magnitudine, ſed et poſitione, datumque eſt punctum B; datum igitur eſt punctum G, et recta [c] 94. Dat. GF poſitione data [c] erit, ſed et recta AB poſitione; igitur datum eſt punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta N ad rectam O, et inter N et O media proportionalis inveniatur P; biſariam ſecetur AC in E, et fiat ut N ad P, ita EC ad quartam BG, quae ponatur ad rectos angulos ipſi AB. Ducatur vero a puncto G recta GF contingens circulum ſuper diametrum AC deſcriptum in puncto F ad eaſdem ſcilicet partes rectae AC ad quas eſt G; ducatur



etiam recta EH parallela ipſi GB, occurratque circumferentiae AFC in H. Et quoniam data ratio N ad O eſt minoris ad majorem, erit et ratio N ad P minoris ad majorem; quare recta EC, hoc eſt EH minor eſt ipsâ GB; cadet igitur punctum contactus F inter H et C, et recta GF occur-

ret ipsi BC productae ad partes C; occurrat ei in D, erit D punctum inveniendum. Jungatur enim EF, et quoniam aequiangula sunt triangula EFD, GBD, erit quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, sive EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta N ad quadratum ex recta P, hoc est[d] ut recta N ad ipsam O, hoc est in ratione data. [d] 2.cor. 20. 6.

Puncta autem ab ipso C remotiora faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora. Sit enim punctum K remotius a puncto C quam est punctum D, et ducatur recta KL contingens semicirculum AHC in L, et ipsi BG occurrat KL in M, et jungatur EL. Patet punctum L cadere inter puncta F, H, quare cadet M inter B, G. Habet igitur quadratum ex EL majorem rationem ad quadratum ex BM, quam quadratum ex EF ad quadratum ex BG. Quare, propter aequiangula triangula, quadratum ex LK, hoc est rectangulum AKC majorem habet rationem ad quadratum ex KB, quam quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB.

PROP. LVI. PROB. VI. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
" invenire extra ipsa quod faciet rectangulum ADC a seg-
" mentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad quadratum
" ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B, in
" ratione data."

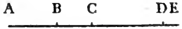
Cas. 1. Quando ratio data eſt aequalis ad aequalem.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC aequale quadrato ex DB. Eſt igitur AD ad DB, ut BD ad DC, et AB ad
a 19. 5. BC, ut [a] AD ad DB. Data autem eſt ratio AB ad BC, igitur data eſt ratio AD ad DB; et data eſt AB, quare datum eſt punctum D. Quoniam vero ratio AD ad DB eſt majoris ad minorem, oportet AB majorem eſſe BC.

Componetur ita,

Sit igitur AB major BC, et inveniatur in AC producta punctum D quod facit AD ad DB, ut AB ad BC. Erit igitur [a] AD ad DB, ut BD ad DC, et rectangulum ADC eſt propterea aequale quadrato ex DB.

Puncta autem remotiora a C quam eſt D faciunt rectangulum majus quadrato, et contra. Sit enim E remotius a C quam D. Quoniam igitur CE major eſt ipsâ CD, erit ratio



BD ad DC, major ratione BE ad EC. Eſt autem AB ad BC,
b cor. 19. 5. ut [b] BD ad DC, quia proportionales ſunt AD, BD, CD; igitur ratio AB ad BC, major eſt ratione BE ad EC, et propterea rectangulum AB, EC majus eſt rectangulo CBE; commune addatur rectangulum BEC, et rectangulum AEC majus
c 2. 2. erit rectangulis CBE, BEC, hoc eſt [c] quadrato ex EB.

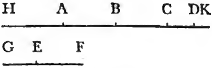
Cas. 2. Quando aequales ſunt AB, BC.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data. Quoniam igitur quadratum ex DB,
a 6. 2. hoc eſt [a] rectangulum ADC una cum quadrato ex BC datam

habet rationem ad rectangulum ADC, convertendo, quadratum ex DB datam habebit rationem ad quadratum ex BC. Datum igitur eſt quadratum ex DB, et ipſa DB data erit, ideoque datum eſt punctum D.

Componetur ita,

Sit ratio quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae EF ad rectam FG, quae, ut patet, debet eſſe minoris ad majorem. Et fiat ut GE ad GF, ita CB ad BH, inveniatur autem inter CB, BH media proportionalis BD quae ponatur a puncto B verſus partes puncti C; punctum D ſolvet Problema.

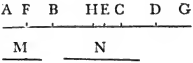


Eſt enim quadratum ex BD, hoc eſt rectangulum HBC ad quadratum ex BC, ut recta HB ad ipſam BC, hoc eſt ut FG ad GE; igitur, convertendo, eſt quadratum ex BD ad rectangulum ADC, ut recta GF ad ipſam FE, et invertendo, rectangulum ADC eſt ad quadratum ex DB, ut EF ad FG, hoc eſt in ratione data.

Puncta autem remotiora a puncto C majores faciunt rationes rectanguli ad quadratum quam puncta ipſi propiora. Sit enim punctum K remotius a C quam eſt punctum D, igitur quadratum ex BC ad rectangulum AKC minorem habet rationem quam ad rectangulum ADC; et componendo, quadratum ex BK minorem habet rationem ad rectangulum AKC quam quadratum ex BD ad rectangulum ADC. Igitur invertendo, rectangulum AKC ad quadratum ex KB majorem habet rationem quam rectangulum ADC ad quadratum ex DB.

CAS. 3. Quando inaequales ſunt AB, BC, et ratio data eſt minoris ad majorem.

Factum puta; ſit ſcilicet in AC producta punctum D quod facit rectangulum ADC ad quadratum ex DB in data ratione minoris ad majorem; et rectangulo ADC aequale ſit ipſum BDE. Quoniam igitur rectangulum ADC, hoc eſt BDE minus eſt quadrato ex DB, erit ED minor DB; eadem vero ED major eſt DC, quia rectangulum ADC eſt aequale ipſi BDE; cadet igitur punctum E inter puncta B, C. Et quoniam rectangulum ADC, hoc eſt ipſum BDE datam habet rationem ad quadratum ex DB, habebit ED ad DB eandem datam rationem. Eſt autem, per Prop. 15. ED ad DB, ut rectangulum ABC ad ipſum AEC; horum igitur ratio data eſt. Et datum eſt rectangulum ABC, igitur datum eſt rectan-
[a] 86. Dat. gulum AEC; et data eſt recta AC, quare datum erit [a] punctum E, et propterea data eſt recta BE, et data eſt ratio ED ad DB, datum igitur eſt punctum D.



Componetur ita,

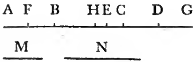
Sint puncta data A, B, C in recta linea, ſitque ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum eadem rationi rectae M ad rectam N. Et ut N ad M, ita fiat rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut N ad M, ita AB ad BF, erit enim in eadem ratione rectangulum ABC ad ipſum FBC. Quoniam vero ratio M ad N eſt minoris ad majorem, erit rectangulum FBC minus ipſo ABC, et propterea

rectangulum FBC minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; igitur, in hoc caſu, in quo ſcilicet ratio data eſt minoris ad majorem, ſemper applicari poteſt [b] ad rectam AC rectangulum aequale dato FBC deficiens quadrato. Alterum autem ex applicationum punctis neceſſariò cadet inter B et C, quoniam rectangulum applicatum minus eſt ipſo ABC. Sit punctum illud E, et ut AF ad FB, ita fiat BE ad ED, poſita ED verſus partes puncti C; erit D punctum inveniendum. Erit enim AB ad BF, ut BD ad DE, major autem eſt AE ipsâ AB, igitur ratio AE ad FB, major eſt ratione (AB ad BF, hoc eſt ratione) BD ad DE. Et quoniam, ex conſtructione, rectangulum AEC aequale eſt ipſi FBC, erit AE ad FB, ut BC ad CE. Eſt igitur ratio BC ad CE, major ratione BD ad DE, et propterea punctum D cadit in EC producta. Quoniam autem eſt AB ad BF, ut BD ad DE, erit rectangulum ABC ad (ipſum FBC, hoc eſt ad) rectangulum AEC, ut BD ad DE. Igitur per converſam Prop. 15. rectangulum ADC aequale eſt ipſi BDE; rectangulum autem ADC, hoc eſt BDE eſt ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipſam DB, hoc eſt ut FB ad BA, hoc eſt ut recta M ad ipſam N, hoc eſt in ratione data. †

[b] 28. 6.

Puncta autem remotiora a puncto C, propiora vero ipſi quam punctum quod facit rectangulum aequale quadrato, faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta ipſi C propiora. Sit enim punctum G remotius a puncto C quam eſt D. Facto igitur rectangulo BDE aequale ipſi ADC, cadet punctum E inter B, C puncta, ut prius oſtenſum. Similiter, ſi fiat rectangulum BGH aequale ipſi AGC, cadet H inter puncta B, C. Et quoniam rectangulum ADC aequale eſt rectangulo BDE, et punctum G eſt in AD producta, erit,

per Prop. 33. rectangulum AGC, hoc est ipsum BGH majus rectangulo BGE; igitur recta GH major est ipsâ GE, et cadet punctum H inter puncta B, E. Quoniam vero rectangulum AGC aequale est ipsi BGH, erit, per Prop. 15. BG ad GH, ut rectangulum ABC * ad ipsum AHC; et, quia BG major est GH, rectangulum ABC majus est ipso AHC, et propterea cadet punctum B propius medio



puncto rectae AC quam punctum H, quare et H cadet propius eidem puncto medio quam punctum E. Igitur rectangulum AHC majus est ipso AEC, et habebit AHC ad ABC rectangulum majorem rationem quam rectangulum AEC ad idem ABC. Quare, ex praemissis ‡, HG ad GB, majorem habet rationem quam ED ad DB; et propterea rectangulum BGH, hoc est AGC majorem habet rationem ad quadratum ex GB, quam rectangulum BDE, hoc est ADC ad quadratum ex DB.

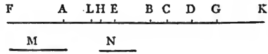
‡ Vide notas †, *.

Cas. 4. Quando ratio data est majoris ad minorem.

Factum puta; sit scilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data majoris ad minorem. Quoniam igitur rectangulum ADC majus est quadrato ex DB, ablato communi rectangulo BDC, erit reliquum rectangulum AB, CD majus reliquo CBD; quare ratio AB ad BC, major est ratione BD ad DC; * est autem BD major DC, multo igitur AB major est BC. Unde ut Problema construi possit, necesse est ut inaequales sint AB, BC, et ut punctum D sit in recta AC producta ad partes minoris segmenti BC. Fiat rectangu-

lum BDE aequale ipsi ADC, positâ DE versus A. Et quoniam data est, ex hypothesi, ratio rectanguli ADC, hoc est ipsius BDE ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad rectam DB. Est autem, per Prop. 15. BD ad DE, ut rectangulum ABC ad ipsum AEC; horum igitur ratio data est; et datum est rectangulum ABC, quare datum est AEC; et data est recta AC, datum igitur [a] est punctum E. Data autem ostensa est ratio ED ad DB, et data est recta EB, et propterea datum est punctum D. [a] 86. Dat.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ad datam rectam AC applicetur rectangulum AEC dato rectangulo aequale, ei scilicet ad quod rectangulum ABC datam habet rationem BD ad DE, deficiens quadrato, Problema non semper construi potest, quoties scilicet rectangulum datum majus fuerit quadrato ex dimidio ipsius AC. Fiat autem modo singulari, si rectangulum datum aequale fuerit quadrato huic.



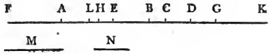
Invenietur autem punctum D, et ratio rectanguli ADC ad quadratum ex DB, in hoc casu, si inveniatur punctum D tale ut, facto rectangulo BDE aequali ipsi ADC, cadat punctum E in medio ipsius AC. Factum puta, et quoniam rectangulum BDE aequale est ipsi ADC, ablatis hisce ex communi quadrato ex ED, erit [b] reliquum rectangulum BED aequale reliquo, dato scilicet quadrato ex EC; datum igitur est rectangulum BED, et data est recta EB, datum propterea est punctum D. [b] 2, et 6. 2.

Componetur hoc ita,

Bifariam secetur AC in E, et ipsis BE, EC tertia proportionalis inveniatur ED; et quoniam EB minor est ipsa EC, erit EC minor ED, et cadet punctum D in AC producta. Quoniam vero rectangulum BED aequale est quadrato ex EC, ablatis hisce ex communi quadrato ex ED, erit reliquum rectangulum EDB aequale reliquo rectangulo ADC. Rectangulum igitur ADC, hoc est EDB est ad quadratum ex DB, ut recta ED ad ipsam DB. Quoniam vero proportionales sunt

[e] 2.cor. 20.6. DE, EC, EB, erit [e] DE ad EB, ut quadratum ex EC ad quadratum ex EB; et convertendo, est

‡ ED ad DB, ut quadratum ex EC, sive rectangulum AEC ad rectangulum ABC; quare et rectangulum ADC est ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EC dimidio scilicet ipsius AC ad rectangulum ABC, hoc est ut quadratum ex AC ad rectangulum ABC quater.



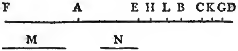
Inquirendum autem est an punctum D facit rationem rectanguli ADC ad quadratum ex DB majorem vel minorem ratione quam facit aliud quodvis punctum in AC producta. Manentibus igitur jam descriptis, sit in AC producta aliud quodvis punctum G, et rectangulo AGC aequale fiat BGH. Quoniam igitur quadratum ex EC, hoc est rectangulum DEB majus aut minus est rectangulo GEB, ablatis hisce ex communi quadrato quod fit a recta EG, erit reliquum rectangulum AGC, hoc est BGH minus aut majus reliquo rectangulo BGE; quare recta HG minor aut major est recta EG, igitur

non cadet punctum H in E; punctum autem E bifariam secat rectam AC, igitur rectangulum AEC majus est ipso AHC, et propterea rectangulum AEC majorem habet rationem ad ipsum ABC, quam AHC rectangulum ad idem ABC. Ostensum autem fuit rectangulum AEC esse ad ipsum ABC, ut recta ED ad rectam DB; et quoniam rectangulum AGC aequale est ipsi BGH, erit, per Prop. 15. rectangulum AHC ad ipsum ABC, ut recta HG ad ipsam GB. Igitur ratio ED ad DB, major est ratione HG ad GB, et propterea ratio rectanguli EDB, hoc est ipsius ADC ad quadratum ex DB, major est ratione rectanguli HGB, hoc est ipsius AGC ad quadratum ex GB. Punctum igitur D facit maximam rationem rectanguli ad quadratum. Vide ‡.

Ostendendum restat puncta ipsi D propiora facere majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad easdem partes puncti D.

Manentibus jam descriptis, sit punctum K remotius a puncto D quam punctum G; sint autem K, G ad easdem partes puncti D, et rectangulo AKC aequale fiat rectangulum BKL. Si igitur puncta G, K sint in CD producta, quoniam rectangulum ADC aequale est ipsi BDE, erit, per Prop. 33. rectangulum AGC, hoc est BGH majus ipso BGE; quare et recta GH major est ipsâ GE. Et similiter, quoniam rectangulum AGC aequale est ipsi HGB, et est K in AG producta, erit rectangulum AKC, hoc est ipsum BKL majus rectangulo BKH, per eandem Prop. 33. quare et recta LK major est ipsâ KH. Eadem ratione in casu in quo puncta G, K sunt inter C, D puncta ostendetur, per Prop. 32. HG minor GE, et LK minor KH. In utroque igitur casu punctum L remotius est a

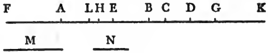
puncto E quod bifariam ſecat rectam AC, quam punctum H. Itaque rectangulum AHC majus eſt ipſo ALC, et propterea rectangulum AHC majorem habet rationem ad ipſum ABC, quam rectangulum ALC ad rectangulum ABC. Oſtenſum autem fuit rectangulum AHC eſſe ad ABC, ut recta HG ad ipſam GB; et ſimiliter oſtendetur rectangulum ALC ad ipſum ABC, ut recta LK ad rectam KB. Igitur ratio rectae HG ad rectam GB, major eſt ratione LK ad KB, et propterea ratio rectanguli HGB, hoc eſt ipſius AGC ad quadratum ex GB, major eſt ratione rectanguli LKB, hoc eſt ipſius AKC ad quadratum ex KB. Puncta igitur ipſi D propiora ad utraſvis partes, faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad eaſdem partes.



Componetur vero Problema ita,

Sint A, B, C data puncta in recta linea, ſitque ratio data quam habere debet rectangulum a ſegmentis inter punctum inveniendum et puncta A, C ad quadratum ex ſegmento inter idem punctum et reliquum punctum B, eadem rationi quam habet recta M ad minorem rectam N. Et inveniatur, ut in praemiſſis oſtenſum fuit, punctum D quod facit maximam rationem rectanguli ad quadratum, hoc eſt rationem eandem ei quam habet quadratum ex AE dimidio ipſius AC, ad rectangulum ABC. Et ſi ratio M ad N eadem fuerit huic rationi, punctum D, idque ſolum, efficiet Problema. Si vero ratio M ad N major fuerit ratione hâc maxima, Problema non

poterit conſtrui. Quod ſi proponatur ratio M ad N minor ratione maxima, fiat ut N ad M, ita rectangulum ABC ad aliud rectangulum, quod quidem invenietur faciendo ut N ad M, ita recta AB ad

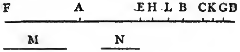


quartam BF, nam ita erit rectangulum ABC ad ipſum FBC. Et quoniam ratio M ad N, hoc eſt ratio rectanguli FBC ad ipſum ABC, minor eſt ratione quadrati ex AE ad idem ABC; erit rectangulum FBC minus quadrato ex AE. Applicari igitur [d] poteſt rectangulum aequale ipſi FBC ad rectam A deficiens quadrato. Applicetur, et ſit H utrumlibet ex applicationum punctis, ut vero FA ad AB, ita fiat HB ad BG, ſumatur autem punctum G in HB productâ; erit G punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum AHC aequale eſt, ex conſtructione, ipſi FBC quod majus eſt rectangulo ABC, quia ratio data M ad N eſt majoris ad minorem, erit AHC majus rectangulo ABC, et propterea punctum H cadit propius puncto E quod bifariam ſecat rectam AC, quam punctum B; cadit autem punctum B inter E et C quoniam oſtenſa * eſt AB major BC, ideoque eſt AH minor AB. Quoniam vero eſt FA ad AB, ita eſt HB ad BG, componendo, erit FB ad BA, ut HG ad GB. Eſt autem AH minor AB, igitur ratio FB ad AH, major eſt ratione (FB ad BA, hoc eſt ratione) HG ad GB. Ut vero FB ad AH, ita HC ad CB, quia rectangulum FBC aequale eſt ipſi AHC; igitur ratio HC ad CB major eſt ratione HG ad GB, et propterea cadit punctum G in recta BC producta. Quoniam vero ut FB ad BA, ita eſt

[d] 28. 6.

* Vide hanc notam.

HG ad GB, erit rectangulum FBC, hoc eſt ipſum AHC ad rectangulum ABC, ut HG ad GB. Igitur per converſam Prop. 15. erit rectangulum AGC aequale ipſi HGB. Eſt autem rectangulum AGC, hoc eſt HGB ad quadratum ex GB, ut recta HG ad ipſam GB, hoc eſt ut FB ad BA, hoc eſt ut M ad N, hoc eſt in ratione data.

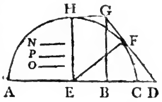


PROB. VI. EPITAGMA 3. ALITER.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C invenire extra ipſa quartum D quod faciet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data."

Cas. 1. Quando ratio data non eſt majoris ad minorem.

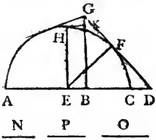
Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum ADC ad quadratum ex DB in ratione data aequalis ad aequalem, vel minoris ad majorem. Secetur AC bifariam in E, et centro E intervallo EC deſcribatur circulus AFC, et a puncto D ducatur DF ipſum contingens in F, occurratque in puncto G rectae BG quae ad angulos rectos ducta eſt ipſi AB. Quoniam igitur data eſt ratio rectanguli ADC, hoc eſt quadrati ex FD ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae FD ad ipſam DB. Junctâ autem EF aequiangula

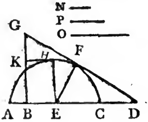


ſunt triangula EFD, GBD; ut igitur FD ad DB, ita eſt EF ad BG, quare data eſt ratio FE ad BG, et data eſt EF, data igitur eſt BG magnitudine, ſed et poſitione, datumque eſt punctum B; datum igitur eſt punctum G, et propterea recta GF, quae circulum poſitione datum contingit, poſitione data eſt [a]; ſed et AB poſitione, datum igitur eſt punctum D. [a] 94. Dat.

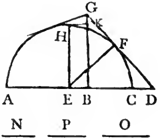
Componetur ita,

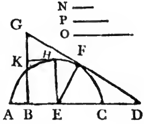
Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta N ad ipſam O, et inter N et O media proportionalis inveniatur P. Quoniam igitur, ex hypotheſi, N vel aequalis eſt ipſi O vel eâdem minor, erit et N vel aequalis ipſi P vel eâdem minor. Bifariam ſecetur AC in E, et fiat ut N ad P, ita EC ad quartam BG, quae ponatur ad rectos angulos ipſi AB; centroque E intervallo EC deſcribatur ſemicirculus AFC ad partes ipſius AC ad quas eſt punctum G, et ducatur EH parallela ipſi BG, et ſi ratio data fuerit aequalis ad aequalem jungatur HG; ſi vero fuerit minoris ad majorem compleatur parallelogrammum BEHK. In primo igitur caſu, quoniam EC, hoc eſt EH aequalis eſt ipſi BG, ſuntque EH, BG inter ſe parallelae, recta GH parallela erit [b] ipſi EB, et circulum continget [c]. In altero vero caſu, erit EC, hoc eſt [b] 33. 1. [c] 16. 3.





EH, sive BK minor ipsâ BG, et propterea punctum G est extra rectam KH quae circulum contingit in H. In utroque igitur casu una tantum contingentium circulum, a puncto G ductarum, occurret rectae AC ad partes C productae; ducatur, et sit GF quae rectae AC occurrat in D; erit D punctum inveniendum. Jungatur enim EF, et quoniam aequiangula sunt EFD, GBD triangula, erit quadratum ex FD, hoc est rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, hoc est ex EC ad quadratum ex BG, hoc est ut quadratum ex recta N ad quadratum ex recta P,
[d] 2.cor.20.6. hoc est [d] ut recta N ad ipsam O, hoc est in ratione data.



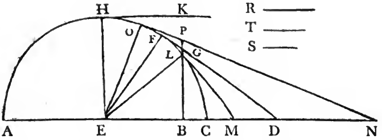


Si autem punctum B sit in E medio scilicet ipsius AC, vel inter A et E, fueritque ratio data aequalis ad aequalem, manifestum est Problema construi non posse; ubicunque enim
[e] 6. 2. sumatur punctum D in AC producta ad partes C, erit [e] rectangulum ADC minus quadrato ex BD.

CAS. 2. Quando ratio data est majoris ad minorem.

Analysis hujus eadem est cum ea praecedentis casus. Quoniam vero ad compositionem requiritur ut ducatur a puncto B recta BG ad rectos angulos ipsi AB, et ut EC ad BG habeat

rationem majoris ad minorem, erit BG minor ipsâ EC, et quoniam praeterea requiritur ut a puncto G ducatur recta quae circulum super diametrum AC descriptum contingat; ideo Problema non semper construi potest; quoties scilicet punctum G fuerit intra circulum. Fiet autem modo singulari, si punctum G fuerit in ipsa circumferentia. Invenietur autem punctum in AC producta, et ratio rectanguli ad quadratum, in hoc casu, ut sequitur. A puncto B ad rectos angulos ipsi AB ducatur ad circumferentiam super diametrum AC recta BL, et recta circulum in L contingens occurrat ipsi AC in M. Erit M punctum inveniendum, et ratio rectanguli

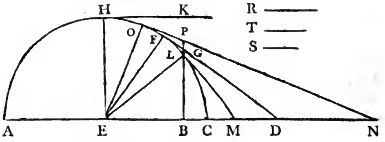


AMC, hoc est quadrati ex LM ad quadratum ex MB, eadem erit, junctâ EL, rationi quadrati ex EL ad quadratum ex LB, hoc est rationi quadrati ex EC dimidio ipsius AC ad rectangulum ABC.

Inquirendum autem est an ratio rectanguli AMC ad quadratum ex MB major aut minor sit ratione quam facit aliud quodvis punctum in AC producta. Sit aliud quodvis punctum D, et ducatur recta DF circulum contingens in F, oc-

curratque ipſi BL in G, et jungatur EF; eſt igitur punctum G extra circulum, quare recta BL minor eſt ipsâ BG, et propterea ratio quadrati ex EL ad quadratum ex LB, major eſt ratione quadrati ex EF ad quadratum ex BG, hoc eſt, propter aequiangula triangula ELB, LMB, ut et aequiangula EFD, GBD, ratio quadrati ex LM, hoc eſt rectanguli AMB ad quadratum ex MB, major eſt ratione quadrati ex FD, hoc eſt rectanguli ADC ad quadratum ex DB. Punctum igitur M facit maximam rationem rectanguli ad quadratum.

Puncta autem ipſi M propiora faciunt majores rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes ipſius M. Sit enim



D propius ipſi M quam eſt punctum N, ſint autem D, N ad eaſdem partes ipſius M. A punctis D, N ducantur circulum contingentes rectae DF, NO quarum DF occurrat ipſi BL in G, NO vero eidem occurrat in P, et jungantur EF, EO. Quoniam igitur contingens NO quae remotior eſt a puncto M occurrit rectae BL ſupra punctum G in quo contingens propior DF eidem occurrit, erit BG minor recta BP. Igitur ratio quadrati ex EF ad quadratum ex BG, major eſt ratione quadrati

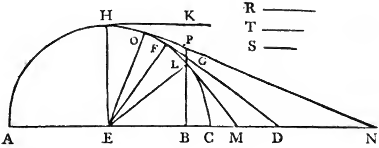
ex EO ad quadratum ex BP; quare propter aequiangula triangula, ratio quadrati ex FD, hoc eſt rectanguli ADC ad quadratum ex DB, major eſt ratione quadrati ex ON, hoc eſt rectanguli ANC ad quadratum ex NB. Puncta igitur propiora ipſi M ad utraſvis ejus partes faciunt majores rationes rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora ad eaſdem partes puncti M.

Componetur vero Problema in 2do Caſu ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ad quadratum ea quam habet recta R ad rectam S, et inter R et S media proportionalis inveniatur T. Quoniam igitur ratio data eſt majoris ad minorem R major eſt quam S, quare et R major erit quam T. Bifariam ſecetur AC in E, et centro E, intervallo EC deſcribatur ſemicirculus, et a puncto B, ipſi AB ad rectos angulos ducatur BL quae circumferentiae occurrat in L, et ducatur LM circulum contingens. Si igitur ratio data R ad S, hoc eſt [a] ratio quadrati ex R ad quadratum ex T eadem fuerit rationi quadrati ex EC ad rectangulum ABC, punctum M ſolvet Problema, idque ſolum, quia punctum quodvis aliud facit minorem rationem rectanguli ad quadratum quam punctum M, ut oſtenſum fuit. Si autem ratio data major fuerit maxima, Problema conſtrui non poteſt. Quod ſi proponatur ratio R ad S quae minor ſit maxima, hoc eſt ratione quadrati ex EC ad rectangulum ABC, ſive qudratum ex BL, fiat ut R ad T, ita EC ad quartam BG quae ponatur in recta BL, et ipſi BG parallela ducatur EH, et ducatur HK parallela ipſi AC, quae propterea continget circulum in H. Quoniam igitur R major eſt quam T, erit

[a] 2. cor. 20. 6.

[a] 2. cor. 20. 6. EC, hoc eſt EH major BG; et quoniam ratio R ad S, hoc eſt[a] ratio quadrati ex R ad illud ex T, hoc eſt ratio quadrati ex EC, ſive EH ad quadratum ex BG minor eſt ratione quadrati ex EC ad quadratum ex BL, erit BG major BL, eadem autem BG minor oſtenſa eſt ipsâ EH; igitur punctum G cadit inter punctum L et contingentem HK, et propterea utraque contingentium quae a puncto G ducuntur occurrent circumferentiae inter puncta H, C, quare et rectae AC occurrent productae ad partes C. Sit GD earum utralibet, contingatque circulum in F,



et jungatur EF; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim aequiangula ſunt triangula EFD, GBD, erit quadratum ex FD, hoc eſt rectangulum ADC ad quadratum ex DB, ut quadratum ex EF, hoc eſt ex EC ad quadratum ex BG, hoc eſt, ex conſtructione, ut quadratum ex recta R ad quadratum ex T, hoc eſt ut recta R ad rectam S, hoc eſt in ratione data. Similiter ope reliquae contingentis invenietur aliud punctum in recta AC producta quod efficiet Problema.

Semicirculi autem hi quorum ope Demonſtrationes ſecundae Epitagmatum Prob. 5. et 6. factae ſunt, non ſunt ii de quibus loquitur Pappus in praefatione ſua ad librum ejus ſeptimum. Dicit enim Pappus " Apollonium rurſus demonſtraſſe Propoſitiones ſuas" hoc eſt quaſdam ex iis " ingenioſe per ſemicirculos" et quidem Demonſtrationes Lemmatum Apollonii ope ſemicirculorum quas Pappus ſervavit, ingenioſe admodum ſunt factae; Demonſtrationes vero Epitagmatum Prob. 5. et 6. per ſemicirculos hìc traditae, parum aut nihil ingenii requirunt. Quamvis igitur has Apollonius non potuit non cognoviſſe, obviae enim ſunt, certum tamen non eſt eum eas dediſſe.

APOLLONII PERGAEI

DE

SECTIONE

DETERMINATA

LIBER SECUNDUS.

PROBLEMA I.

"DATIS in recta linea quatuor punctis, quintum inve-
"nire in ſegmento medio quod faciet rectangulum a ſeg-
"mentis inter ipſum et duo quaevis ex punctis datis ad rect-
"angulum a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta in
"ratione data."

PROP. LVII. PROB. I. EPITAGMA 1.

"DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
"tum invenire in ſegmento medio CE quod faciet rectan-
"gulum a ſegmentis inter ipſum et duo puncta A, C ad eaſ-
"dem ipſius partes ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum
"et puncta E, B ad alteras ejus partes, in ratione data."

Cas. 1. Quando ratio data est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet D punctum quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Erit igitur AD ad DE, ut BD
a 12. 5. ad DC, et [a] AB ad CE, ut AD ad DE; quare, componendo, AB una cum CE, hoc est AE una cum CB est ad CE, ut AE ad ED. Datae autem sunt AE, CB, CE; data igitur est ED, et punctum D datum erit. Hic autem casus idem est cum parte quarta Prop. 20.



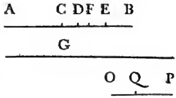
Componetur ita,

Producatur BA ad F ita ut FA aequalis sit ipsi CB, et ut FE ad EC, ita fiat AE ad ED quae ponatur a puncto E versus A; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim FE major est AE, erit EC major ED, et cadet punctum D inter C, E puncta. Est autem FE ad EC, ut AE ad ED, et dividen-
b cor. 19. 5. do, ut FC, hoc est AB ad EC, ita AD ad DE; igitur [b] BD est ad DC, ut AD ad DE, et propterea rectangulum ADC est aequale rectangulo BDE.

Cas. 2. Quando ratio data non est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet F punctum inveniendum, inter C et E, quod facit rectangulum AFC ad rectangulum BFE in ratione data. Et ope Casus praecedentis inveniatur inter C et E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale rectangulo BDE. Sit autem rectangulum AFC majus ipso BFE; (nam si AFC minus fuerit ipso BFE, scriptis notis A, C, E, B in schemate ordine inverso, eadem erit solutio) erit igitur

punctum F inter D et E puncta; et propterea ſi ponatur recta G aequalis rectis AE, CB ſimul, erit, per Prop. 24. rectangulum AFC aequale rectangulis BFE, G, DF ſimul. Data autem eſt ratio rectanguli AFC ad ipſum BFE, quare, dividendo, data eſt ratio rectanguli G, DF ad rectangulum BFE. Et data ſunt D, E, B puncta, dataque eſt recta G. Igitur deductum eſt Problema ad Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1. hoc eſt ad Prop. 45. hujus. Datis ſcilicet tribus punctis D, E, B in recta linea, invenire inter



puncta D, E quartum F quod facit rectangulum a data recta G et ipſa DF ad rectangulum BFE in ratione data. Datum igitur eſt punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipſum BFE, eadem ei quam habet recta OP ad rectam PQ. Et ope Caſ. 1. inveniatur inter C et E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipſi BDE. Dein per Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1. inveniatur inter D et E punctum F quod facit rectangulum G, DF ad rectangulum BFE in ratione data quam habet recta OQ ad ipſam QP, poſitâ ſcilicet rectâ G aequali ipſis AE, CB ſimul; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, DF eſt ad ipſum BFF, ut recta OQ ad ipſam QP, erit, componendo, BFE una cum rectangulo G, DF, hoc eſt, per Prop. 24. erit rectangulum AFC ad ipſum BFE, ut recta OP ad ipſam PQ, hoc eſt in ratione da-

ta. Patet autem puncta ipsi C propiora minores facere rationes quam remotiora.

PROP. LVIII. PROB. I. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
" tum invenire inter puncta media E, C quod faciet rectan-
" gulum a segmentis inter ipsum et alterum ex punctis ex-
" tremis A, mediumque C ab extremo A remotius, ad rect-
" angulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B
" in ratione data."

CAS. I. Quando ratio data est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet D punctum inter E et C, quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB, erit igitur AD ad
[a] cor. 19. 5. DB, ut ED ad DC, quare [a] ut AE ad CB, ita ED ad DC, et, componendo, ut AE una cum CB ad CB, ita EC ad CD. Da-



tae autem sunt AE, CB, EC; data igitur est CD, punctumque D datum. Hic autem Casus idem est cum 2da parte Prop. 21.

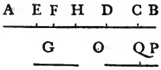
Componetur ita,

Fiat EF aequalis ipsi CB, sumpto F inter E et B, et ut AF ad FE, ita fiat EC ad CD quae ponatur a puncto C versus A; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim AF major est FE, erit EC major CD, et cadet punctum D inter puncta E, C. Et quoniam est AF ad FE, ita EC ad CD, dividendo, erit

AE ad EF, hoc eſt CB, ut ED ad DC; et [b] ut AD ad DB, ita ED ad DC. Eſt igitur rectangulum ADC aequale ipſi EDB. b 12. 5.

CAS. 2. Quando ratio data non eſt aequalis ad aequalem.

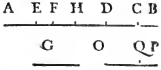
Factum puta; ſit ſcilicet F punctum inveniendum inter E et C quod facit rectangulum AFC ad rectangulum EFB in ratione data. Et ope Caſ. 1. inveniatur inter C et E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB. Sit autem rectangulum AFC majus ipſo EFB; (nam ſi AFC minus fuerit rectangulo EFB, ſcriptis notis A, E, C, B in ſchemate ordine inverſo, eadem erit ſolutio) erit igitur per Cor. Prop. 27. punctum F inter E et D puncta. Quare ſi ponatur recta G aequalis ipſis AE, CB ſimul, erit, per Prop. 27. rectangulum AFC aequale rectangulo EFB una cum ipſo G, FD. Data autem eſt ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB, quare, dividendo, data eſt ratio ipſius G, FD ad rectangulum EFB. Et data ſunt E, D, B puncta, dataque eſt recta G; igitur Problema deductum eſt ad Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1. hoc eſt ad Prop. 46. hujus, datis ſcilicet in recta linea tribus punctis E, D, B, invenire inter puncta E, D quartum F quod facit rectangulum a data recta G et ipſa DF ad rectangulum EFB in ratione data. Datum igitur eſt punctum F.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipſum EFB, eadem ei quam habet recta OP ad ipſam PQ. Et inveniatur inter E, C punctum D quod facit rectangulum

ADC aequale ipſi EDB. Dein per Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1. hoc eſt per Prop. 46. inveniatur inter E et D punctum F quod facit rectangulum G, FD ad ipſum EFB in ratione data quam habet OQ ad QP, poſitâ ſcilicet rectâ G aequali ipſis AE, CB ſimul; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, FD eſt ad ipſum EFB, ut recta OQ ad ipſam QP, componendo, erit rectangulum EFB una cum ipſo G, FD, hoc eſt, per Prop. 27. rectangulum AFC ad ipſum EFB, ut OP ad PQ, hoc eſt in ratione data.



Puncta autem F propiora puncta E majores faciunt rationes quam remotiora, ut H. Nam per ea quae oſtenſa ſunt ad finem Prop. 46. ratio rectanguli G, FD ad ipſum EFB major eſt ratione rectanguli G, HD ad rectangulum EHB; igitur, componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipſo G, FD, hoc eſt rectanguli AFC ad ipſum EFB, major eſt ratione rectanguli EHB una cum ipſo G, HD, hoc eſt, per Prop 27. rectanguli AHC ad ipſum EHB.

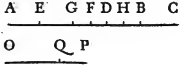
PROP. LIX. PROB. I. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
" tum invenire inter puncta media E, B quod faciet rectan-
" gulum a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema A, C ad
" rectangulum a ſegmentis inter ipſum et puncta media E, B
" in ratione data, quae, ut patet, debet eſſe majoris ad mi-
" norem."

Cas. 1. Quando aequales ſunt rectae AE, BC inter ſe.

Factum puta; ſit ſcilicet D punctum inveniendum inter E et B quod facit rectangulum ADC ad ipſum EDB in ratione data. Et quoniam, per Prop. 36. rectangulum ADC aequale eſt ipſis ABC, EDB ſimul, dividendo, habebit rectangulum ABC datam rationem ad rectangulum EDB. Datum autem eſt ABC, quia data ſunt puncta A, B, C. datum igitur eſt rectangulum EDB, et data eſt recta EB, datum igitur [a] eſt [a] 86. Dat. punctum D.

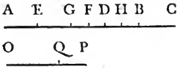
Quoniam vero ad compoſitionem requiritur ut ad datam rectam EB applicetur rectangulum dato rectangulo ABC aequale, deficiens quadrato, quod non ſemper fieri poteſt, quoties ſcilicet rectangulum ABC majus eſt quadrato ex dimidio ipſius EB, ideo Problema non ſemper poteſt conſtrui. Fiet autem modo ſingulari ſi punctum applicationis inciderit in punctum F quod bifariam ſecat rectam EB, hoc eſt ſi rectangulum ABC aequale fuerit quadrato ex EF; et in hoc caſu quoniam aequales ſunt AE, BC, punctum F bifariam etiam ſecabit rectam AC, et propterea ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB eadem erit rationi quadrati ex AF ad quadratum ex EF, hoc eſt rationi quadrati ex AC ad quadratum ex EB; haec autem ratio minor eſt ratione quam facit aliud quodvis punctum D in recta EB. Quoniam enim quadratum ex EF majus [b] eſt rectangulo EDB, habebit rectangulum ABC ad ip- [b] 5. 2. ſum EFB, hoc eſt ad quadratum ex EF minorem rationem



quam idem ABC habet ad rectangulum EDB, et, componendo, habebit quadratum ex AF ad quadratum ex EF minorem rationem quam rectangulum ABC una cum ipſo EDB, hoc eſt, per Prop 36. quam rectangulum ADC habet ad ipſum EDB. Punctum igitur F facit minimam rationem.

Componetur autem Problema ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad ipſum EDB eadem rationi rectae OP ad ipſam PQ, et bifariam ſecta EB in F, ſi ratio OP ad PQ eadem fuerit rationi quadrati ex AC ad quadratum ex EB, hoc eſt rationi quadrati ex AF ad illud ex EF, ſive rationi rectanguli AFC ad ipſum EFB, punctum F, idque ſolum, Problema efficiet, ut prius oſtenſum. Si vero ratio OP ad PQ non eadem fuerit huic rationi, erit eâdem neceſſario major. Et quoniam requiritur ut ADC rectangulum ſit ad ipſum EDB, ut OP ad PQ, dividendo, debet rectangulum ABC eſſe ad EDB, ut OQ ad QP. Fiat igitur ut OQ ad QP, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur faciendo ut OQ ad QP, ita AB ad BG, nam ita erit rectangulum ABC ad ipſum GBC. Quoniam vero ratio OP ad PQ major eſt, ex hypotheſi, ratione quadrati ex AF ad quadratum ex FB, dividendo, ratio OQ ad QP, hoc eſt ratio rectanguli ABC ad ipſum GBC, major erit ratione ejuſdem ABC ad quadratum ex FB. Igitur rectangulum GBC minus eſt [c] quadrato ex FB. Quare ad rectam EB applicari poteſt [d] rectangulum aequale ipſi GBC deficiens quadrato. Applicetur, ſitque D utrumlibet ex applicationum punctis; erit D punctum inveni-



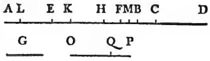
[c] 10. 5.
[d] 28. 6.

endum. Quoniam enim, ex conſtructione, rectangulum EDB eſt aequale ipſi GBC, erit rectangulum ABC ad ipſum EDB, hoc eſt ad GBC rectangulum, ut (recta AB ad ipſum BG, hoc eſt ut) recta OQ ad QP, et, componendo, erit rectangulum ADC ad ipſum EDB, ut recta OP ad ipſam PQ, hoc eſt in ratione data.

Puncta autem ipſi F propiora ad utraſvis partes, ut D, minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes, ut H. Rectangulum enim EDB majus eſt ipſo EHB, quare rectangulum ABC minorem habet rationem ad EDB quam ad ipſum EHB; et componendo, rectangulum ADC minorem habet rationem ad rectangulum EDB, quam rectangulum AHC ad ipſum EHB.

Cas. 2. Quando inaequales ſunt AE, BC. Sit autem AE major BC.

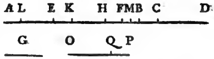
Factum puta; ſit ſcilicet punctum F inveniendum quod facit rectangulum AFC ad ipſum EFB in ratione data. Primo autem in AC producta inveniatur punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB. Sit et hoc factum; ſi igitur exceſſui ipſarum AE, BC aequalis ponatur recta G, erit, per partem ſecundam Prop. 22. rectangulum G, CD aequale ipſi BCE; datum autem eſt rectangulum BCE, et data eſt recta G, igitur data eſt recta CD, datumque punctum D. Quoniam vero punctum F, ex hypotheſi, eſt inter E, B puncta, erit, per Prop. 30. rectangulum AFC aequale rectangulis EFB, G, FD ſimul. Et data eſt, ex hypotheſi, ratio rectanguli AFC



ad ipſum EFB, igitur, dividendo, data eſt ratio rectanguli G, FD ad ipſum EFB. Et data ſunt puncta E, B, D, dataque eſt recta G. Deductum igitur eſt Problema ad Epitagma 3. Prob. 3. Lib. 1. hoc eſt ad Prop. 47. cujus ope punctum F invenietur.

Primo autem inveniendum eſt punctum D, quod fiet ſi ponatur recta G aequalis exceſſui ipſarum AE, BC, et ut G ad EC, ita fiat BC ad CD. Erit enim rectangulum G, CD aequale ipſi ECB; igitur per converſam partis 2dae Prop. 22. erit rectangulum ADC aequale ipſi EDB. Vel inveniri poteſt punctum D ut in Caſ. 1. Prop. 65.

Quoniam vero Problema ad quod deductum eſt hoc, determinationem habet, et non ſemper conſtrui poteſt, ideo neque hoc ſemper poteſt conſtrui, ſed determinationem habebit. Oſtenſum autem eſt in Prop. 47. datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, ſi inter ED, DB ſumatur media proportionalis DH, punctum H facere minimam rationem rectanguli G, HD ad ipſum EHB, hoc eſt ſi ſumatur aliud



quodvis punctum F inter E, B puncta, fore rationem rectanguli G, HD ad ipſum EHB minorem ratione rectanguli G, FD ad ipſum EFB. Igitur, componendo, ratio rectanguli EHB una cum ipſo G, HD ad rectangulum EHB minor eſt ratione rectanguli EFB una cum ipſo G, FD ad rectangulum EFB. Eſt autem, per Prop. 30. rectangulum AHC aequale ipſis EHB, G, HD ſimul, et rectangulum AFC aequale ipſis EFB, G, FD ſimul; igitur ratio rectanguli AHC ad ipſum

EHB minor est ratione rectanguli AFC ad ipsum EFB; et propterea punctum H facit minimam rationem. Et quoniam in determinatione Problematis in Prop. 47. ostensum est, si fiat KH aequalis HB, fore rationem G ad EK eandem minimae rationi quam scilicet habet rectangulum G, HD ad ipsum EHB; igitur si fiat LE aequalis ipsi G, erit, componendo, ratio LK ad KE eadem rationi minimae, hoc est rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB.

Punctum autem H quod facit minimam rationem ita determinabitur. Quoniam proportionales sunt ED, HD, BD erit [b] ED ad DB, ut (quadratum ex ED ad quadratum ex DH, hoc est ut) quadratum ex EH ad illud ex HB. Igitur rectangulum G, ED est ad ipsum G, DB, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Quoniam vero rectangulum ADC aequale est ipsi EDB, et est recta G excessus ipsarum AE, BC, rectangulum G, ED aequale est ipsi AEC per 4tam partem Prop. 22. et per 3tiam partem ejusdem, rectangulum G, DB est aequale ipsi ABC. Igitur rectangulum AEC est ad ipsum ABC, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Atque haec est determinatio, ipsius scilicet Apollonii, quam Pappus memorat in Prop. 61. Lib. 7.

[b] 2. cor. 20. 6.

Componetur hoc ita,

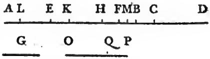
Secetur EB in H ita ut rectangulum AEC sit ad ipsum ABC, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB; punctum H erit id quod facit minimam rationem. Nam ex hac proportione et parte 4ta et 3tia Prop. 22. erit rectangulum G, ED ad ipsum G, DB, hoc est, erit recta ED ad ipsam DB, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Igitur, per Prop. 16. rectangulum EDB aequale est quadrato ex DH; quare, ut

prius oſtenſum, punctum H facit minimam rationem. Poteſt etiam punctum H inveniri ſi fiat ut rectangulum BAE ad ipſum ECB, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, ut conſtat ex Prop. 19.

Et puncta ipſi H propiora minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes puncti H. Sit enim punctum F propius ipſi H quam punctum M ad eaſdem partes ipſius H. Igitur, per ea quae oſtenſa ſunt in determinatione Problematis in Prop. 47. erit ratio rectanguli G, FD ad ipſum EFB minor ratione rectanguli G, MD ad ipſum EMB; quare, componendo, et per Prop. 30. erit ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, minor ratione rectanguli AMC ad ipſum EMB.

Componetur vero Problema ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum a ſegmentis inter punctum inveniendum et puncta A, C ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et puncta E, B ea quam habet recta OP ad ipſam PQ. Et inveniantur puncta D, H, K, L et recta G, ut in praemiſſis oſtenſum fuit. Et ſi ratio OP ad PQ eadem ſit



rationi minimae, hoc eſt rationi quam habet recta LK ad ipſam KE, ſive rationi rectanguli AHC ad ipſum EHB, punctum H efficiet Problema, nullumque aliud, ut in praemiſſis oſtenſum. Si vero ratio data OP ad PQ, minor ſit ratione minima, Problema non poterit conſtrui. Quod ſi ratio OP ad

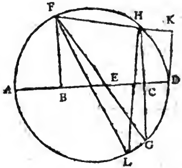
PQ major ſit ratione minima LK ad KE, dividendo, ratio OQ ad QP major erit ratione LE, hoc eſt ipſius G ad EK. Igitur, per compoſitionem Problematis in Prop. 47. Datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, poſſunt inter E et B inveniri duo puncta quorum utrumlibet, quod ſit F, faciet rectangulum G, FD ad ipſum EFB in data ratione quam habet recta OQ ad ipſam QP, et propterea componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipſo G, FD, hoc eſt ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB, eadem erit rationi OP ad PQ, hoc eſt rationi datae.

Ratio autem minima determinatur ita. Oſtenſum fuit in compoſitione ad notam * in margine, datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D ſi fiat ut rectangulum ABD ad ipſum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, fore E punctum quod facit rationem rectanguli AED ad rectangulum BEC ſingularem et minimam. Nunc vero oſtendendum eſt rationem hanc eandem eſſe ei quam habet quadratum ex AD ad quadratum exceſſus quo recta linea quae poteſt rectangulum AC, BD excedit eam quae poteſt rectangulum AB, CD.

Deſcribatur circulus circa " diametrum" AD, et BF, CG perpendiculares ducantur " ad oppoſitas ipſius AD partes." Quoniam igitur eſt ut rectangulum ABD ad ipſum ACD, hoc eſt quadratum ex BF ad quadratum ex CG, ita quadratum ex BE ad quadratum ex EC, erit et longitudine ut BF ad CG, ita BE ad EC; ergo recta linea eſt quae per puncta F, E, G tranſit. Sit FEG, et GC ad H producatur; juncta vero FH producatur ad K, atque ad ipſam perpendi-

cularis ducatur DK. Ergo per Prop. 39. rectangulum AC, BD est aequale quadrato ex FK; rectangulum vero AB, CD quadrato ex HK aequale. Reliqua igitur FH est excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD excedit eam quae potest rectangulum AB, CD. Ducatur per centrum FL, et HL jungatur. Itaque quoniam rectus angulus FHL est aequalis recto ECG, et angulus FLH aequalis ei qui ad G, aequiangula erunt triangula " LFH, GEC," et ideo ut LF ad FH, hoc est ut AD ad FH, ita GE ad EC; ergo ut quadratum ex AD ad quadratum ex FH, ita quadratum ex GE ad quadratum ex EC, et [c] rectangulum GEF, hoc est AED ad rectangulum BEC. Est autem rectanguli quidem AED ad rectangulum BEC singularis et minima ratio. FH vero est excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD hoc est quadratum ex FK excedit eam quae potest rectangulum AB, CD hoc est quadratum ex HK. Ergo singularis et minima ratio eadem est quae quadrati ex AD ad quadratum excessus quo recta linea quae potest rectangulum AC, BD excedit eam quae potest rectangulum AB, CD. Atque haec est ipsius Apollonii determinatio et demonstratio quas servavit Pappus in Prop. 61. Lib. 7. Mathematicarum Collectionum.

[c] 22. 6.



PROB. II.

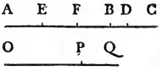
" DATIS in recta linea quatuor punctis, quintum invenire " in altero ex segmentis extremis, quod faciet rectangulum " a segmentis inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis ad " rectangulum inter ipsum et duo reliqua puncta, in ratione " data."

PROP. LX. PROB. II. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin- " tum invenire in altero ex segmentis extremis AE, BC, quod " faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et puncta ex- " trema A, C ad rectangulum a segmentis inter ipsum et re- " liqua puncta E, B, in ratione data."

CAS. 1. Quando AE, BC sunt inter se aequales.

Factum puta; sit scilicet D punctum in segmento BC quod facit rectangulum ADC ad ipsum EDB in ratione data. Et quoniam data est ratio rectanguli ADC ad ipsum EDB, componendo, data erit ratio rectanguli ADC una cum ipso EDB ad rectangulum EDB, hoc [a] est ratio rectanguli ABC ad ipsum EDB. Et datum est ABC, igitur datum est rectangulum EDB. Data autem est recta EB, et est punctum D in EB producta, et propterea [b] datum est punctum D.

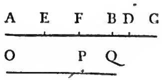


[a] Prop. 37.

[b] 85. Dat.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad ipſum EDB eadem rationi rectae OP ad ipſam PQ; et fiat ut OQ ad QP, ita rectangulum ABC ad aliud, quod invenietur ſi fiat ut OQ ad QP, ita AB ad BF, nam ita erit rectan-
[c] 29. 6. gulum ABC ad ipſum FBC. Ad rectam vero EB applicetur [c] rectangulum aequale ipſi FBC exedens quadrato, ſitque D punctum applicationis quod eſt in EB producta ad partes C; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim, ex conſtructione, rectangulum EDB eſt aequale ipſi FBC, et eſt rectangulum ABC majus ipſo FBC, recta enim OQ major eſt ipsâ QP; erit ABC, hoc eſt ECB rectangulum majus ipſo EDB; igitur punctum D cadit inter B, C puncta. Et quoniam rectangulum ABC eſt ad ipſum FBC, hoc eſt ad rectangulum EDB, ut
[a] Prop. 37. OQ ad QP, dividendo, erit rectangulum [a] ADC ad rectangulum EDB, ut OP ad PQ, hoc eſt in ratione data. Manifeſtum autem eſt puncta ipſi C propiora minores facere rationes quam puncta remotiora.



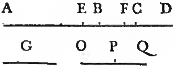
Cas. 2. Quando inaequales ſunt AE, BC et requiritur ut punctum inveniatur in minore ſegmento BC.

Factum puta; ſit ſcilicet punctum F inveniendum inter B et C quod facit rectangulum AFC ad ipſum EFB in ratione data. Et in AC producta ſit punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB; datum igitur eſt punctum D, ut oſtenſum fuit in analyſi Caſ. 2. Prop. 59. Et ſi ponatur

recta G aequalis excessui ipsarum AE, BC, quoniam punctum F est inter B et C, erit, per Prop. 31. rectangulum AFC una cum ipso EFB aequale rectangulo G, FD. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, quare, componendo, data est ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB; et data sunt puncta E, B, D, dataque est recta G; igitur deductum est ad Problema in Prop. 45. cujus ope punctum F invenietur.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB eadem ei quam habet recta OP ad ipsam PQ. Et in AC producta inveniatur, ut ostensum fuit in compositione Cas. 2. Prop. 59. punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; et excessui rectarum AE, BC ponatur recta G aequalis. Dein per compositionem Problematis in Prop.

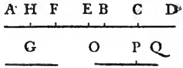


45. datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, inveniatur inter puncta B, D punctum F quod facit rectangulum G, FD ad ipsum EFB in data ratione quam habet recta OQ ad ipsam QP. Et quoniam OQ major est ipsâ QP, erit rectangulum G, FD majus ipso EFB; quare per Cor. Prop. 32. punctum F est inter B, C puncta, et propterea, per Prop. 31. rectangulum G, FD aequale est rectangulo AFC una cum ipso EFB. Et quoniam ut rectangulum G, FD ad ipsum EFB, ita est recta OQ ad ipsam QP. Igitur, dividendo, excessus rectanguli G, FD supra ipsum EFB, hoc est rectangulum AFC est ad ipsum EFB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

Quoniam vero recta BC, ex hypotheſi, minor eſt ipſâ AE, punctum bifariam ſecans rectam AC cadet in ſegmento AB; unde manifeſtum eſt puncta ipſi C propiora minores facere rationes quam remotiora.

Cas. 3. Quando requiritur ut punctum F inveniatur in majore ſegmento AE.

Factum puta; ſit ſcilicet rectangulum AFC ad ipſum EFB in ratione data. Et in AC producta ſit punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB. Datum igitur eſt punctum D, ut prius oſtenſum. Quoniam vero punctum F, ex hypotheſi, eſt inter A et E, erit per Prop. 34. rectangulum AFC una cum ipſo EFB aequale rectangulo G, FD; poſitâ ſcilicet rectâ G aequali exceſſui ipſarum AE, BC. Data autem eſt ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB, quare, componendo, data eſt ratio rectanguli G, FD ad ipſum EFB. Et data ſunt puncta D, B, E, et data eſt recta G; igitur, quoniam F eſt extra data puncta, deductum eſt Problema ad Epitagma 1. Prob. 4. Lib. 1. hoc eſt ad Prop. 48. cujus ope invenietur punctum F.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipſum EFB ea quam habet recta OP ad ipſam PQ. Et invento puncto D quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB, ut in Caſu praecedente, fiat recta G aequalis exceſſui ipſarum AE, BC; datiſque punctis D, B, E inveniatur extra ipſa ad

partes puncti E, per compositionem Problematis in Prop. 48. punctum F quod facit rectangulum G, FD ad ipsum **EFB** in data ratione quam habet recta OQ ad ipsam QP. Et quoniam OQ major est QP, erit rectangulum G, FD majus ipso EFB, quare, per Cor. Prop. 35. erit punctum F inter A, E puncta, et propterea, per Prop. 34. rectangulum G, FD aequale est rectangulo AFC una cum ipso EFB. Et quoniam rectangulum G, FD est ad ipsum EFB, ut recta OQ ad ipsam QP, igitur, dividendo, rectangulum AFC est ad ipsum EFB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data.

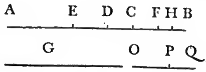
Puncta autem ipsi E propiora majores faciunt rationes quam puncta remotiora. Sit enim punctum F propius ipsi E quam est punctum H; et quoniam ad finem Prop. 48. ostensum est rationem rectanguli G, FD ad ipsum EFB, majorem esse ratione ipsius G, HD ad rectangulum EHB, dividendo, et per Prop. 34. erit ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, major ratione rectanguli AHC ad ipsum EHB.

PROP. LXI. PROB. II. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quintum F invenire in altero ex segmentis extremis, puta inter C et B puncta quod faciet rectangulum AFC a segmentis inter ipsum et punctum extremum A quod ad easdem est partes ipsius F ad quas sunt puncta media, et punctum medium C ipsi F propius, ad rectangulum EFB a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, in ratione data."

X 2

Factum puta; sit scilicet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Inter E, C puncta sit punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; igitur si ponatur recta G aequalis ipsis AE, CB simul, erit per partem 2dam Prop. 21. rectangulum G, DC aequale rectangulo ECB. Datum autem est rectangulum ECB, et data est recta G, igitur data est DC, et punctum D datum. Quoniam vero punctum F est, ex hypothesi, inter C, B puncta, erit, per Prop. 28. rectangulum AFC una cum ipso EFB aequale rectangulo G, DF. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, igitur, componendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB. Quoniam igitur data sunt puncta E, D, B, et data est recta G, deductum est ad Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1. hoc est ad Prop. 46. cujus ope invenietur punctum F inter D, B puncta.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta OP ad ipsam PQ, et inveniatur inter E et C punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB, quod fiet si ponatur recta G aequalis ipsis AE, CB simul, et ut G ad EC, ita fiat BC ad CD, erit enim rectangulum G, DC aequale rectangulo ECB; quare, per conversam partis 2dae Prop. 21. erit rectangulum ADC aequale ipsi EDB*. Dein per compositionem Problematis in Prop. 46.

* Vel ita invenietur punctum D; quoniam est AD ad DE, ut BD ad DC, [b] 12. 5. dividendo, ut AE ad ED, ita est BC ad CD, et ut [b] AE una cum CB ad EC,

datis in recta linea tribus punctis E, D, B, et data recta G, inveniatur inter puncta D, B punctum F quod faciet rectangulum G, DF ad ipsum EFB in data ratione quam habet OQ ad QP. Est autem recta OQ major ipsâ QP, et propterea rectangulum G, DF majus est ipso EFB; igitur, per Cor. Prop. 28. erit punctum F inter puncta C, B, quare, per Prop. 28. rectangulum G, DF est aequale rectangulo AFC una cum ipso EFB. Et quoniam rectangulum G, DF est ad ipsum EFB, ut recta OQ ad rectam QP, igitur, dividendo, excessus ipsius G, DF supra rectangulum EFB, hoc est [a] rectangulum AFC est ad ipsum EFB, ut recta OP ad ipsam PQ, hoc est in ratione data. [a] Prop. 28.

Puncta autem, ut H, propiora ipsi B majores faciunt rationes quam puncta remotiora ut F. Quoniam enim ostensum est in Prop. 46. rationem rectanguli G, DH ad ipsum EHB, majorem esse ratione rectanguli G, DF ad ipsum EFB; erit, dividendo, et per Prop. 28. ratio rectanguli AHC ad ipsum EHB, major ratione ipsius AFC ad rectangulum EFB.

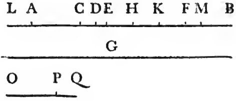
Si autem requiratur ut punctum F inveniatur in segmento AE, scriptis notis alphabeticis in schemate ordine inverso, fiet tum analysis tum compositio iisdem verbis cum praecedentibus in hac Propositione.

ita BC ad CD. Datae autem sunt AE, CB, EC, data igitur est CD, datumque erit punctum D. Fiat igitur ut AE una cum CB ad EC, ita BC ad CD, et [c] ut AE ad ED, ita erit BC ad CD; quare, componendo, ut AD ad DE, ita BD ad DC; igitur rectangulum ADC aequale est rectangulo EDB. [c] 19. 5.

PROP. LXII. PROB. II. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
" tum F invenire in altero ex ſegmentis extremis EB quod
" faciet rectangulum AFC a ſegmentis inter ipſum et punc-
" tum extremum A quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas
" ſunt puncta media, punctumque medium C ab ipſo remo-
" tius ad rectangulum EFB a ſegmentis inter ipſum et reli-
" qua puncta, in ratione data."

Factum puta; ſit ſcilicet punctum F inveniendum inter E et B quod faciet rectangulum AFC ad ipſum EFB in ratione data. Inveniatur ope Caſ. 1. Prop. 57. punctum D inter C et E quod facit rectangulum ADC aequale ipſi BDE. Si igitur ponatur recta G aequalis ipſis AE, CB ſimul, erit, per Prop. 25. rectangulum AFC una cum ipſo EFB aequale rectangulo G, DF. Data autem eſt



ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB, igitur, componendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad ipſum EFB. Data autem ſunt puncta D, E, B, et data eſt recta G, et eſt punctum F inter E et B; ergo deductum eſt Problema ad Epitagma 3. Prob. 3. Lib. 1. hoc eſt ad Prop. 47. cujus ope invenietur punctum F.

Quoniam vero Problema ad quod deductum eſt hoc determinationem habet, et non ſemper conſtrui poteſt, neque

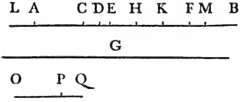
hoc ſemper conſtrui poterit. Oſtenſum autem eſt in Prop. 47. Datis in recta linea tribus punctis D, E, B, et datâ rectâ G, ſi inter BD, DE ſumatur media proportionalis DH, punctum H facere minimam rationem rectanguli G, DH ad rectangulum EHB, hoc eſt ſi ſumatur aliud quodvis punctum F inter E, B puncta, fore rationem rectanguli G, DH ad ipſum EHB minorem ratione rectanguli G, DF ad rectangulum EFB. Quoniam vero rectangulum ADC aequale eſt ipſi BDE, rectangulum AHC una cum ipſo EHB aequale eſt rectangulo G, DH per Prop. 25. Et ſimiliter rectangulum AFC una cum ipſo EFB eſt aequale rectangulo G, DF; igitur, dividendo, erit ratio rectanguli AHC ad rectangulum EHB minor ratione rectanguli AFC ad ipſum EFB, et propterea punctum H facit minimam rationem. Et quoniam in determinatione Problematis in Prop. 47. oſtenſum eſt, poſitâ HK aequali ipſi EH, fore rationem G ad BK eandem minimae rationi quam ſcilicet habet rectangulum G, DH ad ipſum EHB; ſi fiat LB aequalis ipſi G, dividendo, erit ratio LK ad KB eadem minimae rationi rectanguli AHC ad ipſum EHB.

Punctum autem H quod facit minimam rationem ita determinatur. Quoniam proportionales ſunt BD, DH, DE, erit[a] [a] 2. cor. 20. 6.
BD ad DE, ut (quadratum ex BD ad quadratum ex DH, hoc eſt ut) quadratum ex BH ad quadratum ex HE. Igitur rectangulum G, DB eſt ad ipſum G, DE, ut quadratum ex BH ad quadratum ex HE. Quoniam vero rectangulum ADC aequale eſt ipſi BDE, et eſt recta G aequalis ipſis AE, CB ſimul, erit rectangulum G, DB aequale rectangulo ABC, et rectangulum G, DE aequale ipſi AEC, per partem ſcilicet 3tiam et 4tam Prop. 20. Eſt igitur rectangulum ABC ad ipſum AEC,

ut quadratum ex BH ad quadratum ex HE. Atque haec ipsa est determinatio quam Pappus memorat in Prop. 62. Lib. 7.

Componetur hoc ita,

Secetur EB in H, ita ut quadratum ex BH sit ad quadratum ex HE, ut rectangulum ABC ad ipsum AEC, punctumque H erit id quod facit minimam rationem. Nam ex hac proportione et parte 3tia et 4ta Prop. 20. erit quadratum ex BH ad quadratum ex HE, ut rectangulum G, DB ad ipsum G, DE, hoc est ut recta BD ad ipsam DE. Igitur, per Prop. 16. rectangulum BDE aequale est quadrato ex DH, et propterea DH media est proportionalis inter ipsas BD, DE; ideoque, ex praemissis, punctum H facit minimam rationem. Potest etiam punctum H inveniri si fiat ut rectangulum BAE ad ipsum BCE, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, ut constat ex Prop. 18.



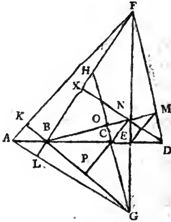
Et puncta ipsi H propiora minores faciunt rationes quam puncta remotiora ad easdem partes puncti H. Sit enim punctum F propius ipsi H quam punctum M ad easdem partes puncti H. Igitur per ea quae ostensa sunt in determinatione Problematis in Prop. 47. erit ratio rectanguli G, FD ad ipsum EFB minor ratione rectanguli G, MD ad ipsum EMB; quare, dividendo, et per Prop. 25. ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB minor est ratione rectanguli AMC ad rectangulum EMB.

Componetur vero Problema ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta OP ad ipsam PQ, inveniantur autem puncta D, H, K, L et recta G, ut in praemissis ostensum fuit. Et si ratio OP ad PQ eadem sit rationi minimae, hoc est rationi LK ad KB, sive rationi rectanguli AHC ad ipsum EHB, punctum H, idque solum, Problema efficiet, ut in praemissis ostensum est. Si vero ratio data OP ad PQ non eadem sit rationi huic minimae, erit, si Problema construi potest, eâdem ratione necessario major. Sit igitur ratio OP ad PQ major ratione LK ad KB, et, componendo, ratio OQ ad QP major erit ratione LB, hoc est ipsius G ad KB. Quare, per Compositionem Problematis in Prop. 47. Datis in recta linea tribus punctis D, E, B, et datâ rectâ G, possunt inter E et B inveniri duo puncta quorum utrumlibet, quod sit F, faciet rationem rectanguli G, FD ad ipsum EFB eandem rationi datae quam habet OQ ad QP. Igitur, dividendo, ratio excessus rectanguli G, FD supra ipsum EFB, hoc est per Prop. 25. ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, eadem est rationi rectae OP ad ipsam PQ, hoc est rationi datae.

Ratio autem minima ita determinatur. Ostensum fuit, Datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D si fiat ut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita quadratum ex DE ad quadratum ex EC, fore E punctum quod facit minimam rationem rectanguli AEB ad rectangulum CED. Ostendendum nunc est rationem hanc eandem esse ei quam habet quadratum rectae lineae quae constat ex ea quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea quae potest rectangulum AD, BC ad quadratum ex DC.

Ducatur a puncto E ipsi AD ad rectos angulos EF, et producatur, sitque rectangulo ADB aequale quadratum ex DF, et ipsi FD parallela ducatur CG. Quoniam igitur ut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita est quadratum (ex DE ad quadratum ex EC, hoc est quadratum) ex DF ad quadratum ex CG; atque est rectangulum ADB quadrato ex DF aequale, erit et rectangulum ACB aequale quadrato ex CG. Jungantur AF, FB, AG, GB, occurratque GC ipsi BF in H; itaque cum rectangulum ADB sit aequale quadrato ex DF, angulus BFD aequalis est [a] angulo FAB; est autem et BGC angulus angulo BAG aequalis [a], quia rectangulum ACB aequale est quadrato ex CG; sed et angulus BFD angulo [b] BHG; igitur anguli BHG, BGH simul, hoc est, si producatur GB ut occurrat ipsi AF in K, angulus KBF aequalis est angulo LAK; quare in circulo sunt [c] A, L, B, K puncta. Et per Prop. 40. anguli ad K, L puncta recti erunt. Ducatur ad FD perpendicularis BM quae occurrat ipsi EF in N, et juncta DN ad X producatur. Perpendicularis igitur est DX ad FL*, et ipsi GL parallela. Occurrat GC ipsi BN in O,



[a] 17, et 6. 6.
[b] 29. 1.
[c] conv. 22. 3.

* Perpendicularis igitur est DX ad FL] Hoc prolixe conatur ostendere Commandinus in commentario suo ad literam M in pag. 198. b. Coll. Math. Pappi; verum ponit circulos FEC, AEK, in figura sua ad hanc notam, se mu-

ergo perpendicularis est ad BN, est enim FD ad BM perpendicularis. Angulus autem BGC angulo GAC est aequalis, ut prius ostensum. Sed angulus quidem BGC aequalis est angulo CNB in circulo †, angulus autem GAC aequalis est angulo BDN in parallelis, ergo et angulus CNB angulo BDN est aequalis, ac propterea [d] rectangulum DBC aequale est quadrato ex BN. Quoniam autem in triangulo BDF acta est perpendicularis DNX, et inflexae sunt ad ipsam FN, NB erit quadratorum ex FD, DB excessus aequalis excessui quadratorum ex FN, NB. Sed excessus quadratorum ex FD, DB est ‡ ADB rectangulum, ergo et quadratorum ex FN, NB excessus est idem rectangulum ABD. Est autem et rectangulum DBC aequale quadrato ex BN; quare NF potest rectangulum AC, BD §. Rursus, quoniam quadratorum NG, NB excessus est

[d] 4. et 17. 6.

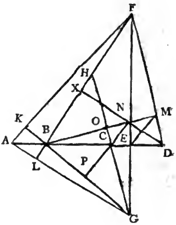
tuo contingere, non autem demonstrat, ut observatum est a Herigonio in pag. 318. tom. 1. Cursus sui Mathematici, unde dicit eum nihil probare, quod quidem verum est; et Herigonius satis longa demonstratione indirecte idem ostendit. Verum directe et breviter ita demonstratur, viz. Quoniam anguli DMN, DEN recti sunt, puncta D, E, N, M sunt in circulo, ut et puncta F, B, E, M. Juncta igitur EM, erit angulus MDN aequalis (angulo MEN, sive MEF, hoc est) angulo MBF; et in triangulis FDX, MBF, communis est angulus MFX; aequalis igitur est reliquus angulus DXF reliquo BMF, angulo scilicet recto. Unde DX perpendicularis est ad FL.

† Sed angulus quidem BGC aequalis est angulo CNB in circulo] Producatur enim NC ad BG in P; et quoniam in triangulo BNG est BE perpendicularis ad NG, et GO ad BN, erit, per ea quae ostensa sunt in nota ad *, NP perpendicularis ad BG. Sunt igitur G, P, O, N puncta in circulo, quare angulus PGO aequalis est PNO in eodem segmento, hoc est angulus BGC aequalis ipsi CNB. COMMANDINUS.

‡ Sed excessus quadratorum ex FN, NB est ABD rectangulum] Quadratum enim ex FD aequale est rectangulo ADB cujus excessus supra quadratum ex DB est rectangulum ABD per 3. 2. COMMAND.

§ Quoniam enim excessus quadratorum ex FN, NB est rectangulum ABD,

aequalis exceſſui quadratorum ex GC, CB, quadratorum autem ex GC, CB exceſſus eſt ABC rectangulum *; erit quadratorum ex NG, NB exceſſus idem rectangulum ABC. Atque eſt rectangulum DBC aequale quadrato ex BN; ergo NG poteſt rectangulum AD, BC. † Sed et FN poteſt rectangulum AC, BD. Itaque quoniam rectus eſt angulus FKG, et perpendicularis AE "ad FG," erit rectangulum AEB rectangulo FEG aequale. ‡ Ergo ut rectangulum AEB ad rectangulum CED, ita eſt rectangulum FEG ad rectangulum CED. Ut autem rectangulum FEG ad rectangulum CED, ita quadratum ex FG ad quadratum ex CD §. Et



erit quadratum ex FN aequale rectangulo ABD et quadrato ex NB ſimul, hoc eſt rectangulis ABD, DBC ſimul, hoc eſt per 1. 2. rectangulo AC, BD; hoc eſt recta FN poteſt rectangulum AC, BD. COMMAND.

* Quoniam quadratum ex CG aequale eſt rectangulo ACB, exceſſus ejus ſupra quadratum ex CB eſt rectangulum ABC per 3. 2.

† Quoniam enim quadratorum ex NG, NB exceſſus eſt rectangulum ABC, erit quadratum ex NG aequale rectangulo ABC et quadrato ex NB ſimul, hoc eſt rectangulis ABC, DBC ſimul, hoc eſt rectangulo AD, BC. Igitur recta NG poteſt rectangulum AD, BC.

‡ Aequiangula enim ſunt triangula AEF, GEB, quia utrumque aequiangulum eſt ipſi AKB; igitur ut AE ad EF, ita EG ad EB.

§ Quoniam enim parallelae ſunt FD, GC, erit [2. 6.] FE ad ED, ut FG ad DC; ſimilia autem ſunt rectangula FEG, DEC, igitur [22. 6.] rectangulum FEG eſt ad ipſum DEC, ut quadratum ex FG ad quadratum ex CD.

ut igitur rectangulum AEB ad rectangulum CED, ita quadratum ex FG ad quadratum ex CD. Estque rectanguli quidem AEB ad rectangulum CED singularis et minima ratio; recta vero linea FEG constat ex ea FN quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea NG quae potest rectangulum AD, BC. ratio igitur singularis et minima, eadem est quae quadrati rectae lineae quae constat ex ea quae potest rectangulum AC, BD, et ex ea quae potest rectangulum AD, BC, ad quadratum ex CD.

Atque haec est ipsius Apollonii Determinatio, ejusque Demonstratio, magno quidem Geometra digna, quas Pappus servavit in Prop. 62. Libri sui septimi, quam Propositionem pertinaci investigatione hic in pristinam integritatem restituimus. Multum enim depravata habetur in codicibus Graecis, ut pleraeque Pappi Propositiones Librariorum incuria et ignorantia. Unde Federicus Commandinus, qui in veterum Geometrarum scriptis, praesertim quidem Pappi Alexandrini, emaculandis, maximam et utilissimam adhibuit diligentiam, bonus licet Geometra, Propositionem hanc restituere minime potuit. Commentarii enim prolixi quos in eam scripsit ad notas in margine Z, α, β, nihil ad rem faciunt, quoniam ad textum Pappi corruptum explicandum adferuntur, qui quidem, ut habetur in Commandini versione et manuscriptis Graecis, explicari minime potest. Non enim hunc locum corruptum esse videbat Commandinus, qui in aliis locis manuscriptum corruptum esse putat quando integer est, et in quibusdam locis quaedam ut supervacanea omittit, quae quidem necessaria sunt. Et quidem materiam hanc non satis intel-

lexit, ut ingenue fatetur in commentario ad notam A ad Prop. praecedentem 61. Lib. 7. Pappi, ubi haec habet "Graecus codex ὁ μοναχὸς λόγος καὶ ἐλαχιστος ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΝ. Quibus verbis quid significetur, quidque per monachos, et Epitagma in his Lemmatibus intelligat, satis percipi non potest, cum Apollonii libris careamus, in quos ea conscripta sunt."

P R O B. III.

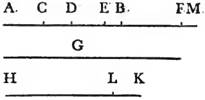
" DATIS in recta linea quatuor punctis, quintum invenire extra data puncta, ad utrasvis partes, quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et duo ex punctis datis, ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta, in ratione data."

PROP. LXIII. PROB. III. EPITAGMA 1.

" DATA sint puncta A, C, E, B quintum invenire extra puncta data, ad partes scilicet puncti B, quod faciet rectangulum a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C ab ipso remotiora, ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, in ratione data. Patet autem rationem datam debere esse majoris ad minorem."

Factum puta; sit scilicet punctum F inveniendum quod faciet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data. Primo autem inveniatur inter puncta C, E punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE, ope scilicet Cas. 1. Prop.

57. Igitur si utrisque AE, CB aequalis ponatur recta G, erit, per Prop. 26. rectangulum AFC aequale rectangulis EFB, G, DF simul. Data autem est ratio rectanguli AFC ad ipsum EFB, quare, dividendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad rectangulum EFB. Igitur deductum est ad Problema in Prop. 48.

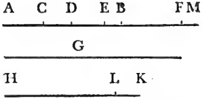


datis scilicet in recta linea tribus punctis D, E, B invenire extra ipsa, ad partes puncti B, quartum F quod faciet rectangulum a data recta G et ipsa DF, ad rectangulum EFB in ratione data. Datum igitur est punctum F.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta HK ad rectam KL; et invento puncto D ut dictum fuit, per Prop. 48. datis in recta linea tribus punctis D, E, B, et rectâ lineâ G aequalis scilicet ipsis AE, CB simul, inveniatur in DB producta ad partes B, punctum F quod facit rectangulum a data recta G et segmento FD inter punctum F et punctum D ab eo remotissimum ad rectangulum EFB a segmentis inter F et reliqua puncta E, B, in ratione data quam habet HL ad LK; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, FD est ad ipsum EFB, ut recta HL ad ipsam LK, erit, componendo, rectangulum EFB una cum ipso G, DF ad rectangulum EFB, ut HK ad KL. Rectangula autem EFB, G, DF simul aequalia sunt rectangulo AFC, per Prop. 26. quod propterea est ad rectangulum EFB, ut HK ad KL, hoc est in ratione data.

Puncta autem, ut F, propiora puncto B majores faciunt rationes quam puncta remotiora, ut M. Nam per Prop. 48. ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB major est ratione rectanguli G, DM ad rectangulum EMB; igitur, componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipso G, DF ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli EMB una cum ipso G, DM ad ipsum EMB, hoc est, per Prop. 26. ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli AMC ad ipsum EMB. Puncta igitur propiora ipsi B faciunt majores rationes quam puncta remotiora.

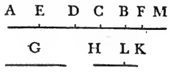


PROP. LXIV. PROB. III. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
" tum invenire extra data puncta, quod faciet rectangulum
" a segmentis inter ipsum et punctum A ab eo remotissimum
" et punctum medium C quod ipsi propius est, ad rectangu-
" lum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B in rati-
" one data. Patet autem rationem datam debere esse majoris
" ad minorem."

Factum puta; sitque F punctum inveniendum quod faciet rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data; et ope Cas. 1. Prop. 58. inveniatur inter puncta E, C punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi BDE. Igitur per

Prop. 29. ſi utriſque AE, CB aequalis ponatur recta G, erit rectangulum AFC aequale rectangulo EFB una cum ipſo G, DF. Data autem eſt ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB, igitur, dividendo, data erit ratio rectanguli G, DF ad ipſum EFB. Deductum propterea eſt ad Problema in Prop. 49. datis ſcilicet in recta linea tribus punctis E, D, B invenire extra ipſa, ad partes puncti B, quartum F quod faciet rectangulum a data recta G et ſegmento DF inter F et punctum medium D ad rectangulum EFB in ratione data. Datum igitur eſt punctum F.

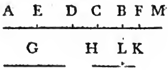


Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipſum EFB ea quam habet recta HK ad rectam KL; et per Prop. 49. datis in recta linea tribus punctis E, D, B, et rectâ lineâ G aequalis ſcilicet ipſis AE, CB ſimul, inveniatur in DB producta ad partes B, punctum F quod faciet rectangulum a data recta G, et ſegmento FD inter F et punctum medium D ad rectangulum EFB a ſegmentis inter F et reliqua puncta E, B, in ratione data quam habet HL ad LK; erit F punctum inveniendum. Quoniam enim rectangulum G, FD eſt ad ipſum EFB, ut recta HL ad ipſam LK, erit, componendo, rectangulum EFB una cum ipſo G, FD ad rectangulum EFB, ut HK ad KL. Rectangula autem EFB, G, FD ſimul aequalia ſunt rectangulo AFC, per Prop. 29. quod propterea eſt ad rectangulum EFB, in data ratione HK ad KL.

Puncta autem, ut F, propiora puncto B majores faciunt ra-

tiones quam puncta remotiora, ut M. Nam, per Prop. 49. ratio rectanguli G, DF ad ipsum EFB major est ratione rectanguli G, DM ad ipsum EMB; igitur, componendo, ratio rectanguli EFB una cum ipso G, DF ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli EMB una cum ipso G, DM ad rectangulum EMB; hoc est, per Prop. 29. ratio rectanguli AFC ad rectangulum EFB, major est ratione rectanguli AMC ad ipsum EMB. Puncta igitur propiora ipsi B majores faciunt rationes quam puncta remotiora.



PROP. LXV. PROB. III. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C, quin-
" tum invenire extra data puncta quod faciet rectangulum a
" segmentis inter ipsum et puncta extrema A, C ad rectan-
" gulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta E, B, in
" ratione data.

CAS. 1. Quando ratio data est aequalis ad aequalem.

Factum puta; sit scilicet D punctum inveniendum quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Est igitur AD ad DE, ut BD ad DC, et, dividendo, ut AE ad ED, ita BC ad
[a] cor. 19. 5. CD; quare [a] ut excessus ipsarum AE, BC ad EC, ita est BC ad CD. Datae autem sunt AE, BC, EC, data igitur est CD, datumque erit punctum D. Quoniam vero est AE ad ED, ut

BC ad CD, et eſt ED major CD, erit AE major BC, hoc eſt punctum D neceſſario cadit ad partes rectae AC ad quas eſt minor rectarum AE, BC, ad partes ſcilicet ipſius BC.

Componetur ita,

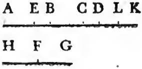
Ponatur a puncto E verſus A recta EF aequalis ipſi BC; et ut AF ad EC, ita fiat BC ad CD, igitur [b] eſt AF et BC ſimul, [b] 12. 5.
hoc eſt AE ad ED, ut BC ad CD, et, componendo, ut AD ad DE, ita BD ad DC. Rectangulum igitur ADC eſt aequale rectangulo EDB. Si vero BC major fuerit quam AE, punctum D eodem modo invenietur in CA producta ad partes A. Haec autem eſt pars ſecunda Prop. 22.



Cas. 2. Quando ratio data eſt minoris ad majorem.

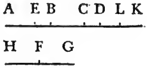
Primò, aequales inter ſe ſint AE, BC, ſitque D punctum inveniendum.

Factum puta; habeat ſcilicet rectangulum ADC datam rationem ad rectangulum EDB. Quoniam vero aequales ſunt AE, BC, et eſt punctum D in AC producta, erit, per Prop. 38. rectangulum EDB aequale rectangulis ADC, ECB ſimul. Rectangula igitur ADC, ECB ſimul datam habent rationem ad rectangulum ADC, quare, dividendo, data eſt ratio rectanguli ECB ad rectangulum ADC. Datum autem eſt ECB, quia data ſunt puncta E, B, C; datum igitur eſt rectangulum ADC, et data eſt recta AC; quare [a] [a] 85. Dat.
data eſt CD, punctumque C propterea datum eſt.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum ADC ad ipsum EDB ea quam habet recta FG ad ipsam GH, et ut HF ad FG, ita fiat rectangulum ECB ad aliud, quod invenietur faciendo ut HF ad FG, ita EC ad CK, nam ita erit rectangulum ECB ad ipsum BCK; et ad rectam AC applicetur rectangulum aequale ipsi BCK, excedens quadrato, sitque D punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C; erit D punctum inveniendum. Quoniam enim, ex constructione, rectangulum ADC aequale est ipsi BCK, erit rectangulum ECB ad ipsum ADC, (hoc est ad BCK, ut EC ad CK, hoc est) ut HF ad FG; et, componendo, erit rectangulum ADC una cum ipso ECB ad rectangulum ADC, ut HG ad GF; et, invertendo, erit rectangulum ADC ad ADC una cum ipso ECB, hoc est ad ipsum EDB, ut FG ad GH, hoc est in ratione data.

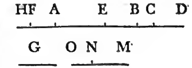


Puncta autem, ut L, remotiora a puncto C majores faciunt rationes quam puncta propiora, ut D. Erit enim rectangulum ALC majus ipso ADC, et propterea rectangulum ECB habet ad rectangulum ALC minorem rationem quam ad rectangulum ADC; et, componendo, rectangulum ALC una cum ipso ECB, hoc est, per Prop. 38. rectangulum ELB minorem habet rationem ad ipsum ALC, quam rectangulum ADC una cum ipso ECB, hoc est rectangulum EDB ad ipsum ADC. Igitur, invertendo, rectangulum ALC majorem habet rationem ad ELB, quam rectangulum ADC ad ipsum EDB.

Secundò, ſint AE, BC inaequales, major autem AE.

Sit F punctum inveniendum, quod ſcilicet faciet rectangulum AFC ad ipſum EFB in data ratione minoris ad majorem. Poteſt autem requiri ut punctum F vel cadat in AC producta ad partes A majoris ſegmenti, vel in eâdem producta ad partes C minoris ſegmenti.

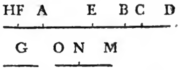
1mo, Requiratur ut F cadat in AC producta ad partes A, et ope Caſ. 1. hujus Problematis inveniatur punctum D extra data puncta quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB; et quoniam, ex hypotheſi, major eſt recta AE ipsâ BC, cadet punctum D in AC producta ad partes C, ut in primo caſu oſtenſum; et ſit G exceſſus ipſarum AE, BC. Quoniam igitur eſt rectangulum ADC aequale ipſi EDB, et eſt punctum F extra rectam AC ad partes puncti A, erit, per Prop. 35. rectangulum EFB aequale rectangulo AFC una cum ipſo G, DF. Ex hypotheſi autem data eſt ratio rectanguli EFB ad ipſum AFC, igitur, dividendo, data eſt ratio rectanguli G, DF ad ipſum AFC; deductum propterea eſt ad Problema in Prop. 48. datis ſcilicet in recta linea tribus punctis D, C, A invenire extra ipſa, ad partes puncti A, quartum F quod faciet rectangulum a data recta G et ipsâ DF, ad rectangulum AFC in ratione data. Datum igitur eſt punctum F.



Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipſum EFB ea quam habet recta MN ad ipſam MO; et ope Caſ. 1. inveniatur punctum D quod facit rectangulum ADC

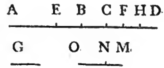
aequale ipſi EDB; dein, per Prop. 48. datis in recta linea tribus punctis D, C, A, et rectâ lineâ G aequalis ſcilicet exceſſui ipſarum AE, BC, inveniatur in DA producta ad partes A, punctum F quod facit rectangulum G, DF a data recta G et ſegmento FD inter punctum F et punctum ab eo remotiſſimum D, ad rectangulum AFC a ſegmentis inter F et reliqua puncta A, C, in data ratione quam habet recta ON ad ipſam NM; erit F punctum inveniendum. Erit enim, componendo, rectangulum AFC una cum ipſo G, FD ad rectangulum AFC, ut recta OM ad MN; et, invertendo, rectangulum AFC eſt ad rectangulum AFC una cum G, FD, hoc eſt, per Prop. 35. ad rectangulum EFB, ut MN ad MO, hoc eſt in ratione data.



Puncta autem, ut H, remotiora a puncto A majores faciunt rationes quam puncta propiora, ut F. Nam, per Prop. 48. rectangulum G, HD habet ad ipſum AHC minorem rationem quam rectangulum G, FD habet ad ipſum AFC; igitur, componendo, ratio rectanguli AHC una cum ipſo G, HD, hoc eſt, per Prop. 35. ratio ipſius EHB ad AHC, minor eſt ratione rectanguli EFB ad ipſum AFC, et, invertendo, ratio rectanguli AHC ad ipſum EHB major eſt ratione rectanguli AFC ad rectangulum EFB. Puncta igitur remotiora a puncto A majores faciunt rationes quam puncta ipſi propiora. Ubicunque autem ſumatur punctum F in CA producta ad partes A, erit rectangulum AFC minus ipſo EFB; oſtenſum enim eſt rectangulum EFB excedere rectangulum AFC ipſo G, FD.

2do, Requiratur ut punctum F cadat in AC producta ad partes C.

Sit F punctum inveniendum, quod scilicet facit rectangulum AFC ad ipsum EFB in ratione data; et inveniatur punctum D extra puncta data quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB. Et quoniam, ex hypothesi, rectangulum AFC minus est ipso EFB, ratio enim data est minoris ad majorem, punctum F necessario cadet inter puncta C, D per Cor. Prop. 33. Quoniam igitur rectangulum ADC aequale est ipsi EDB, et est punctum F inter C et D, si ponatur recta G aequalis excessui ipsarum AE, BC, erit, per Prop. 32. rectangulum EFB aequale rectangulo AFC una cum ipso G, FD; data autem est ratio rectanguli EFB ad ipsum AFC, igitur, dividendo, data est ratio rectanguli G, FD ad ipsum AFC. Ergo deductum est ad Problema in Prop. 45. datis scilicet in recta linea tribus punctis A, C, D, et datâ rectâ G, invenire inter puncta C, D quartum F quod faciet rectangulum a data recta G et ipsa DF ad rectangulum AFC in data ratione. Datum igitur est punctum F.

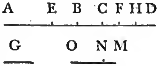


Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipsum EFB ea quam habet recta MN ad ipsam MO, et ope Cas. 1. inveniatur punctum D quod facit rectangulum ADC aequale ipsi EDB; dein, per Prop. 45. datis in recta linea tribus punctis A, C, D et recta linea G aequalis scilicet excessui ipsarum AE, BC inveniatur inter puncta C, D punctum F

quod facit rectangulum a data recta G, et ſegmento FD, ad rectangulum AFC a ſegmentis inter F et puncta A, C quae ſunt ad eaſdem partes ipſius F, in ratione data quam habet recta ON ad ipſam NM; erit F punctum inveniendum. Componendo enim, rectangulum AFC una cum ipſo G, FD eſt ad rectangulum AFC, ut recta OM ad ipſam MN, et, invertendo, rectangulum AFC eſt ad AFC una cum ipſo G, FD, hoc eſt, per Prop. 32. ad rectangulum EFB, ut MN ad MO, hoc eſt in ratione data.

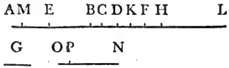
Puncta autem, ut H, remotiora a puncto C majores faciunt rationes quam puncta propiora, ut F. Nam, per Prop. 45. rectangulum G, HD habet ad ipſum AHC minorem rationem quam rectangulum G, FD ad ipſum AFC; igitur, componendo, ratio rectanguli AHC una cum ipſo G, HD ad ipſum AHC, minor eſt ratione rectanguli AFC una cum ipſo G, FD ad rectangulum AFC; et, invertendo, ratio rectanguli AHC ad AHC una cum ipſo G, HD, hoc eſt, per Prop. 32. ad rectangulum EHB major eſt ratione ipſius AFC ad AFC una cum G, FD, hoc eſt ad rectangulum EFB. Puncta igitur remotiora a puncto C majores faciunt rationes quam puncta propiora.



Cas. 3. Quando ratio data eſt majoris ad minorem; ſit autem AE major BC.

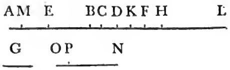
Factum puta; ſit ſcilicet F punctum inveniendum quod facit rectangulum AFC ad ipſum EFB in ratione data majoris ad minorem; et inveniatur punctum D extra data puncta

quod facit rectangulum ADC aequale ipſi EDB. Quoniam igitur, ex hypotheſi, rectangulum AFC majus eſt ipſo EFB, neceſſe eſt ut inaequales ſint AE, BC, quia ſi aequales eſſent, rectangulum AFC minus eſſet ipſo EFB per Prop. 38. Punctum autem D cadet ad partes minoris ſegmenti BC, ut prius oſtenſum in Caſ. 1. cadet vero punctum F in AD producta ad partes D, per Cor. Prop. 33. ponatur recta G aequalis exceſſui ipſarum AE, BC, et quoniam rectangulum ADC aequale eſt ipſi EDB, erit, per Prop. 33. rectangulum AFC aequale ipſi EFB una cum rectangulo G, FD. Data autem eſt ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB, igitur, dividendo, data eſt ratio rectanguli G, FD ad rectangulum EFB. Deductum igitur eſt ad Problema in Prop. 50. datis ſcilicet in recta linea tribus punctis E, B, D et recta G, invenire extra puncta data quartum F quod faciet rectangulum G, FD ad ipſum EFB in ratione data. Datum igitur eſt punctum F.



Quoniam vero Problema ad quod hoc deductum eſt determinationem habet, et non ſemper conſtrui poteſt, neque hoc in omni caſu conſtrui poterit, ſed determinationem habebit. Oſtenſum autem eſt in Prop. 50. datis in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, ſi producatur ED ad H, ut DH ſit media proportionalis inter ED et DB, punctum H facere maximam rationem, hoc eſt ſi ſumatur aliud quodvis punctum F in AD producta ad partes D, fore rationem rectanguli G, HD ad ipſum EHB majorem ratione rectanguli G, FD ad

ipſum EFB. Eſt autem, per Prop. 33. rectangulum AHC aequale rectangulis EHB, G,HD ſimul; et rectangulum AFC aequale ipſis EFB, G,FD ſimul. Erit igitur, componendo, ratio rectanguli AHC ad ipſum EHB major ratione rectanguli AFC ad ipſum EFB. Punctum igitur H facit maximam rationem. Et quoniam in Prop. 50. oſtenſum eſt, ſi producatur BH ad L ut aequales ſint BH, HL fore rationem G ad EL eandem maximae rationi quam ſcilicet habet rectangulum G,HD ad ipſum EHB, factâ EM aequali ipſi G, erit, componendo, ratio ML ad LE eadem rationi rectanguli EHB una cum G, HD ad ipſum EHB, hoc eſt rationi maximae rectanguli AHC ad ipſum EHB.



Punctum autem H quod facit maximam rationem ita determinatur. Quoniam proportionales ſunt ED, DH, DB, erit
a 12. 5. [a] ED ad DH, ut EH ad HB, igitur ut quadratum ex ED ad
b 22. 6. quadratum ex DH [b], hoc eſt ut recta ED ad ipſam DB [c], ita
c 2.cor. 20. 6. quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Ut autem ED ad DB, ita eſt rectangulum G,ED ad ipſum G,DB; et per partem 4. Prop. 22. rectangulum G,ED aequale eſt rectangulo AEC, et rectangulum G,DB, per partem 3. ejuſdem Prop. aequale eſt ipſi ABC, quia ſcilicet aequalia ſunt ADC, EDB rect-
† angula; igitur rectangulum, AEC eſt ad ipſum ABC, ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB. Atque haec eſt Apollonii determinatio quam Pappus memorat in Prop. 64. Lib. 7.

Componetur hoc ita,

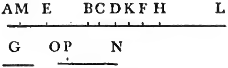
Fiat ut rectangulum AEC ad ipſum ABC, ita quadratum ex recta EH ad quadratum ex BH; punctum H erit id quod facit maximam rationem. Nam ex hac proportione, et parte 4. et 3. Prop. 22. ſequitur rectangulum G,ED eſſe ad ipſum G,DB, hoc eſt rectam ED eſſe ad ipſam DB, ut quadratum ex EH ad quadratum ex BH. Igitur, per Prop. 17. rectangulum EDB eſt aequale quadrato ex DH; et propterea proportionales ſunt ED, DH, DB; quare, ex praemiſſis, punctum H facit maximam rationem. Idem autem punctum H poteſt inveniri faciendo ut rectangulum BAE ad ipſum ECB, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, ut conſtat ex Prop. 19.

Puncta autem ipſi H propiora majores faciunt rationes quam puncta remotiora ad eaſdem partes ipſius H. Sit enim punctum F propius puncto H quam K, ſint autem ad eaſdem partes ipſius H. Igitur, per ea quae oſtenſa ſunt in determinatione Problematis in Prop. 50. ratio rectanguli G,FD ad ipſum EFB major eſt ratione rectanguli G,KD ad ipſum EKB, et, componendo, et per Prop. 33. ratio rectanguli AFC ad ipſum EFB major eſt ratione rectanguli AKC ad rectangulum EKB. Puncta igitur propiora ipſi H majores faciunt rationes quam puncta remotiora ad eaſdem ejus partes.

Componetur vero Problema in Caſu 3. ita,

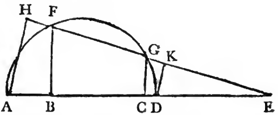
Sit ratio data quam habere debet rectangulum AFC ad ipſum EFB ea quam habet recta NO ad ipſam NP; et inveniantur puncta D, H, L, M, ut dictum fuit, ut et recta G; et ſi ratio NO ad NP eadem ſit rationi maximae, hoc eſt rationi quam habet recta ML ad rectam LE, ſive rationi rectanguli AHC ad ipſum EHB, punctum H, idque ſolum, Problema

efficiet, ut in praemiſſis oſtenſum eſt. Si vero ratio data NO ad NP non eadem ſit rationi ML ad LE, erit ea neceſſario minor ratione ML ad LE, quare, dividendo, ratio OP ad PN minor erit ratione rectae ME, hoc eſt ipſius G ad EL. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, D, et datâ rectâ G, inveniri poſſunt, per Compoſitionem Problematis in Prop. 50. duo puncta in ED producta ad partes D, quorum utrumlibet faciet rectangulum a ſegmento inter ipſum et punctum D ipſi proximum et data recta G ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B, in data ratione quam habet recta OP ad ipſam PN; inveniantur, ſitque F utrumlibet ex ipſis. Quoniam igitur, ex conſtructione, rectangulum G,FD eſt ad rectangulum EFB, ut OP ad PN, componendo, rectangulum EFB una cum ipſo G,FD, hoc eſt, per Prop. 33. rectangulum AFC eſt ad ipſum EFB, ut recta ON ad rectam NP, hoc eſt in ratione data.



* Vide ad † Ratio autem maxima determinatur ita. Oſtenſum fuit *, Datis in recta linea quatuor punctis A, B, C, D, ſi fiat, additâ quâdam DE, ut rectangulum ABD ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex CE, fore E punctum quod facit maximam rationem rectanguli AED ad rectangulum BEC. Oſtendendum nunc eſt rationem hanc eandem eſſe ei quam habet quadratum ex AD ad quadratum rectae lineae quae componitur ex ea quae poteſt rectangulum AC, BD, et ex ea quae poteſt contentum AB, CD.

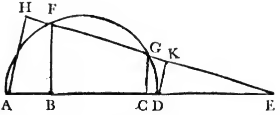
Defcribatur in recta linea AD femicirculus AFGD, et ad rectos angulos ipfi AD agantur BF, CG. Quoniam igitur factum eft ut ABD rectangulum ad rectangulum ACD, ita quadratum ex BE ad quadratum ex CE; rectangulo autem ABD aequale eft in femicirculo quadratum ex BF, et rectangulo ACD aequale quadratum ex CG; erit ut quadratum ex BF ad quadratum ex CG, ita quadratum ex BE ad id quod fit ex EC quadratum; et longitudine[d], ut BF ad CG, ita BE ad [d] 22. 6.



EC; funtque BF, CG parallelae, igitur recta linea eft quae per F, G, E tranfit; fit FGE et producatur, atque ad ipfam agantur perpendiculares AH, DK. Quoniam igitur fingularis et maxima ratio eft rectanguli AED ad rectangulum BEC, rectangulum autem FEG rectangulo AED eft aequale; erit fingularis et maxima ratio eadem quae rectanguli FEG ad rectangulum BEC. Ut autem rectangulum FEG ad rectangulum BEC, ita eft [d] ob parallelas rectas quadratum ex GE ad quadratum ex EC, hoc eft ut quadratum ex AE ad quadratum ex EH, in circulo enim funt puncta H, A, C, G, *

* In circulo enim funt puncta H, A, C, G] Quare rectangulum HEG aequale eft ipfi AEC, igitur ut GE ad EC, ita eft AE ad EH, et quadrata ex ipfis proportionalia. Commandinus oftendit angulum ad H rectum effe, ex eo

cum anguli ad H, C recti fint. Ut autem quadratum ex AE ad quadratum ex EH, ita eft quadratum ex AD ad quadratum ex HK ob parallelas. Singularis igitur et maxima ratio eft quadrati ex AD ad quadratum ex HK. Sed HG quidem poteft rectangulum AC, BD; GK vero poteft quod AB, CD continetur " fcilicet per Prop. 39." quare fingularis et maxima ratio eadem eft quae quadrati ex AD ad quadratum rectae lineae " HK," quae componitur ex ea " HG" quae poteft rectangulum AC, BD, et ea " GK" quae poteft id quod AB, CD continetur. Atque haec eft Apollonii determinatio et demonftratio quas fervavit Pappus in Prop. 64. Libri 7.



Obfervandum eft Epitagmata omnia hujus libri fecundi poffe duplici via folvi, vel fcilicet oftendendo rationem rectanguli G,FD ad rectangulum AFC, vel rationem ipfius G,FD ad rectangulum EFB datam effe; unde et duae erunt conftructiones quibus punctum F quod folvit Problema, duaeque quibus punctum quod facit maximam vel minimam rationem inveniatur. Ex. gr. In Epitagmate 3. Prob. 3. hoc eft

quod puncta H, A, C, G funt in circulo, non memor angulum ad H rectum effe ex conftructione.

in Prop. 65. data oſtenſa eſt ratio rectanguli G,FD ad ipſum EFB, et inde punctum H quod facit maximam rationem invenitur faciendo ut rectangulum AEC ad ipſum ABC, ita quadratum ex EH ad quadratum ex ipsâ HB. Sed aeque potuiſſet oſtendi rationem rectanguli G,FD ad rectangulum AFC datam eſſe, unde alia conſtructio ad inveniendum punctum H, ſimili analyſi, inveniretur, faciendo ſcilicet ut rectangulum BAE ad ipſum BCE, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC. Hoc autem fiet ut ſequitur; quoniam in Analyſi Problematis in Prop. 65. data oſtenſa eſt ratio rectanguli AFC, hoc eſt ipſius EFB una cum rectangulo G,FD ad rectangulum EFB, convertendo, data erit ratio rectanguli AFC ad ipſum G,FD. Datis igitur in recta linea tribus punctis A, C, D, et datâ rectâ G, poteſt, per Prop. 50. quartum F inveniri extra data puncta quod faciet rectangulum AFC ad ipſum G,FD in ratione data. Et ſi inter AD et DC media proportionalis inveniatur DH, oſtendetur ſimiliter ut in Prop. 65. punctum H facere maximam rationem rectanguli AHC ad ipſum EHB. Hoc autem punctum H idem eſt cum eo quod inventum fuit in Prop. 65. Quoniam enim rectangula ADC, EDB ſunt inter ſe aequalia, media proportionalis inter AD, DC eſt etiam media inter ED, DB.

Et ut in Prop. 65. oſtenſum fuit eſſe ut ED ad DB, ita quadratum ex EH ad quadratum ex HB, ita ſimiliter omnino oſtendetur eſſe ut AD ad DC, ita quadratum ex AH ad quadratum ex HC, et propterea rectangulum G,AD eſſe ad rectangulum G,DC, ut quadratum ex AH ad quadratum ex HC. Eſt autem, per partem 1. Prop. 22. rectangulum G,AD aequale rectangulo BAE; et, per partem 2. ejuſdem, rectangulum

G,DC aequale eſt ipſi BCE. Ut igitur rectangulum BAE ad ipſum BCE, ita eſt quadratum ex AH ad quadratum ex HC. Et haec eſt altera conſtructio qua inveniri poteſt punctum H, ut dictum fuit.

Apollonius autem ſola harum conſtructionum prima utitur, quoniam in Prop. 19. oſtenſum eſt ſecundam ex ea neceſſario ſequi. Idem autem obſervandum eſt de Determinationibus Epitagmatis 3. Prob. 1. et Epitagmatis 3. Prob. 2. hujus Lib. 2. quarum alterae conſtructiones ad eas quae in hoc Libro habentur deduci poſſunt ope ejuſdem Prop. 19. vel Prop. 18.

Quamvis autem quaevis ex praedictis conſtructionibus quibus determinatur punctum H ſufficiat Compoſitioni Problematis, ex neutra autem ſtatim dignoſcitur utrum Problema fieri poteſt an non fieri. Demonſtratum quidem eſt, ſi fuerit rectangulum AEC ad ipſum ABC ut quadratum ex EH ad quadratum ex HB, rationem rectanguli AHC ad ipſum EHB fore maximam. Utrum vero ratio data rectae NO ad ipſam NP hac ratione maxima major ſit an non major, hoc eſt utrum Problema conſtrui poteſt an non conſtrui ſtatim percipi non poteſt, quia punctum H et propterea rectangula AHC, EHB non ſunt inter ea quae data ſunt in Problemate, ſed ex hiſce datis ope praedictae conſtructionis invenienda ſunt. Et propter hanc cauſam Determinationem hanc ad aliam deducit Apollonius in qua ratio maxima exhibetur in magnitudinibus quae data ſunt in ipſa enuntiatione Problematis. In Problematibus autem quorum Determinationes facilius inveniuntur, una determinatio utrique uſui inſervire poteſt, ut in Determinatione Problematis in Prop. 43. et eorum in Prop.

53. et 56. Et ſimiliter in Libris Apollonii de Sectione Rationis, aliquando unam aliquando duas determinationes obſervare licet. Harum autem ultima ex altera ſemper pendet.

Ex his igitur aliiſque veterum libris liquet eos Determinationes Problematum ita tradidiſſe, ut ex iis quam facile dignoſceretur utrum Problema fieri an non fieri poſſet, et ſi locus inveniendus fuerit, quiſnam futurus ſit, utrum, ex. gr. Parabola, Ellipſis, an Hyperbola. Quod quidem ex multis recentiorum Determinationibus vix intelligi queat; quaſdam etiam tradunt ex quibus id minime percipi poteſt.

Uſus vero praecipuus librorum de Sectione Determinata eſt in Analyſi Problematum, multa enim Problemata ad ea quae in hiſce libris continentur deducuntur. Optime etiam tyronibus oſtendunt genuinam demonſtrandi viam a veteribus uſurpatam, variis ejuſdem Propoſitionis demonſtrationibus adductis; Lemmata enim Apollonii a Pappo ſervata demonſtrata ſunt vel ſine ratione compoſita, vel ejuſdem ope; et vel utendo ſolis rectis lineis, vel ope figurarum. Apollonii igitur libros hos tum Geometris, tum in Geometria Tyronibus, non ingratos fore aequum eſt ſperare.

F I N I S.

DE

SECTIONE DETERMINATA

LIBER TERTIUS,

DUOBUS PRAECEDENTIBUS

APOLLONII

ADDITUS.

DE

SECTIONE

DETERMINATA

LIBER TERTIUS,

DUOBUS PRAECEDENTIBUS

APOLLONII

ADDITUS.

PROBLEMA PRIMUM.

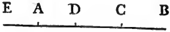
" DATIS duobus punctis tertium invenire in recta quae per " ea tranſit, quod faciet quadratum ex ſegmento inter ipſum " et alterum ex datis punctis majus, aut minus quadrato ex " reliquo ſegmento dato, quam in ratione, vel quod faciet " quadratum ex ſegmento inter ipſum et alterum ex datis " punctis datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex reli- " quo ſegmento datam habet rationem."

PROP. LXVI. PROB. I. EPITAGMA 1.

" DATIS duobus punctis A, B tertium C inter ea invenire " quod faciet quadratum ex AC majus, aut minus quadrato " ex CB dato, quam in ratione, vel quod faciet quadratum

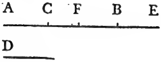
" ex AC datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB da-
" tam habet rationem."

Pars 1. Sit quadratum ex AC majus quadrato ex CB dato, quam in ratione. Igitur, ex hypothesi, a quadrato ex AC ablato dato spatio, quod sit quadratum ex data AD vel AE, reliquum, rectangulum scilicet EC, CD ad quadratum ex CB datam habet rationem; et data sunt puncta E, D, B, et inter D,



B inveniendum est punctum C quod faciet rectangulum EC, CD a segmentis inter ipsum et puncta E, D quae sunt ad easdem ipsius partes ad quadratum ex CB segmento inter ipsum et reliquum punctum datum B in data ratione. Deductum igitur est Problema ad Epitagma 1. Prob. 5. Lib. 1. hoc est ad Prop. 51. cujus ope punctum C invenietur.

Pars 2. Sit quadratum ex AC minus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum sit quadratum ex recta D; igitur quadratum ex AC una cum quadrato ex D habet, ex hypothesi, datam rationem ad quadratum ex CB; in hac ratione sit quadratum ex D ad quadratum ex recta BE cui aequalis sit recta BF,



[a] 19. 5. et in eadem ratione erit [a] quadratum ex AC ad excessum quadrati
[b] 6. 2. ex CB supra quadratum ex BE, hoc est [b] ad rectangulum EC, CF. Quoniam igitur data sunt tria puncta A, F, E in recta linea, et est punctum C inter A, F puncta quod facit ratio-

nem rectanguli EC, CF ex segmentis inter ipsum et puncta F, E quae sunt ad easdem ejus partes ad quadratum ex AC inter ipsum et reliquum punctum A in ratione data, datum erit punctum C per eandem Prop. 51.

PARS 3. Denique sit quadratum ex AC datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, et datum sit aequale quadrato ex AD cui aequalis sit recta AE. Quoniam igitur quadratum ex AC una cum rectangulo EC, CD aequale est [e] quadrato ex AD spatio scilicet dato cui ae- [e] 5. 2.
quale est quadratum ex AC simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem,



erit rectangulum EC, CD id ad quod ex CB quadratum datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, D, B inveniendum est punctum C inter E, D quod faciet rectangulum EC, CD ad quadratum ex CB in ratione data, hoc autem fiet ope Epit. 3, Prob. 5. Lib. 1. hoc est ope Prop. 53.

PROP. LXVII. PROB. I. EPITAGMA 2.

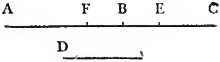
" DATIS duobus punctis A, B tertium C in recta quae per
" ea transit invenire extra ipsa quod faciet quadratum ex AC
" segmento inter ipsum et punctum A ab eo remotius majus,
" aut minus quadrato ex reliquo segmento CB dato, quam in
" ratione, vel quod faciet quadratum ex AC datum simul
" cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem."

Pars 1. Sit quadratum ex AC majus quadrato ex CB dato, quam in ratione; igitur a quadrato ex AC ablato dato ſpatio, quod ſit quadratum ex AD vel AE, reliquum, ſcilicet rectangulum EC, CD habebit datam rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, D, C inveniendum



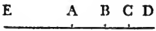
eſt quartum C extra ipſa quod faciet rectangulum EC, CD a ſegmentis inter ipſum et duo puncta ab eo remotiora E, D ad quadratum ex CB inter ipſum et punctum reliquum, in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 54. quae eſt Epitagma 1. Prob. 6. Lib. 1.

Pars 2. Sit quadratum ex AC minus quadrato ex CB dato, quam in ratione; igitur, ex hypotheſi, quadratum ex AC una cum ſpatio dato, quod ſit quadratum ex recta D datam habet rationem ad quadratum ex CB. In hac ratione ſit quadratum ex D ad quadratum ex recta BE cui aequalis ſit BF, et in ea-
a 19. 5. dem data ratione erit [a] quadratum ex AC ad rectangulum FC, CE.



Datis igitur in recta linea tribus punctis A, F, E inveniendum eſt quartum C extra ipſa quod faciet rectangulum FC, CE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta propiora F, E ad quadratum ex AC in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 55. quae eſt Epitagma 2. Prob. 6. Lib. 1.

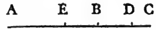
Pars 3. Denique ſit quadratum ex AC datum ſimul cum ſpatio ad quod quadratum ex CB datam habet rationem; ſit ſpatium datum quadratum ex recta AD cui aequalis ſit AE, et quoniam quadratum ex AC ſimul cum rectangulo EC, CD aequale eſt quadrato ex AD, erit rectangulum EC, CD id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, D inveniendum eſt quartum C inter puncta B, D quod faciet rectangulum EC, CD a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, D ad quadratum inter ipſum et reliquum punctum B in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 52. quae eſt Epitagma 2. Prob. 5. Lib. 1.



PROP. LXVIII. PROB. I. EPITAGMA 3.

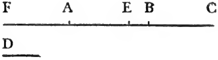
" DATIS duobus punctis A, B invenire in recta quae per ea " tranſit tertium C extra puncta data quod faciet quadratum " ex CB ſegmento inter ipſum et punctum B ei propius ma- " jus, aut minus quadrato ex ſegmento AC inter ipſum et " reliquum punctum A dato, quam in ratione, vel quod fa- " ciet quadratum ex CB datum ſimul cum ſpatio ad quod " quadratum ex AC datam habet rationem."

Pars 1. Sit quadratum ex CB majus quadrato ex AC dato, quam in ratione; igitur a quadrato CB ablato dato ſpatio, quod ſit quadratum ex BD vel BE, erit, ex hypotheſi, reliquum, rectangulum ſcilicet EC, CD ad quadratum ex AC in data ratione.



Datis igitur in recta linea tribus punctis A, E, D inveniendum eſt quartum C extra ipſa quod faciet rectangulum EC, CD a ſegmentis inter ipſum et duo puncta ei propiora ad quadratum ex ſegmento AC inter ipſum et reliquum punctum A in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 55. quae eſt Epitagma 2. Prob. 6. Lib. 1.

Pars 2. Sit quadratum ex CB minus quadrato ex AC dato, quam in ratione; igitur, ex hypotheſi, quadratum ex CB una cum ſpatio dato, quod ſit quadratum ex recta D, datam habet rationem ad quadratum ex AC. In hac ratione ſit quadratum ex D ad quadratum ex recta AE, cui aequalis ſit AF, et in eadem



[a] 19. 5. data ratione [a] erit quadratum ex CB ad rectangulum FC, CE. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum eſt quartum C extra ipſa quod faciet rectangulum FC, CE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta remotiora F, E ad quadratum ex ſegmento CB inter ipſum et punctum reliquum B in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 54. Lib. 1.

Pars 3. Denique ſit quadratum ex CB datum ſimul cum ſpatio ad quod quadratum ex AC datam habet rationem; ſit datum aequale quadrato ex BD cui aequalis ſit recta BE. Quoniam igitur



quadratum ex CB una cum rectangulo EC, CD aequale eſt

quadrato ex BD, erit rectangulum EC, CD spatium ad quod quadratum ex AC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis A, E, D inveniendum est quartum C inter E et D quod faciet rectangulum EC, CD ad quadratum ex AC in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 53.

PROB. II.

" DATIS duobus punctis tertium invenire in recta quae per " ea transit, inter vel extra data puncta quod faciet rectan- " gulum a segmento inter ipsum et alterum ex datis punctis " et datâ rectâ majus, aut minus quadrato ex segmento inter " ipsum et reliquum datum punctum dato, quam in ratione, " vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum spa- " tio ad quod quadratum hoc datam habet rationem."

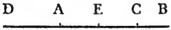
PROP. LXIX. PROB. II. EPITAGMA 1.

PARS I.

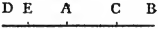
" DATIS duobus punctis A, B tertium C invenire in recta " quae per ea transit inter puncta data quod faciet rectangu- " lum a segmento inter ipsum et alterum ex punctis datis A " et data recta AD majus quadrato ex reliquo segmento CB " dato, quam in ratione."

Factum puta, et sit datum rectangulum a recta DA et ipsa AE contentum, et quoniam data est recta DA data erit AE quae ponatur in recta AB versus punctum B; datum igitur

eſt punctum E. Et a rectangulo DA, AC ablato dato rectangulo DA, AE reliquum, rectangulum ſcilicet DA, EC, ex hypotheſi, datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur in recta linea duobus punctis E, B inveniendum eſt tertium C inter ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento EC et data recta DA ad quadratum ex CB in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 42. quae eſt Epitagma 1. Prob. 2. Lib. 1.



PARS 2. Sit rectangulum DA, AC minus quadrato ex CB; igitur ipſi DA, AC addito dato, quod ſit rectangulum DA, AE poſita AE in BA producta ad partes A, totum, rectangulum ſcilicet DA, EC habet, ex hypotheſi, datam rationem ad quadratum ex CB. Punctum igitur C invenietur ut in Parte 1. ope Prop. 42.



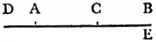
PARS 3. Denique, ſit rectangulum DA, AC datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Sitque datum cui praedicta ſpatia ſimul ſunt aequalia rectangulum DA, AE.

CAS. 1. Quando rectangulum DA, AE minus eſt ipſo DA, AB; poſita igitur AE in recta AB verſus partes B cadet punctum E inter A et B, et quoniam rectangulum DA, AE majus eſt ipſo DA, AC cadet E inter C et B. Eſt autem rectangulum DA,

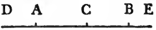


AC ſimul cum ipſo DA, CE aequale rectangulo DA, AE, igitur rectangulum DA, CE eſt id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum eſt tertium C in recta linea quae per ea tranſit extra puncta data quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et punctum E ei propius et data recta DA ad quadratum ex CB in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 43. quae eſt Epitagma 2. Prob. 2. Lib. 1.

Cas. 2. Quando rectangulum DA, AE aequale eſt ipſi DA, AB, hoc eſt quando punctum E cadit in B. Quoniam igitur rectangulum DA, AC ſimul cum ipſo DA, CB aequale eſt rectangulo DA, AB, erit DA, CB rectangulum id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem; habet igitur recta DA datam rationem ad ipſum CB, et data eſt DA, data igitur eſt CB, et datum erit punctum C.



Cas. 3. Quando rectangulum DA, AE majus eſt rectangulo DA, AB, et propterea cadit punctum E in AB producta; eſt igitur rectangulum DA, AC ſimul cum ipſo DA, CE aequale rectangulo DA, AE, quare, ex hypotheſi, eſt rectangulum DA, CE id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum eſt tertium C extra ipſa in recta quae per ea tranſit quod faciet rectangulum a ſegmento CE, inter ipſum et punctum E ab eo remotius et da-



tâ rectâ DA in data ratione ad quadratum ex CB, quod quidem fiet ope Prop. 44. Lib. 1. quae eſt Epitagma 3. Prob. 2.

PROP. LXX. PROB. II. EPITAGMA 2.

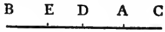
" DATIS duobus punctis B, A tertium C invenire in recta
" quae per ea tranſit extra data puncta quod faciet rectan-
" gulum a ſegmento CA inter ipſum et punctum A ei propius
" et datâ rectâ AD majus, aut minus quadrato ex ſegmento
" CB inter ipſum et reliquum punctum B dato, quam in ra-
" tione, vel quod faciet rectangulum illum datum ſimul cum
" eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AC, AD majus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum ſit rectangulum DA, AE, et quoniam data eſt DA data erit AE, punctumque E erit datum. Ablato igitur a rectangulo DA, AC dato rectangulo DA, AE reliquum, rectangulum ſcilicet DA, EC datam habet, ex hypotheſi, rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum eſt extra ipſa punctum C quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et propius punctum C et data recta DA ad quadratum ex CB in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 43.



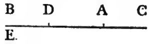
Pars 2. Sit rectangulum AC, AD minus quadrato ex CB dato, quam in ratione, ſitque datum rectangulum DA, AE et ponatur AE verſus punctum B.

CAS. 1. Quando AE minor eſt quam AB; igitur addito rectangulo DA, AE ad ipſum DA, AC totum DA, EC, ex hypotheſi, datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum eſt tertium C extra ipſa in



recta BE producta quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et punctum ei propius ad quadratum ex CB in ratione data, id quod fiet ope Prop. 43. Lib. 1.

CAS. 2. Quando AE aequalis eſt ipſi AB, ſive quando punctum E cadit in B. Addito igitur rectangulo DA, AB ad ipſum DA, AC totum DA, BC datam habet rationem ad quadratum ex CB; data igitur eſt ratio DA ad



BC, et data eſt D, data igitur eſt BC, datumque erit punctum C.

CAS. 3. Quando AE major eſt quam AB; cadit igitur punctum E in AB producta ultra B. Et quoniam addito rectangulo DA, AE ad ipſum DA, AC totum rectangulum DA, EC datam habet rationem ad quadratum ex CB; igitur datis duobus punctis E, B tertium C inveniendum eſt extra ipſa quod faciet



rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et punctum remotius E ad quadratum ex CB in ratione data, quod fiet ope Prop. 44. quae eſt Epitagma 3. Prob. 2. Lib. 1.

PARS 3. Denique sit rectangulum AC, AD datum simul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, et datum sit rectangulum DA, AE.



Quoniam igitur rectangulum DA, AC simul cum ipso DA, CE aequale est dato rectangulo DA, AE, erit rectangulum DA, CE id ad quod quadratum ex CB, ex hypothesi, datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium C inter ipsa quod faciet rectangulum a segmento CE et datâ rectâ DA ad quadratum ex reliquo segmento CB in data ratione, quod quidem fiet ope Prop. 42.

PROP. LXXI. PROB. II. EPITAGMA 3.

" DATIS duobus punctis A, B tertium C invenire in recta " quae per ea transit extra data puncta quod faciet rectangulum a segmento CA inter ipsum et punctum A ab eo remotius et data recta AD majus, aut minus quadrato ex " segmento CB inter ipsum et reliquum punctum B dato, " quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod quadratum hoc datam habet " rationem."

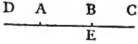
PARS 1. Sit rectangulum CA, AD majus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum sit aequale rectangulo DA, AE.

CAS. 1. Quando AE minor est quam AB, igitur a rectangulo DA, AC ablato dato rectangulo DA, AE reliquum rect-

angulum DA, EC datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum eſt tertium C extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et punctum E quod remotius eſt ab eo et datâ rectâ AD in data ratione ad quadratum ex ſegmento CB inter ipſum et reliquum punctum datum B, quod fiet ope Prop. 44. Lib. 1.



Cas. 2. Quando AE aequalis eſt ipſi AB, hoc eſt quando punctum E cadit in B. Igitur a rectangulo DA, AC ablato dato rectangulo DA, AB, reliquum, ſcilicet rectangulum DA, BC habet, ex hypotheſi, datam rationem ad quadratum ex CB; data propterea eſt ratio datae DA ad ipſam BC, et ipſa BC data erit, datumque erit punctum C.



Cas. 3. Quando AE major eſt quam AB, et propterea cadit punctum E in AB producta. Ablato igitur dato rectangulo DA, AE ab ipſo DA, AC reliquum rectangulum DA, EC habet ad quadratum ex CB rationem datam. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum eſt tertium C extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et punctum E ipſi propius et data recta AD ad quadratum ex CB inter ipſum et reliquum punctum in data ratione, quod fiet ope Prop. 43.



Pars 2. Sit rectangulum CA, AD minus quadrato ex CB dato, quam in ratione, et datum ſit aequale rectangulo DA, AE, et

ponatur AE in BA producta. Totum igitur, rectangulum ſcilicet DA, EC datam habet rationem ad quadratum ex CB. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum eſt tertium C extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et punctum E ab eo remotius et datâ rectâ AD ad quadratum ex CB in ratione data, quod fiet ope Prop. 44.



Pars 3. Denique ſit rectangulum CA, AD datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem, et ſit datum aequale rectangulo AD, AE, et ponatur AE verſus partes puncti B. Quoniam igitur rectangulum DA, AC ſimul cum ipſo DA, CE aequale eſt dato rectangulo DA, AE, erit rectangulum DA, CE id ad quod quadratum ex CB datam habet rationem. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum eſt tertium C inter ea quod faciet rectangulum a ſegmento CE inter ipſum et alterum ex punctis datis E in data ratione ad quadratum ex reliquo ſegmento CB, quod fiet ope Prop. 42.



COR. AD PROB. II.

Et ſi quadratum ex CB majus, aut minus fuerit rectangulo CA, AD dato, quam in ratione, erit rectangulum CA, AD minus, aut majus quadrato ex CB dato, quam in ratione per Prop. 14. Dat. in Edit. Glaſg. 1762. Et ſi quadratum ex CB datum fuerit ſimul cum eo ad quod rectangulum CA, AD datam habet rationem, erit rectangulum CA, AD datum ſimul

cum eo ad quod quadratum ex CB datam habet rationem per Prop. 15. Dat. Igitur hae Propositiones deducuntur ad eas Problematis 2.

PROB. III.

" DATIS in recta linea tribus punctis quartum invenire in-
" ter ipsa, viz. inter utrumlibet ex extremis et punctum me-
" dium quod faciet rectangulum a segmento inter ipsum et
" quodlibet ex datis punctis et datâ rectâ majus, aut minus
" rectangulo a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data
" dato, quam in ratione, aut quod faciet rectangulum illud
" datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc datam ha-
" bet rationem."

PROP. LXXII. PROB. III. EPITAGMA I.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C invenire
" quartum D inter punctum A alterum ex extremis et medi-
" um punctum B quod faciet rectangulum a segmento DA
" inter ipsum et extremum punctum A quod non est ad par-
" tes ad quas est medium et datâ rectâ AE majus, aut minus
" rectangulo BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua
" puncta B, C dato quam in ratione, vel quod faciet rectan-
" gulum illud datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc
" datam habet rationem."

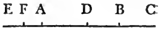
PARS I. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et datum aequale sit rectangulo

EA, AF quae ponatur ab A versus B. Ablato igitur rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est



quartum D inter extremum punctum F et medium B quod faciet rectangulum a segmento DF et datâ rectâ ad rectangulum BD, DC inter ipsum et reliqua puncta quae sunt ad easdem ejus partes in data ratione, quod fiet ope Prop. 45. quae est Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1.

Pars 2. Sit rectangulum DA, AE minus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo EA, AF quae ponatur in BA producta ad partes A. Totum igitur, rectangulum scilicet EA, FD datam habet rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C



inveniendum est in ea quartum D inter puncta F, B quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta B, C quae sunt ad easdem ejus partes in data ratione, quod fiet ope Prop. 45.

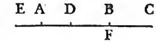
Pars 3. Denique sit rectangulum DA, AE datum simul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et sit datum aequale rectangulo EA, AF quae ponatur a puncto A versus B.

Cas. 1. Quando recta AF minor eſt ipsâ AB; igitur, quoniam rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF eſt aequale dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum eſt quartum D in CF producta quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et



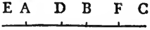
punctum F ipſi proximum et data recta EA ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua data puncta B, C in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 50. quae eſt Epitagma 3. Prob. 4. Lib. 1.

Cas. 2. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AB, ſeu quando punctum F incidit in B. Quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DB aequale eſt dato rectangulo EA, AB, erit rectangulum EA, DB id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem; data eſt propterea ratio



datae rectae EA ad ipſam CD, quare data eſt CD, et punctum D datum erit.

Cas. 3. Quando recta AF major eſt quam AB at minor quam AC; quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum eſt quartum in CB producta quod faciet rectangulum a ſeg-

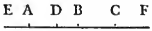


mento DF inter ipſum et punctum medium F et datâ rectâ AE ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta B, C in data ratione, quod fiet ope Prop. 49. quae eſt Epitagma 2. Prob. 4. Lib. 1.

Cas. 4. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AC, ſeu quando punctum F incidit in ipſum C. Quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DC aequale eſt rectangulo dato EA, AC, erit rectangulum EA, DC id quod ad rectangulum BD, DC datam habet rationem; data igitur eſt ratio datae rectae EA ad ipſam BD, data propterea eſt BD, et datum erit punctum D.



Cas. 5. Quando recta AF major eſt ipſa AC; igitur quoniam rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt in FB producta ad partes B quartum punctum D quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum F ab eo remotiſſimum ad rectangulum BD, DC inter ipſum et reliqua data puncta B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 48. quae eſt Epitagma 1. Prob. 4. Lib. 1.



PROP. LXXIII. PROB. III. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C invenire in-
" ter B, A quartum D quod faciet rectangulum a segmento
" DA inter ipsum et punctum medium C et datâ rectâ AE
" majus, aut minus rectangulo BD, DC inter ipsum et reli-
" qua puncta data B, C dato, quam in ratione, vel quod fa-
" ciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod qua-
" dratum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo EA, AF, positâ AF versus partes puncti B. Igitur a rectangulo EA, AD ablato

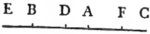


dato rectangulo EA, AF, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum D inter puncta B, F quod faciet rectangulum a segmento inter ipsum et punctum medium F et datâ rectâ EA ad rectangulum inter ipsum et reliqua data puncta B, C in ratione data, quod quidem fiet ope Prop. 46. quae est Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1.

Pars 2. Sit rectangulum DA, AE minus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo EA, AF positâ AF versus partes puncti C.

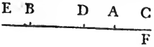
Cas. 1. Quando recta AF minor est ipsâ AC; addito igitur dato rectangulo EA, AF ad rectangulum EA, AD, totum,

rectangulum ſcilicet EA, DF habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC.

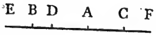


Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum eſt quartum D inter extremum B et medium punctum F quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et medium F, et data recta AE ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C in data ratione, quod quidem fiet ope ejuſdem Prop. 46.

Cas. 2. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AC, ſeu quando punctum F incidit in C; quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum dato rectangulo EA, AF, hoc eſt rectangulum EA, DF, ſive EA, DC datam habet rationem ad rectangulum BD, DC, data erit ratio datae rectae EA ad ipſam BD, quare data eſt BD, datumque erit punctum D.

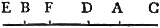


Cas. 3. Quando recta AF major eſt quam AC; igitur rectangulum EA, AD ſimul cum dato rectangulo EA, AF, hoc eſt rectangulum EA, DF datam habet rationem, ex hypotheſi, ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum F quod eſt ad eas partes puncti D ad quas eſt punctum medium A et datâ rectâ EA ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 47. quae eſt Epitagma 3. Prob. 3. Lib. 1.



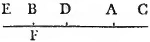
Pars 3. Denique ſit rectangulum DA, AE datum ſimul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et ſit datum aequale rectangulo EA, AF, poſitâ AF verſus partes puncti B.

Cas. 1. Quando AF minor eſt quam AB; quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt rectangulo dato EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum eſt quartum D inter



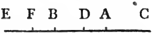
puncta F, C quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum medium F et data recta EA ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 46.

Cas. 2. Quando AF aequalis eſt ipſi AB, ſeu quando punctum F incidit in B; quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DB aequale eſt dato rectangulo EA, AB, erit rectangulum EA, DB id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem; data igitur eſt ratio da-



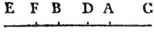
tae rectae EA ad ipſam DC, quare data eſt DC, et datum erit punctum D.

Cas. 3. Quando AF major eſt quam AB; igitur quoniam rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA,



DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem.

Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum est quartum D inter B et C quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et extremum punctum F quod est ad eas partes ipsius D ad quas est punctum medium B et datâ rectâ EA ad rectangulum a segmentis inter ipsum et puncta reliqua data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 47.

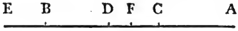


PROP. LXXIV. PROB. III. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D
" invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum a seg-
" mento DA inter ipsum et punctum extremum A quod est
" ad eas partes ipsius D ad quas est punctum medium C et
" datâ rectâ AE majus, aut minus rectangulo BD, DC a seg-
" mentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C dato, quam
" in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul
" cum eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

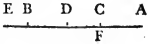
Pars 1. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato quam in ratione, et sit datum aequale rectangulo EA, AF posita AF versus partes puncti B.

Cas. 1. Quando recta AF major est ipsâ AC; igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AF reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangu-

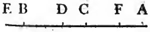


lum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum eſt quartum D inter B, C quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum medium F et datâ rectâ EA in data ratione ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta B, C, quod fiet ope Prop. 46.

Cas. 2. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AC, ſeu quando punctum F incidit in ipſum C; igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AC, reliquum, rectangulum ſcilicet EA, CD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC; quare data eſt ratio datae rectae EA ad ipſam CD; data igitur eſt recta CD, et punctum D erit datum.

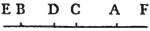


Cas. 3. Quando recta AF minor eſt quam AC; igitur ablato dato rectangulo EA, AF ab ipſo EA, AD, reliquum, ſcilicet rectangulum EA, FD datam habet, ex hypotheſi, rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D inter B et C quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum extremum F quod eſt ad eas partes ipſius D ad quas eſt medium C, et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 47.



Pars 2. Sit rectangulum EA, AD minus ipſo BD, DC dato, quam in ratione, et ſit datum aequale rectangulo EA, AF,

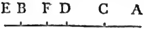
poſita AF in BA producta; igitur ad rectangulum EA, AD addito dato rectangulo EA, AF, totum, ſcilicet rectangulum EA, DF habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum



eſt quartum D inter B et C quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum extremum F quod eſt ad eas partes ipſius D ad quas eſt medium C, et data recta EA ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data in data ratione, quod fiet ope Prop. 47.

Pars 3. Denique ſit rectangulum EA, AD datum ſimul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et ſit datum aequale rectangulo EA, AF, poſita AF ab A verſus partes puncti B.

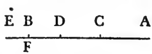
Cas. 1. Quando recta AF minor eſt ipſa AB; quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea



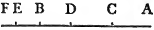
tribus punctis B, F, C inveniendum eſt quartum D inter F et C quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum medium F et data recta EA ad rectangulum BD, DC in ratione data, quod fiet ope Prop. 46. quae eſt Epitagma 2. Prob. 3. Lib. 1.

Cas. 2. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AB, ſeu quando punctum F incidit in B; quoniam igitur rectangulum

EA, AD ſimul cum ipſo EA, DB aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DB id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Data igitur eſt ratio datae rectae EA ad ipſam DC; data igitur eſt recta CD, et datum erit punctum D.



CAS. 3. Quando recta AF major eſt ipſa AB; quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod datam habet rationem rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum eſt quartum D inter B et C quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum extremum F quod eſt ad eas partes ipſius D ad quas eſt punctum medium B et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data, quod fiet ope Prop. 47.



COR. AD PROB. III.

Et ſi rectangulum BD, DC majus, aut minus fuerit rectangulo EA, AD dato, quam in ratione, erit rectangulum EA, AD minus, aut majus ipſo BD, DC dato quam in ratione per 14. Dat. Et ſi rectangulum BD, DC datum fuerit ſimul cum eo ad quod rectangulum EA, AD datam habet rationem, rectangulum EA, AD datum erit ſimul cum eo ad quod BD, DC rectangulum datam habet rationem, per 15. Dat. Igitur hae Propoſitiones deducuntur ad eas Problematis 3.

PROB. IV.

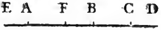
" DATIS in recta linea tribus punctis invenire quartum ex-
" tra ipſa ad utraſvis partes quod faciet rectangulum a ſeg-
" mento inter ipſum et quodlibet ex punctis datis, et data
" recta majus, aut minus rectangulo inter ipſum et reliqua
" puncta data, dato, quam in ratione; vel quod faciet rect-
" angulum illud datum ſimul cum eo ad quod rectangulum
" hoc datam habet rationem."

PROP. LXXV. PROB. IV. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D
" invenire extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento in-
" ter ipſum et punctum A ab eo remotiſſimum et data recta
" AE majus, aut minus rectangulo BD, DC a ſegmentis in-
" ter ipſum et reliqua puncta data B, C dato, quam in rati-
" one, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum
" eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, ſitque datum aequale rectangulo EA, AF, poſitâ AF verſus partes puncti C.

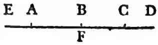
Cas. 1. Quando recta AF minor eſt ipſâ AB; igitur ablato dato rectangulo EA, AF ab ipſo EA, AD reliquum, ſcilicet rectangulum EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum



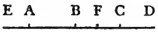
BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C

inveniendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum ab eo remotissimum F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 48. quae est Epitagma 1. Prob. 4. Lib. 1.

Cas. 2. Quando recta AF aequalis est ipsi AB, hoc est quando punctum F incidit in B. Ablato igitur dato rectangulo EA, AB ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, BD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC; data igitur recta EA datam habet rationem ad ipsam CD, quae propterea data est, datumque erit punctum D.



Cas. 3. Quando recta AF major est quam AB, at minor quam AC; ablato igitur dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est extra ipsa quartum D quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F, et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua data puncta B, C, quod quidem fiet ope Prop. 49. quae est Epitagma 2. Prob. 4. Lib. 1.



Cas. 4. Quando recta AF aequalis est ipsi AC, hoc est quando punctum F incidit in C. Ostendetur hic Casus eodem modo quo ostensus fuit Cas. 2.

Cas. 5. Quando recta AF major eſt ipſa AC; ablato igitur dato rectangulo EA, AF ab ipſo EA, AD, reliquum, rectangulum ſcilicet EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum ipſi proximum F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 50. quae eſt Epitagma 2. Prob. 4. Lib. 1.

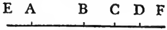


Pars 2. Sit rectangulum DA, AE minus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et ſit datum aequale rectangulo EA, AF, poſita AF in BA producta. Igitur addito dato rectangulo EA, AF ipſi EA, AD, totum, rectangulum ſcilicet EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum eſt quartum D extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum F ab eo remotiſſimum et data recta EA ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 48.



Pars 3. Denique ſit rectangulum DA, AE datum ſimul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et datum aequale ſit rectangulo EA, AF, poſitâ AF ab A ver-

ſus partes puncti C. Quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod ipſum BD, DC datam habet rationem. Igitur datis in recta linea tribus punctis B, C, F



inveniendum eſt quartum D inter C et F quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum extremum F quod non eſt ad eas partes ipſius D ad quas eſt punctum medium C et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 45. quae eſt Epitagma 1. Prob. 3. Lib. 1.

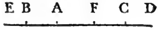
PROP. LXXVI. PROB. IV. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D " invenire extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DA " inter ipſum et punctum medium A et data recta EA ma- " jus, aut minus rectangulo BD, DC a ſegmentis inter ip- " ſum et reliqua data puncta B, C dato, quam in ratione, " vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad " quod rectangulum hoc datam habet rationem."

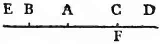
Pars 1. Sit rectangulum DA, AE majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et datum ſit aequale rectangulo EA, AF, poſitâ AF a puncto A verſus partes C.

Cas. 1. Quando recta AF minor eſt ipsâ AC; igitur ablato dato rectangulo EA, AF, ab ipſo EA, AD reliquum, rectan-

gulum scilicet EA, FD, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est quartum D extra ipsa quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum medium F et data recta EA in data ratione ad rectangulum a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 49.



Cas. 2. Quando AF aequalis est ipsi AC, hoc est quando punctum F incidit in C; igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AC reliquum, scilicet rectangulum EA, CD, habet, ex hypothesi, datam rationem ad ipsum BD, DC. Recta igitur data EA datam habet rationem ad ipsam BD, quae propterea data est, datumque erit punctum D.



Cas. 3. Quando recta AF major est ipsâ AC; igitur ablato dato rectangulo EA, AF ab ipso EA, AD, reliquum, rectangulum scilicet EA, FD habet, ex hypothesi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C inveniendum est extra ipsa quartum D quod faciet rectangulum a segmento DF inter ipsum et punctum F ipsi proximum in data ratione ad rectangulum BD, DC a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 50. quae est Epitagma 3. Prob. 4. Lib. 1.

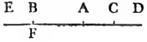


Pars 2. Sit rectangulum EA, AD minus ipſo BD, DC dato, quam in ratione, ſitque datum aequale rectangulo EA, AF, poſitâ AF verſus partes puncti B.

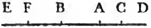
Cas. 1. Quando AF minor eſt ipſa AB; igitur ad rectangulum EA, AD addito dato rectangulo EA, AF, totum, rectangulum ſcilicet EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Igitur datis in recta linea tribus punctis B, F, C quartum D inveniendum eſt extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum medium F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 49.



Cas. 2. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AB, hoc eſt quando punctum F incidit in ipſum B; igitur rectangulo EA, AD dato rectangulo EA, AB addito, totum, rectangulum ſcilicet EA, DB habet, ex hypotheſi, datam rationem ad ipſum BD, DC. Data igitur recta EA datam habet rationem ad ipſam CD, data propterea eſt CD, et datum erit punctum D.



Cas. 3. Quando recta AF major eſt ipſa AB; igitur rectangulo EA, AD dato rectangulo EA, AF addito, totum, rectangulum ſcilicet EA, FD datam, ex hypotheſi, habet rationem ad ipſum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum eſt quartum F extra ipſa quod faciet rectangulum a



ſegmento DF inter ipſum et punctum F ab eo remotiſſimum et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC, quod fiet ope Prop. 49.

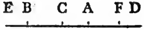
Pars 3. Denique datum ſit rectangulum EA, AD ſimul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, et datum ſit aequale rectangulo EA, AF, poſitâ AF verſus partes puncti C. Igitur quoniam rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D inter C et F quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum extremum F quod non eſt ad eas partes ipſius D ad quas eſt punctum medium C et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data, quod fiet ope Prop. 45.



PROP. LXXVII. PROB. IV. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, C, A quartum D " invenire extra data puncta quod faciet rectangulum a ſegmento DA inter ipſum et punctum A ipſi proximum et " data recta EA majus, aut minus rectangulo a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum " eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum EA, AD majus rectangulo BD, DC dato, quam in ratione, et datum aequale ſit rectangulo EA, AF poſitâ AF verſus partes D. Igitur a rectangulo EA, AD ablato dato rectangulo EA, AF, reliquum, rectangulum ſcilicet EA, FD datam, ex hypotheſi, habet rationem ad rectangulum BD, DC.



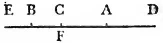
Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum F ei proximum et data recta EA in data ratione ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 50.

Pars 2. Sit rectangulum EA, AD minus ipſo BD, DC dato, quam in ratione, et datum aequale ſit rectangulo EA, AF, poſitâ AF verſus partes puncti B.

Cas. 1. Quando AF minor eſt recta AC; igitur addito dato rectangulo EA, AF ipſi EA, AD, totum, rectangulum ſcilicet EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum F ei proximum et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta B, C, quod fiet ope Prop. 50.

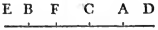


Cas. 2. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AC, hoc eſt quando punctum F incidit in C.



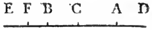
Igitur addito dato rectangulo EA, AC ipſi EA, AD, totum, ſcilicet rectangulum EA, CD datam habet, ex hypotheſi, rationem ad rectangulum BD, DC; et propterea data recta EA datam habet rationem ad ipſam BD. Data igitur eſt BD, et datum erit punctum B.

Cas. 3. Quando recta AF major eſt ipsâ AC, at minor quam AB; igitur addito dato rectangulo EA, AF rectangulo EA, AD, totum, rectangulum ſcilicet EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, C quartum D inveniendum eſt extra ipſa quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum medium F et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC, quod fiet ope Prop. 49.



Cas. 4. Quando recta AF aequalis eſt ipſi AB, hoc eſt quando punctum F incidit in C. Caſus hic eodem modo oſtenditur quo Caſ. 2. oſtenſus fuit.

Cas. 5. Quando recta AF major eſt ipsâ AB; addito igitur dato rectangulo EA, AF ipſi EA, AD, totum, rectangulum ſcilicet EA, FD habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BD, DC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, C inveniendum eſt extra ipſa quartum D quod faciet rectangu-



lum a ſegmento DF inter ipſum et punctum F ab eo remotiſſimum et datâ rectâ EA ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C in ratione data, quod fiet ope Prop. 48.

Pars 3. Denique ſit rectangulum EA, AD datum ſimul cum eo ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem, ſitque datum aequale rectangulo EA, AF, poſita AF in BA producta ad partes D. Quoniam igitur rectangulum EA, AD ſimul cum ipſo EA, DF aequale eſt dato rectangulo EA, AF, erit rectangulum EA, DF id ad quod rectangulum BD, DC datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, C, F inveniendum eſt quartum D inter C et F quod faciet rectangulum a ſegmento DF inter ipſum et punctum extremum F quod non eſt ad eas partes ipſius D ad quas eſt punctum medium C, et data recta EA in data ratione ad rectangulum BD, DC a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta data B, C, quod fiet ope Prop. 45.



Corollarium idem ſequitur ex Prob. 4. cum eo ex Prob. 3.

PROB. V.

" DATIS in recta linea tribus punctis invenire quartum in-
" ter utrumlibet ex punctis extremis et punctum medium
" quod faciet rectangulum a ſegmentis inter ipſum et duo
" ex punctis datis majus, aut minus quadrato ex ſegmento
" inter ipſum et reliquum punctum datum dato, quam in ra-

" tione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum " eo ad quadratum hoc datam habet rationem."

PROP. LXXVIII. PROB. V. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum " D invenire inter punctum medium C et utrumlibet ex ex- " tremis, puta B, quod faciet rectangulum AD, DC a seg- " mentis inter ipsum et puncta A, C quae sunt ad easdem ip- " sius partes majus, aut minus quadrato ex segmento DB in- " ter ipsum et reliquum punctum datum B dato, quam in ra- " tione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum " eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem."

PARS 1. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato quam in ratione; auferatur datum ab ipso AD, DC rectangulo, hoc fiet applicando ad datam rectam AC rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque E punctum applicationis in AC producta versus D, et sit F alterum; erit igitur per Prop. 24. Lib. 7. Pappi Alexandrini rectangulum AD, DC aequale rectangulo FD, DE una cum ipso AE, EC, quare ab ipso AD, DC ablato dato rectangulo AE, EC reliquum est rectangulum FD, DE, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum est quartum D inter E et B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta E, F quae sunt ad easdem



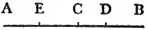
ipsius partes in data ratione ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 51. quae est Prob. 5. Epitagma 1.

PARS 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio ipsius AC, applicari igitur potest [a] ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, sintque E, F puncta applicationum; igitur, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi rectangulum FD, DE aequale erit rectangulo AD, DC una cum dato rectangulo AE, EC, seu FC, CE. Ex hypothesi igitur rectangulum FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB, et reliqua solutio erit ut in parte 1. [a] 27. 6.

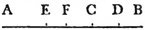


CAS. 2. Quando datum, addendum scilicet rectangulo AD, DC, aequale est quadrato ex dimidio rectae AC. Igitur bifariam secta AC in E, erit [b] rectangulum AD, DC una cum quadrato ex EC aequale quadrato ex ED, quod propterea, ex hypothesi, datam habebit rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea duobus punctis E, B inveniendum est tertium D inter ipsa quod faciet quadratum ex ED ad illud ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 41. quae est Prob. 1. Lib. 1. [b] 6. 2.



CAS. 3. Quando datum majus est quadrato ex EC dimidio ipsius AC; sit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex data EF, additis igitur hisce rectangulo AD, DC, to-

tum, quadratum ſcilicet ex ED una cum dato quadrato ex EF datam, ex hypotheſi, habet rationem ad quadratum ex DB. Quadratum igitur ex ED minus eſt quadrato ex DB dato, quam in ratione, et inveniendum eſt punctum D inter data puncta E, B quod hoc efficiet, invenietur autem ope partis 2. Prop. 66. quae eſt Prob. 1. Epitagma 1. Lib. hujus 3.



Pars 3. Denique ſit rectangulum AD, DC datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

Cas. 1. Quando datum minus eſt rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur utrinque rectangulum aequale dato excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC producta verſus B, et ſit F alterum; et quoniam datum, rectangulum ſcilicet AE, EC minus eſt rectangulo AB, BC, cadet punctum E inter C et B.

Eſt autem per Prop. 23. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC ſimul cum ipſo FD, DE aequale rectangulo FC, CE hoc eſt dato rectangulo AE, EC; rectangulum igitur FD, DE eſt id ad quod quadratum ex DB habet, ex hypotheſi, datam rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum eſt quartum D inter punctum extremum F et medium E quod faciet rectangulum a ſegmentis inter ipſum et ea puncta, rectangulum ſcilicet FD, DE ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum datum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. quae eſt Prob. 5. Epitagma 3. in qua oſtenditur rationem datam rectanguli FD,

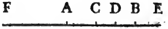


DE ad quadratum ex DB non posse majorem esse ratione quadrati ex dimidio rectae FE ad rectangulum FB, BE, et si huic rationi eadem fuerit ratio data unicum erit punctum D, si vero minor fuerit ratio data ea ratione erunt duo puncta D quae Problema efficient.

Cas. 2. Quando datum aequale est rectangulo AB, BC; in BA producta sumatur AF aequalis datae CB, et quoniam punctum D est inter C et B, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC una cum ipso FD, DB aequale ipsi FC, CB, hoc est dato rectangulo AB, BC; rectangulum igitur FD, DB est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem, et propterea data est ratio rectae FD ad ipsam DB, quare, componendo, data est ratio datae rectae FB ad ipsam BD; data igitur est BD, datumque erit punctum D.



Cas. 3. Quando datum majus est rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque E punctum applicationis quod est in AC producta versus partes B, et sit F alterum; et quoniam datum rectangulum AE, EC majus est quam AB, BC erit punctum E in AB producta. Est autem, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC una cum ipso FD, DE aequale rectangulo FC, CE, hoc est dato rectangulo AE, EC; rectangulum igitur FD, DE est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum est quartum D inter punctum extremum F et me-

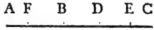


dium B quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E in data ratione ad quadratum ex DB, quod fiet ope Prop. 52. in qua quidem oſtenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB majorem eſſe ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB, quia ſcilicet punctum D propius eſt puncto medio B quam eſt punctum C. Ratio igitur data rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB major debet eſſe ratione rectanguli dati FC, CE, ſive AE, EC ad quadratum ex CB.

PROP. LXXIX. PROB. V. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D " invenire inter puncta B, C quod faciet rectangulum AD, " DC a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema A, C majus, " aut minus quadrato ex ſegmento DB inter ipſum et reli- " quum punctum datum B dato, quam in ratione, vel quod " faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod qua- " dratum hoc datam habet rationem."

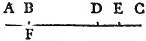
PARS 1. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione; quoniam igitur datum quod auferendum eſt a rectangulo AD, DC minus eſt ipſo, erit idem minus quadrato ex dimidio rectae AC;



ad rectam igitur AC applicari po-
[a] 27. 6. teſt [a] rectangulum ei dato aequale deficiens quadrato. Applicetur, et fit E punctum applicationis quod propius eſt puncto C; et F alterum; et quoniam rectangulum AE, EC minus eſt ipſo AD,

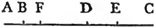
DC cadet punctum E inter D et C. Eſt autem, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC aequale rectangulo AE, EC una cum ipſo FD, DE; igitur a rectangulo AD, DC ablato dato rectangulo AE, EC reliquum, rectangulum ſcilicet FD, DE datam habet, ex hypotheſi, rationem ad quadratum ex DB. Et primo, ſit punctum B inter puncta F, E, hoc eſt ſit datum rectangulum AE, EC, hoc eſt AF, FC minus ipſo AB, BC. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum eſt quartum D inter puncta F, E quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum datum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52.

Secundo, ſit punctum B in ipſo F; hoc eſt ſit rectangulum AF, FC aequale ipſi AB, BC, et quoniam rectangulum FD, DE, ſive in hoc caſu BD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae ED ad ipſam DB, et



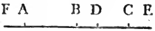
componendo, data erit ratio datae rectae EB ad rectam BD; data igitur eſt BD, et datum erit punctum D.

Tertio, ſit punctum B inter A et F, hoc eſt ſit rectangulum AF, FC majus ipſo AB, BC; et quoniam rectangulum FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB, igitur data ſunt in recta linea tria puncta B, F, E et inveniendum eſt quartum D inter puncta F, E quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta F, E ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum datum punctum B, extremum



ſcilicet quod eſt ad eaſdem partes ad quas eſt medium F in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. in qua quidem oſtenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB non poſſe majorem eſſe ratione quadrati ex FE ad rectangulum EB, BF quater, cui ſi aequalis fuerit ratio data unicum erit punctum D, ſi vero eâ fuerit minor ratio data duo erunt puncta D quae Problema efficient.

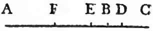
Pars 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato ei ſcilicet quod ipſi AD, DC addendum eſt excedens quadrato, et ſit E punctum applicationis quod eſt in AC producta, ſitque F alterum; eſt autem per Prop. 31. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC una cum ipſo FC, CE, hoc eſt una cum dato rectangulo AE, EC aequale rectangulo FD, DE. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum eſt quartum D inter B et E quod faciet rectangulum FD, DE inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et punctum reliquum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52. Ratio autem data rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB major debet eſſe ratione rectanguli dati FC, CE, ſive AE, EC ad quadratum ex CB, ut in Caſu 3. Epitagmatis 2. Prob. 5. Lib. 1. oſtenſum fuit.



Pars 3. Denique ſit rectangulum AD, DC datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio ip-

sius AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum aequale dato deficiens quadrato; applicetur, sitque E punctum applicationis quod ipsi C propius est, et sit F alterum. Quoniam igitur, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE aequale est dato, rectangulo scilicet AE, EC, erit rectangulum FD, DE id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Primo autem sit rectangulum AE, EC majus ipso AB, BC et cadat punctum B in recta FE producta versus D.



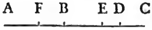
Datis igitur tribus punctis F, E, B inveniendum est quartum D extra data puncta ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ab ipso remotiora ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum datum in ratione data, quae, ut patet, debet esse majoris ad minus, quod fiet ope Prop. 54. quae est Prob. 6. Epitagma 1. in qua etiam ostenditur rationem FD, DE ad quadratum ex DB majorem esse ratione FC, CB ad quadratum ex CB.

Secundo, cadat punctum B in ipsum E; quoniam igitur data est ratio rectanguli FD, DE, sive FD, DB ad quadratum ex DB, hoc est ratio rectae FD ad ipsam DB, et data est FB, datum erit punctum D.



Tertio, sit rectangulum AE, EC minus ipso AB, BC, et cadet punctum B inter F et E; datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E quartum D inveniendum est extra ipsa

quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E in data ratione ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum



datum B, quod fiet ope Prop. 56. quae eſt Prob. 6. Epitagma 3.

Quarto, ſit punctum B in F, et punctum D datum oſtendetur, ut oſtenſum fuit in articulo 2do hujus Caſ. 1.

Quinto, denique ſit rectangulum AE, EC, ſive AF, FC majus ipſo AB, BC, et cadat punctum B inter A et F puncta, et in hoc caſu punctum D poteſt inveniri vel inter E, C vel inter A, F puncta; quando eſt inter E et C data ſunt in recta linea tria puncta B, F, E ad inveniendum quartum D extra ipſa quod faciet rectangulum FD, DE, a ſegmentis inter ipſum et duo puncta F, E ipſi propiora ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum datum in data ratione, quod fiet ope Prop.

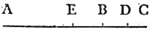




55. Et quoniam in hac oſtenditur puncta remotiora a puncto E majores facere rationes rectanguli ad quadratum quam puncta propiora, et eſt punctum D inter E et C, igitur ratio data rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minor debet eſſe ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB. Quando autem D eſt inter puncta A, F data ſunt tria puncta B, F, E in recta linea ad inveniendum quartum D inter B et F quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta F, E quae ſunt ad eaſdem ipſius partes ad quadratum

ex ſegmento DB intèr ipſum et reliquum punctum datum in ratione data, quod fiet ope Prop. 51. Ratio autem data nullam habet limitationem.

Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in E erit rectangulum AD, DC ſimul cum quadrato ex ED aequale dato, quadrato ſcilicet ex EC; quadratum igitur ex ED eſt id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; data propterea eſt ratio rectae ED ad ipſam DB, et data eſt recta EB, quare data eſt ED, et punctum D erit datum.



Cas. 3. Quando datum eſt majus quadrato ex dimidio rectae AC, quadratis ſcilicet ex EC, EF, bifariam ſecta AC in E; erit rectangulum AD, DC ſimul cum quadratis ex ED, EF aequale dato, quadratis ſcilicet ex EC, EF, quadrata igitur ex ED, EF ſunt id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem, et datum eſt quadratum ex EF, quare quadratum ex ED minus eſt quadrato ex DB dato quam in ratione. Datis igitur duobus punctis E, B tertium D inveniendum eſt extra ipſa ad partes B quod efficiet quadratum ex ſegmento DE inter ipſum et punctum E ab eo remotius minus quadrato ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum B in data ratione, quod fiet ope Partis 2. Prop. 67.



PROP. LXXX. PROB. V. EPITAGMA 3.

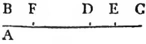
"DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D "invenire inter punctum medium A et utrumlibet extre- "mum C quod faciet rectangulum AD, DC a segmentis in- "ter ipsum et ea puncta majus, aut minus quadrato ex seg- "mento DB inter ipsum et reliquum punctum B dato, quam "in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul "cum eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato quam in ratione; igitur quoniam datum quod auferendum est a rectangulo AD, DC minus est ipso, erit idem minus quadrato ex dimidio rectae AC, applicari igitur potest ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et sit E punctum applicationis quod propius est puncto C, et F alterum; et quoniam per Prop. 31. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC aequale est rectangulo dato AE, EC una cum ipso FD, DE, igitur ablato rectangulo AE, EC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum est quartum D inter F et E quod faciet rectangulum FD, DE ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. in cujus Casu 3. ostenditur rationem datam non posse majorem esse ratione quadrati ex FE ad rectangulum EB, BF quater, cui si aequalis fuerit



unicum erit punctum D, si vero minor fuerit duo erunt puncta D quae Problema efficient.

Cor. Et eodem modo si data fuerint duo puncta A, C, et inveniendum sit tertium D inter ea quod faciet rectangulum AD, DC majus quadrato ex DA dato, quam in ratione, si fiat rectangulum AE, EC, sive AF, FC aequale dato, ostendetur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DA datam esse, unde invenietur punctum D ope ejusdem Prop. 53.

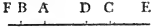


Pars 2. Quando rectangulum AD, DC minus est quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam AC applicetur rectangulum dato, quod scilicet addendum est ipsi ADC, aequale excedens quadrato, et sit E punctum applicationis quod est in AC producta, et F alterum; quoniam igitur, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FC, CE, hoc est simul cum dato rectangulo AE, EC aequale est rectangulo FD, DE, habebit FD, DE, ex hypothesi, datam rationem ad quadratum ex DB. Primo autem sit punctum B in AF producta. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum est quartum D inter F et E quod faciet rectangulum FD, DE ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. Eademque est limitatio rationis datae quae in parte 1. observata fuit. Si vero punctum B cadit in F data erit ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB sive DF, data igitur est ratio rectae DE ad ipsam DB,



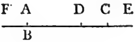


et data est recta BE, et propterea punctum D. Si autem punctum B cadat inter F et A, quoniam data est ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB, data erunt in recta linea tria puncta F, B, E ad inveniendum quartum D inter B et E quod faciet



rationem rectanguli FD, DE a segmentis inter ipsum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB datam, quod fiet ope Prop. 52.

Cor. Et eodem modo si data fuerint duo puncta A, C et inveniendum sit tertium D inter ea quod faciet rectangulum AD, DC minus quadrato ex DA dato, quam in ratione, si fiat rectangulum AE, EC, sive FC, CE aequale dato, ostendetur



rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DA datam esse, et invenietur punctum D ope Prop. 52.

Pars 3. Denique sit rectangulum AD, DC datum simul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem.

Cas. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, sitque E punctum applicationis propius puncto D, et sit F alterum. Quoniam igitur, per Prop. 23. Lib. 1. Pappi, rectangulum AD, DC simul cum ipso FD, DE est aequale dato rectangulo AE, EC erit rectangulum FD, DE id ad quod quadratum ex DB datam

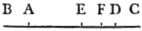


habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E quartum D est inveniendum extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ei propiora ad quadratum ex segmento DB inter ipsum et reliquum punctum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 55. in qua ostenditur datam rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minorem esse debere ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.

Cas. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur sectâ AC in E, erit rectangulum AD, DC simul cum quadrato ex ED aequale dato, quadrato scilicet ex EC; quadratum igitur ED est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; data propterea est ratio rectae ED ad ipsam DB, et data est recta BE, datum igitur est punctum D.



Cas. 3. Quando datum majus est quadrato ex EC dimidio ipsius AC; sit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex EF, et quoniam rectangulum AD, DC simul cum quadratis ex ED, DF aequale est quadratis ex EC, EF, hoc est dato, erit quadratum ex ED una cum quadrato ex EF id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; quoniam igitur quadratum ex ED simul cum dato quadrato ex EF datam habet rationem ad quadratum ex DB, erit quadratum ex ED minus quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum est tertium D extra ipsa quod faciet quadratum ex segmento DE inter ipsum et punctum E quod ei pro-



pius eſt minus quadrato ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum B minus dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 68. partis ſcilicet 2. Epitagmatis 3.

PROB. VI.

" DATIS in recta linea tribus punctis quartum invenire extra ipſa ad utraſvis partes quod faciet rectangulum a ſegmentis inter ipſum et duo quaevis ex punctis datis majus, aut minus quadrato ex ſegmento inter ipſum et reliquum punctum datum dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem."

PROP. LXXXI. PROB. VI. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, C, B quartum D invenire extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum AD, DC a ſegmentis inter ipſum et duo puncta ab eo remotiora majus, aut minus quadrato ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum datum dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod quadratum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

Cas. 1. Quando datum minus eſt rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis in AC pro-

ducta ad partes C, et fit F alterum. Quoniam igitur rectangulum AD, DC aequale est, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulo FD, DE simul cum ipso AE, EC, ablato dato rectangulo AE, EC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DE ad quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum est quartum D extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a segmentis inter ipsum et duo puncta F, E ab ipso remotiora in data ratione ad quadratum ex DB inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 54. Patet autem rationem datam debere esse majoris ad minorem.



Cas. 2. Quando datum aequale est rectangulo AB, BC; sumatur in BA producta recta AF aequalis ipsi CB, et per Prop. 24. Lib. 7. Pappi rectangulum AD, DC aequale erit ipsi FD, DB una cum rectangulo AB, BC; ablato igitur dato, rectangulo scilicet AB, BC ab ipso AD, DC reliquum, rectangulum scilicet FD, DB, est id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; recta igitur FD datam habet rationem ad ipsam DB, et data est recta FB ad ipsam DB, datum igitur est punctum D.

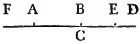


Cas. 3. Quando datum majus est rectangulo AB, BC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et fit E punctum applicationis quod est in AC producta ad partes C, sitque F alterum; et quoniam rectangulum AE, EC majus est ipso AB, BC cadet punctum E inter B et D puncta. Est autem, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi,

rectangulum AD, DC aequale ipſi FD, DE una cum rectangulo AE, EC, et ablato hoc a rectangulo AD, DC reliquum, rectangulum ſcilicet FD, DE datam habet, ex hypotheſi, rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E quartum D inveniendum eſt extra ipſa quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta extrema F, E in data ratione ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 56. in qua oſtenditur rationem datam non poſſe majorem eſſe ratione quadrati ex FE ad rectangulum FB, BE quater.



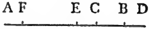
Cor. Et eodem modo ſi data fuerint duo puncta A, B et inveniendum ſit tertium D in AB producta quod faciet rectangulum AD, DB majus quadrato ex DB dato, quam in ratione, ſi fiat rectangulum AE, EB, ſive FB, BE aequale dato, oſtendetur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB datam eſſe; unde invenietur punctum D ope ejuſdem Prop. 56.



Pars 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; applicari igitur poteſt ad datam rectam AC rectangulum aequale dato deficiens quadrato; applicetur, et ſit E punctum applicationis quod ipſi C propius eſt, et F alterum. Quoniam igitur aequales ſunt AF, EC, et eſt D in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD,

DC una cum ipſo FC, CE, hoc eſt dato AE, EC aequale rectangulo FD, DE, quod propterea, ex hypotheſi, datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, E, B inveniendum eſt quartum D extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta remotiora F, E ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 54. Et patet rationem datam debere eſſe majoris ad minorem.



CAS. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in E, erit rectangulum AD, DC ſimul cum dato quadrato ex EC aequale quadrato ex ED quod propterea datam habet, ex hypotheſi, rationem ad quadratum ex DB. Data igitur eſt ratio rectae ED ad ipſam DB, et data eſt recta EB, quare datum eſt punctum D.



CAS. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex EC dimidio rectae AC; ſit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex EF; et quoniam rectangulum AD, DC una cum quadratis ex EC, EF, hoc eſt una cum dato, aequale eſt quadratis ex ED, EF, quadrata ex ED, EF, ex hypotheſi, datam habent rationem ad quadratum ex DB; eſt igitur quadratum ex ED minus quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur E, B inveniendum eſt tertium D extra ipſa quod faciet quadratum ex ſegmento DE inter ipſum et punctum E ab ipſo remotius minus qua-



drato ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum B dato quam in ratione, quod fiet ope partis 2. Prop. 67.

PARS 3. Denique ſit rectangulum AD, DC datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC producta ad partes C, et ſit F alterum. Et quoniam punctum D eſt in AB producta et eſt datum, rectangulum ſcilicet AE, EC majus ipſo AD, DC quod majus eſt rectangulo AB, BC, igitur datum rectangulum AE, EC majus debet eſſe ipſo AB, BC. Eſt autem rectangulum AD, DC ſimul cum ipſo FD, DE aequale, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulo FC, CE, hoc eſt dato rectangulo AE, EC; igitur rectangulum FD, DE eſt id ad quod quadratum ex DB datam, ex hypotheſi, habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum eſt quartum D inter B et E quod faciet rectangulum a ſegmentis FD, DE inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52. Nulla autem eſt limitatio rationis datae.



PROP. LXXXII. PROB. VI. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea tribus punctis B, A, C quartum D
" invenire extra ipſa ad partes C quod faciet rectangulum
" AD, DC a ſegmentis inter ipſum et duo puncta A, C ipſi

" propiora majus, aut minus quadrato ex DB ſegmento inter " ipſum et reliquum punctum B dato, quam in ratione, vel " quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod " quadratum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC producta ad partes C, et F alterum. Quoniam igitur ſunt FA, CE aequales, et eſt D in FE producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC aequale rectangulo FD, DE una cum ipſo AE, EC. Ablato igitur dato,

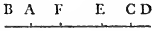


rectangulo ſcilicet AE, EC ab ipſo AD, DC reliquum, rectangulum ſcilicet FD, DE habet, ex hypotheſi, datam rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum eſt quartum D extra ipſa quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta F, E ipſi propiora in data ratione ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 55. Patet vero rationem datam debere eſſe minoris ad majorem.

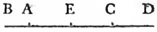
Pars 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC applicari poteſt rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et ſit

E punctum applicationis quod puncto C est propius, et F alterum. Igitur quoniam aequales ſunt AF, EC et eſt punctum D in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC una cum ipſo FC, CE, hoc eſt una cum dato rectangulo AE, EC aequale rectangulo FD, DE; igitur, ex hypotheſi, rectangulum FD, DE datam habet rationem ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E quartum D inveniendum eſt extra ipſa ad partes E quod faciet rationem rectanguli FD, DE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta F, E ipſi propiora in data ratione ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 55. in qua oſtenditur datam rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB debere majorem eſſe ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB, ut ſcilicet cadat punctum D in AC producta.

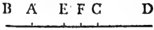


Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in E, rectangulum AD, DC ſimul cum dato, quadrato ſcilicet ex EC aequale eſt quadrato ex ED quod propterea datam, ex hypotheſi, habet rationem ad quadratum ex DB. Data igitur eſt ratio rectae ED ad ipſam DB, et data eſt BE, quare datum eſt punctum D.



Cas. 3. Quando datum eſt majus quadrato ex EC dimidio ipſius AC; ſit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex EF, eſt igitur rectangulum AD, DC una cum quadratis ex EC, EF, hoc eſt una cum dato, aequale quadratis ex

ED, EF, quae propterea ſimul habent, ex hypotheſi, datam rationem ad quadratum ex DB; quare quadratum ex ED minus eſt quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur duobus punctis B, E inveniendum eſt tertium D extra ipſa ad partes E quae



faciet quadratum ex DE minus quadrato ex DB dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 2. Prop. 68.

Pars 3. Denique ſit rectangulum AD, DC datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC producta, et F alterum. Et primò, ſit rectangulum AE, EC, hoc eſt ipſum CF, FA minus rectangulo CB, BA, et cadet punctum F inter A et B. Eſt autem, per Prop. 23. Lib. 1. Pappi, rect-



angulum AD, DC ſimul cum ipſo FD, DE aequale rectangulo FC, CE, hoc eſt dato, rectangulo ſcilicet AE, EC; rectangulum igitur FD, DE eſt id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis B, F, E inveniendum eſt quartum D inter puncta F, E quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta F, E ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et punctum B quod eſt ad eaſdem partes ad quas eſt punctum medium F in data ratione, quod fiet ope Prop. 53. In cujus caſu 3. oſtenditur rationem datam non poſſe majorem eſſe ratione quadrati ex FE ad rectangulum EB, BF quater.

Secundò, ſit rectangulum CF, FA aequale rectangulo CB, BA, hoc eſt cadat punctum F in ipſum B; habet igitur, ut in caſu 1. oſtenſum, rectangulum FD, DE, ſive BD, DE datam rationem ad quadratum ex DB, quare data eſt ratio rectae ED ad ipſam DB, et data eſt recta BE, datum igitur eſt punctum D.



Tertiò, ſit rectangulum CF, FA majus ipſo CB, BA, et cadat punctum F in AB producta ad partes B; et, ut in caſu 1. data oſtendetur ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E quartum D inveniendum eſt inter puncta B, E quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum B in ratione data, quod fiet ope Prop. 52. in qua quidem oſtenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minorem eſſe ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.

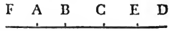


PROP. LXXXIII. PROB. VI. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quartum D in-
" venire extra ipſa ad partes C quod faciet rectangulum AD,
" DC a ſegmentis inter ipſum et duo puncta extrema A, C
" majus, aut minus quadrato ex ſegmento DB inter ipſum et

" reliquum punctum B dato, quam in ratione, vel quod fa-
" ciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod qua-
" dratum hoc datam habet rationem."

PARS I. Sit rectangulum AD, DC majus quadrato ex DB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC producta ad partes C, et F alterum; et quoniam, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC aequale eſt rectangulo FD, DE una cum dato rectangulo AE, EC; igitur ablato dato, rectangulo ſcilicet AE, EC a rectangulo AD, DC reliquum, rectangulum ſcilicet FD, DE eſt id ad quod quadratum ex DB datam habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum eſt quartum D extra ipſa ad partes E quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex ſegmento DB inter ipſum et reliquum punctum B in ratione dato, quod fiet ope Prop. 56. in qua oſtenditur rationem datam non poſſe majorem eſſe ratione quadrati ex FE ad rectangulum FB, BE quater.



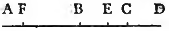
COR. Eodem modo ſi data ſint duo puncta A, C et inveniendum eſt tertium D in AC producta quod faciet rectangulum AD, DC majus quadrato ex DA ſegmento inter ipſum et punctum ab eo remotius A dato, quam in ratione, ſi fiat rectangulum AE, EC, ſive FC, CE aequale dato,



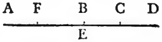
oſtendetur datam eſſe rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DA; unde invenietur punctum D ope ejuſdem Prop. 56.

Pars 2. Sit rectangulum AD, DC minus quadrato ex DB dato, quam in ratione.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC poteſt applicari rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, ſitque E punctum applicationis quod propius eſt puncto C, et F alterum. Quoniam igitur aequales ſunt AF, EC, et eſt punctum D in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC ſimul cum dato rectangulo AE, EC, ſive FC, CE, aequale rectangulo FD, DE quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad quadratum ex DB. Primò autem ſit rectangulum AE, EC minus ipſo AB, BC, et cadet punctum E inter B et C. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E inveniendum eſt quartum D extra ipſa ad partes E quod faciet rationem rectanguli FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB in ratione data, quod fiet ope Prop. 56. in qua oſtenditur rationem datam non poſſe majorem eſſe ratione quadrati ex FE ad rectangulum FB, BE quater, at majorem eſſe ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.



Secundò, ſit rectangulum AE, EC aequale ipſi AB, BC, et cadet punctum E in B; quoniam igitur data oſtenſa eſt ratio rectanguli

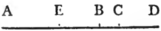


FD, DE, ſive FD, DB ad quadratum ex DB, data erit ratio rectae FD ad ipſam DB, et data eſt FB, quare datum eſt punctum D.

Tertiò, ſit rectangulum AE, EC majus ipſo AB, BC, et cadat punctum E inter F et B; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB, data erunt in recta linea tria puncta F, E, B ad inveniendum quartum D extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et duo puncta F, E ab ipſo remotiora in data ratione ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 54. in qua oſtenditur rationem rectanguli FD, DE ad quadratum ex DB minorem eſſe ratione rectanguli FC, CE ad quadratum ex CB.



Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in E erit rectangulum AD, DC ſimul cum dato, quadrato ſcilicet ex EC aequale quadrato ex ED, quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad quadratum ex DB; data igitur eſt ratio rectae ED ad ipſam DB, et data eſt EB, quare datum erit punctum D.



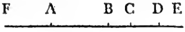
Cas. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex EC dimidio rectae AC; ſit datum aequale quadrato ex EC una cum quadrato ex recta EF, eſt igitur rectangulum AD, DC ſimul cum dato, quadratis ſcilicet ex EC, CF aequale quadrato ex ED una cum quadra-



to ex EF; quadratum igitur ex ED una cum dato quadrato ex EF habet, ex hypotheſi, datam rationem ad quadratum ex DB, hoc eſt quadratum ex ED minus eſt quadrato ex DB dato, quam in ratione. Datis igitur duobus punctis E, B inveniendum eſt tertium C extra ipſa quod faciet quadratum ex DE ſegmento inter ipſum et punctum E ab ipſo remotius minus quadrato ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 2. Prop. 67.



Pars 3. Denique ſit rectangulum AD, DC datum ſimul cum eo ad quod quadratum ex DB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato; ſitque E punctum applicationis quod eſt in AC producta, et F alterum; et quoniam aequales ſunt FA, CE et eſt punctum D inter C et E, nam rectangulum AD, DC minus eſt dato AE, EC, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AD, DC ſimul cum ipſo FD, DE aequale rectangulo FC, CE, hoc eſt dato, rectangulo ſcilicet AE, EC; rectangulum igitur FD, DE eſt id ad quod quadratum ex DB datam, ex hypotheſi, habet rationem. Datis igitur in recta linea tribus punctis F, B, E quartum D eſt inveniendum inter B et E quod faciet rectangulum FD, DE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema F, E ad quadratum ex DB ſegmento inter ipſum et reliquum punctum B in data ratione, quod fiet ope Caſus 3. Prop. 52. Ubi oſtenditur rationem rectanguli



FD, DE ad quadratum ex DB minorem esse ratione rectanguli FC, CE, hoc est dati rectanguli AE, EC ad quadratum ex CB.

Cor. Ex Problemate 5to et 6to similia Corollaria sequuntur ei quod ex Problemate 3tio ostensum fuit.

DE SECTIONE DETERMINATA

LIBER QUARTUS.

PROBLEMA PRIMUM.

"DATIS in recta linea quatuor punctis quintum invenire
" inter puncta media quod faciet rectangulum a segmentis
" inter ipsum et duo quaevis ex punctis datis majus, aut mi-
" nus rectangulo a segmentis inter ipsum et reliqua puncta
" data dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum
" illud datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc da-
" tam habet rationem."

PROP. LXXXIV. PROB. I. EPITAGMA 1.

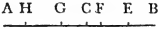
" DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin-
" tum F invenire in segmento medio CE quod faciet rectan-
" gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et duo puncta A, C
" quae sunt ad easdem ejus partes majus, aut minus rectan-
" gulo BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta
" B, E dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum il-
" lud datum simul cum eo ad quod rectangulum BF, FE da-
" tam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione; ad datam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et sit G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; aequales igitur sunt HA, CG, et quoniam punctum F est in HG producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum dato rectangulo AG, GC; igitur a rectangulo AF, FC ablato dato, rectangulo scilicet AG, GC reliquum, scilicet rectangulum HF, FG datam, ex hypothesi, habet rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F inter puncta media G, E quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G quae sunt ad easdem ejus partes ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta B, E in ratione data, quod fiet ope Prop. 57. quae est Prob. 1. Epitagma 1. Lib. 2.



Pars 2. Sit rectangulum AE, FC minus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione.

Cas. 1. Quando datum minus est quadrato ex dimidio rectae AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et sit G punctum applicationis quod propius est puncto C, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt AH, GC, et est F punctum in AC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC una

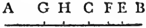


cum ipso HC, CG, hoc est una cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothesi, datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F inter puncta media G, E quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta H, G quae sunt ad easdem ejus partes in data ratione ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta B, E, quod fiet ope Prop. 57.

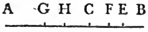
Cas. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur sectà AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF quod propterea datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter G et E quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta F, B quae sunt ad easdem ejus partes ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 51. Et patet rationem datam rectanguli BF, FE minorem debere esse ratione rectanguli BC, CE ad quadratum ex GC.



Cas. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; sit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, et rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC una cum quadrato ex GH erit aequale quadrato ex GF una cum eo ex GH; quadrata igitur ex GF, GH simul datam, ex hy-



pothesi, habent rationem ad rectangulum BF, FE, et datum est quadratum ex GH, quare quadratum ex GF minus est rectangulo BF, FE dato, quam in ratione; et propterea, per Prop. 14. Dat. Edit. Glasg. 1762. rectangulum BF, FE majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione. Datis igitur in recta linea tribus punctis G, F, B inveniendum est quartum F inter G et E quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et puncta E, B quae sunt ad easdem ejus partes majus quadrato ex segmento FG inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 78. hoc est Prob. 5. Epitagmatis 1. Lib. 3.



Pars 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et sit G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter C et G, nam rectangulum AF, FC minus est ipso AG, GC, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; est igitur rectangulum HF, FG id ad quod rectangulum BF, FE datam, ex hypothesi, habet rationem. Primò, sit rectangulum AG, GC minus ipso AE, EC, et cadet punctum G inter puncta C, E; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveni-



endum eſt quintum F in ſegmento extremo HG quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmento FB inter ipſum et extremum B quod ad eaſdem eſt partes ad quas ſunt puncta media G, E, et ſegmento FE inter ipſum et punctum medium E ab ipſo remotius, in data ratione ad rectangulum HF, FG, quod fiet ope Prop. 62. quae eſt Prob. 2. Epitagma 3. Lib. 2.

Secundò, ſit rectangulum AG, GC aequale ipſi AE, EC, hoc eſt cadat punctum G in ipſum E; et quoniam data oſtenſa eſt ratio HF, FG, ſive rectanguli HF, FE ad ipſum BF, FE, data erit ratio HF ad FB, et data eſt recta HB, datum igitur eſt punctum F.



Tertiò, ſit rectangulum AG, GC majus ipſo AE, EC, at minus rectangulo AB, BC, et cadet punctum G inter E et B; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG ad ipſum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F in ſegmento extremo HE quod faciet rationem rectanguli BF, FE a ſegmento FB inter ipſum et punctum extremum B quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media E, G, et ſegmento FE inter ipſum et punctum medium E ei propius ad rectangulum HF, FG inter ipſum et reliqua puncta H, G datam, quod fiet ope Prop. 61. quae eſt Prob. 2. Epitagma 2. Lib. 2.



Quartò, ſit rectangulum AG, GC aequale ipſi AB, BC, hoc eſt cadat punctum G in B, et oſ-



tendetur punctum F datum eſſe ut in praecedente articulo ſecundo.

Quintò, denique ſit rectangulum AG, GC majus ipſo AB, BC, et cadet punctum G in CB producta; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG ad ipſum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum F in ſegmento extremo HE quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema H, G ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 60. quae eſt Prob. 2. Epitagma 1. Lib. 2.

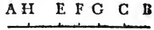


PROP. LXXXV. PROB. I. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quintum F invenire inter puncta media E, C quod faciet rectangulum AF, FC a ſegmentis inter ipſum et alterum extremum A, mediumque C a puncto A remotius majus, aut minus rectangulo BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

PARS 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipſo BF, FE dato, quam in ratione; quoniam igitur datum minus eſt rectangulo AF, FC a quo auferendum eſt, idem minus erit quadrato ex dimidio rectae AC, quare ad datam rectam AC appli-

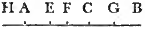
cari poteſt rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, et ſit G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; et quoniam aequales ſunt AH, GC, et eſt punctum F inter H et G, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo AG, GC una cum ipſo HF, FG; ablato igitur dato, rectangulo ſcilicet AG, GC ab ipſo AF, FC, reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG datam habet, ex hypotheſi, rationem ad ipſum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B quintum F inveniendum eſt inter puncta media E, G quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et extremum A mediumque punctum G ab A remotius in data ratione ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta reliqua E, B, quod fiet ope Prop. 58. quae eſt Prob. 1. Epitagma 2. Lib. 2.



Pars 2. Sit rectangulum AF, FC minus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F inter A et C, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HC, CG, hoc eſt ſimul cum dato, rectangulo ſcilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Primò autem, ſit rectangulum datum AG, GC minus ipſo AB, BC, et cadet



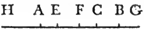
punctum G inter C et B. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum C inter puncta media E, G quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H mediumque ab H remotius in data ratione ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 58.



Secundò, ſit rectangulum AG, GC aequale ipſi AB, BC et cadet punctum G in ipſum B; et quoniam rectangulum HF, FG, ſive HF, FB datam habet rationem ad rectangulum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad rectam FE, et data eſt recta HE, datum igitur eſt punctum F.



Tertiò, denique ſit rectangulum AG, GC majus ipſo AB, BC et cadet punctum G in CB producta; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG ad ipſum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum F in ſegmento medio EB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 59. quae eſt Prob. 1. Epitagma 3. Lib. 2.



PARS 3. Denique ſit rectangulum AF, FC datum ſimul cum eo ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem.

CAS. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio

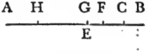
ipsius AC; igitur ad datam rectam AC applicari potest rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, sitque G punctum applicationis quod propius est ipsi C, et H alterum; aequales igitur sunt AH, GC, et est punctum F inter G et C quoniam rectangulum AF, FC minus est ipso AG, GC, quare, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi,



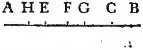
rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale est rectangulo AG, GC, hoc est dato; rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem. Primò autem, cadat punctum E inter G, C puncta, et data erunt in recta linea quatuor



puncta H, G, E, B ad quintum F inveniendum in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem partes ipsius F ad quas sunt puncta media G, E, et punctum medium G ab ipso F remotius ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et reliqua puncta data in ratione data, quod fiet ope Prop. 62. Secundò, cadat punctum E in ipsum



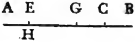
G, et quoniam data ostensa est ratio rectanguli HF, FG, sive HF, FE ad ipsum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, datum igitur est punctum F. Tertiò, cadat punctum E inter H et G; quoniam



igitur data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F inter puncta media E, G quod

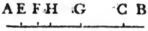
faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum B mediumque E a B remotius ad rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 58.

Quartò, cadat punctum E in ipſum H, et punctum F datum oſtendetur ut in articulo ſecundo praecedente.



Quintò, cadet punctum E inter A et H, et punctum F poterit vel eſſe inter G et C, in quo caſu data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, G, B ad inveniendum quintum F in ſegmento extremo GB quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 60. vel poterit punctum F eſſe inter puncta E, H, in quo caſu data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, G, B ad inveniendum quintum F in ſegmento extremo EH quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope ejuſdem Prop. 60.

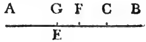




Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio ipſius AC; bifariam igitur ſectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC ſimul cum quadrato ex GF aequale quadrato ex GC, hoc eſt dato, quadratum igitur ex GF eſt id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem. Et primò, ſi punctum

E fuerit inter G, C puncta, data erunt in recta linea tria puncta G, E, B ad inveniendum quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta E, B ad quadratum ex ſegmento FG inter ipſum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. Secundò, ſi cadat punctum E in ipſum G; quoniam data eſt ratio rectanguli BF, FE, ſive BF, FG ad quadratum ex FG, data erit ratio rectae BF ad ipſam FG, et data eſt recta GB, quare datum eſt punctum F. Tertiò, cadat punctum E inter A et G; et quoniam data eſt ratio rectanguli BF, FE ad quadratum ex FG, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F inter E et G vel etiam inter G et B quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B ad quadratum ex ſegmento FG inter ipſum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 52.







Cas. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex GC dimidio ipſius AC; ſit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; rectangulum igitur AF, FC ſimul cum quadratis ex GF, GH aequale eſt dato, quadrato ſcilicet ex GC una cum quadrato ex GH, quare, ex hypotheſi, quadratum ex GF una cum eo ex GH eſt id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem, et



datum eſt quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus eſt rectangulo BF, FE dato, quam in ratione, et propterea rectangulum BF, FE, per Prop. 14. Dat. majus eſt quadrato ex FG dato, quam in ratione. Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et ea puncta majus quadrato ex FG ſegmento inter ipſum et punctum extremum G quod eſt ad eas partes puncti F ad quas eſt punctum medium E, dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 80. quae eſt Prob. 5. Epitagma 3. ſcilicet quando punctum E eſt inter G et C. At quando punctum E cadit in ipſum G, data erunt duo puncta E, B ad inveniendum tertium F inter ea quod faciet rectangulum BF, FE majus quadrato ex FG, ſive FE dato, quam in ratione, quod fiet ope Corollarii Partis 1. Prop. 80. Si vero punctum E fuerit inter A et G, data erunt tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F in altero ex ſegmentis BG, GE quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 79.





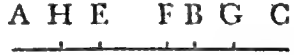




PROP. LXXXVI. PROB. I. EPITAGMA 3.

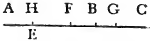
"DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin-
"tum F invenire in ſegmento medio EB quod faciet rectan-
"gulum AF, FC a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema
"A, C majus, aut minus rectangulo BF, FE a ſegmentis in-
"ter ipſum et reliqua puncta E, B dato, quam in ratione, vel
"quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod
"rectangulum hoc datam habet rationem."

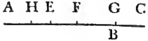
Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipſo BF, FE dato, quam in ratione; quoniam igitur datum minus eſt rectangulo AF, FC a quo auferendum eſt, idem minus erit quadrato ex dimidio rectae AC; quare ad datam rectam AC applicari poteſt rectangulum dato aequale deficiens quadrato; applicetur, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; et quoniam aequales ſunt rectae AH, GC, et eſt punctum F inter H et G, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo AG, GC una cum ipſo HF, FG; igitur a rectangulo AF, FC ablato dato, rectángulo ſcilicet AG, GC, reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum BF, FE. Primò, cadant puncta E, B inter puncta H, G, vel H, G inter ipſa E, B; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG ad ipſum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E,



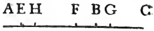


B, G in primo caſu, vel E, H, G, B in altero, ad inveniendum quintum F inter puncta media quod faciet rectangulum a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema ad rectangulum a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta in data ratione, quod fiet ope Prop. 59. Secundò, cadat punctum B inter H, G, punctum vero E in ipſum H; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive EF, FG ad ipſum BF, FE, data erit ratio rectae FG ad ipſam FB, et data eſt recta BG, datum igitur eſt

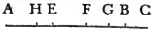




punctum F. Et ſimiliter invenietur punctum F in caſu in quo punctum B cadit in punctum G. Tertiò, cadat punctum B inter H, G, punctum vero E inter A, H puncta; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG ad ipſum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, B, G ad inveniendum quintum F inter

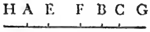


puncta media H, B quod faciet rationem rectanguli HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum G mediumque H quod ab ipſo G remotius eſt ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 58. Quartò, cadat punctum E inter H, G puncta, punctum vero B cadat inter G, C; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG ad ipſum BF, FE, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F inter puncta media E, G quod faciet rationem rectanguli HF, FG a ſeg-



mentis inter ipſum et punctum extremum H mediumque G ab ipſo H remotius ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta B, E, quod fiet ope ejuſdem Prop. 58.

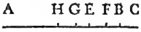
Pars 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipſo BF, FE dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; et quoniam aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F inter A et C, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HC, CG, hoc eſt ſimul cum dato, rectangulo ſcilicet AG, GC aequale



rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad rectangulum BF, FE. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F inter puncta media E, B quod faciet rationem rectanguli HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema H, G ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 59.

Pars 3. Denique ſit rectangulum AF, FC datum ſimul cum eo ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt



ipſi C, et H alterum; et quoniam aequales ſunt AH, GC, et

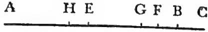
est punctum F inter G et C, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo AG, GC, hoc est dato; rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum BF, FE datam, ex hypothesi, habet rationem. Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C, et data erunt in recta linea quatuor puncta H, G, E, B ad inveniendum quintum F in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad eas partes ipsius F ad quas sunt puncta media G, E, punctumque medium G quod ipsi H propius est ad rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum F et reliqua puncta data in ratione data, quod fiet ope Prop. 62.



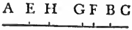
Secundò, sit punctum B inter ipsa G, C, punctum vero E in ipso G; quoniam igitur data est ratio rectanguli HF, FG, sive HF, FE ad ipsum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad ipsam FB, et data est recta HB, quare datum erit punctum F.



Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter H et G; et quoniam, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale est dato, rectangulo scilicet AG, GC, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum inter G et B quintum F quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad eas partes ipsius F ad quas sunt puncta media E, G mediumque

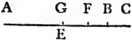


G ab ipſo H remotius ad rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 61. Quartò, cadat punctum E in ipſum H, et datum oſtendetur punctum F, ut in articulo ſecundo praecedente. Quintò, ſit punctum E inter A et H, et data erunt in recta linea quatuor puncta E, H, G, B ad inveniendum quintum F in ſegmento extremo GB quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 60.



Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC ſimul cum quadrato ex FG aequale dato, quadrato ſcilicet ex GC; quadratum igitur ex FG eſt id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem. Primò, ſit punctum E inter G et B; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE inter ipſum et ea puncta ad quadratum ex FG ſegmento inter ipſum et punctum extremum G quod eſt ad eaſdem partes ipſius F ad quas eſt medium E in data ratione, quod fiet ope Prop. 53. Secundò, ſit punctum E in G; et quoniam data eſt ratio rectanguli BF, FE ad quadratum ex FG, ſive FE, data erit ratio rectae BF ad ipſam FE, et data eſt recta BE, datum igitur erit punctum F. Tertiò,



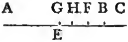


ſit punctum E inter A et G; et quoniam data eſt ratio rectanguli BF, FE ad quadratum ex FG, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F inter G et B quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B ad quadratum ex FG ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 52.



CAS. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex GC dimidio rectae AC; ſit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; et quoniam rectangulum AF, FC ſimul cum quadratis ex GF, GH aequale eſt quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, hoc eſt dato, erit quadratum ex GF una cum quadrato ex GH id ad quod rectangulum BF, FE datam habet rationem; et quoniam datum eſt quadratum ex GH, erit quadratum ex GF minus rectangulo BF, FE dato, quam in ratione, et propterea rectangulum BF, FE, per 14. Dat. majus erit quadrato ex FG dato, quam in ratione. Primò, ſit punctum E inter G, B puncta, et data erunt in recta linea tria puncta G, E, B ad inveniendum quartum F inter E et B quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta E, B majus quadrato ex FG dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 80. Secundò, cadat punctum E in ipſum G, et data erunt duo puncta E, B ad inveniendum tertium F inter ea quod faciet rectangulum BF, FE majus quadrato ex FE, ſive





FG dato, quam in ratione, quod fiet ope Cor. Partis 1. Prop. 80. Tertiò, cadat E inter puncta A, G, et data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F inter G et B quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 79.



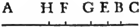
LIB. IV. PROB. II.

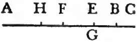
" DATIS in recta linea quatuor punctis quintum invenire " in altero ex ſegmentis extremis quod faciet rectangulum a " ſegmentis inter ipſum et duo quaevis ex punctis datis ma- " jus, aut minus rectangulo a ſegmentis inter ipſum et reli- " qua duo puncta data dato, quam in ratione, vel quod fa- " ciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod rect- " angulum hoc datam habet rationem."

PROP. LXXXVII. PROB. II. EPITAGMA 1.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quin- " tum F invenire in altero ex ſegmentis extremis AE quod " faciet rectangulum AF, FC a ſegmentis inter ipſum et punc- " ta extrema A, C majus, aut minus rectangulo EF, FB a ſeg- " mentis inter ipſum et reliqua puncta E, B dato, quam in " ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum " eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; et quoniam datum minus eſt rectangulo AF, FC minus erit quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur igitur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, et ſit G punctum applicationis quod propius eſt puncto C, et H alterum. Et quoniam aequales ſunt rectae AH, GC, et eſt punctum F inter H et G, erit, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo AG, GC una cum ipſo HF, FG; ablato igitur dato rectangulo AG, GC ab ipſo AF, FC, reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG eſt, ex hypotheſi, id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, ſint puncta E, B inter G, C, et data erunt quatuor puncta H, G, E, B in recta linea ad inveniendum quintum F inter H et G quod faciet rectangulum BF, FE a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum B quod eſt ad eaſdem partes ipſius F ad quas ſunt puncta media G, E et punctum medium E quod ipſi B eſt propius in data ratione ad rectangulum HF, FG a ſegmentis inter idem punctum F et duo reliqua puncta H, G, quod fiet ope Prop. 62. Secundò, ſit punctum B inter G et C, punctum vero E cadat in ipſum G; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF, FE ad ipſum BF, FE, data erit ratio rectae HF ad ipſam FB, et data eſt recta HB, quare datum erit punctum F. Et ſimiliter invenietur punctum F ſi B cadat in G, vel E in H. Tertiò, cadat punctum B inter G et C, et punctum E inter H et G; data igitur erunt in recta li-

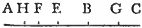




nea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F in segmento extremo HE quod faciet rectangulum BF, FE a segmentis inter ipsum et punctum extremum B quod est ad easdem partes

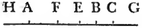


ipsius F ad quas sunt puncta media E,G, mediumque E a B remotius in data ratione ad rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta H, G, quod fiet ope Prop. 61. Similiter invenietur punctum F si fuerit E inter A et H, et B inter H et G. Quartò, sint puncta E, B inter ipsa H, G, et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum F in



segmento extremo HE quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 60.

Pars 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipso EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque G applicationis punctum quod est in AC producta, et H alterum. Quoniam igitur, per Prop. 31. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale

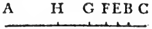


est rectangulo HF, FG, erit HF, FG id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est

quintum F in ſegmento extremo HE quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 60.

Pars 3. Denique ſit rectangulum AF, FC datum ſimul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur igitur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; et quoniam aequales ſunt AH, GC, et eſt punctum F inter G et C, (quoniam datum rectangulum AG, GC majus eſt ipſo AF, FC,) erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HF, FG aequale rectangulo AG, GC, hoc eſt dato; igitur rectangulum HF, FG eſt id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem.

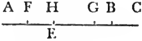


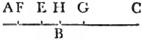
Primò, ſint puncta E, B inter ipſa G, C; data igitur ſunt in recta linea quatuor puncta H, G, E, B ad inveniendum quintum F inter puncta media G, E quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo puncta H, G quae ſunt ad eaſdem ejus partes in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 57. Vel poterit punctum F inveniri inter A et H, et tum data erunt quatuor puncta H, G, E, B ad inveniendum quintum F extra ipſa ad partes H quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter



ipsum et duo puncta H, G ipsi propiora ad rectangulum EF, FB inter ipsum et reliqua duo puncta in data ratione, quod fiet ope Prop. 63. Secundò, sit punctum B inter G et C, et punctum E inter H et G; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum extra ipsa ad partes H quintum F quod faciet rationem rectanguli HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum H ipsi proximum mediumque G ab ipso remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta, quod fiet ope Prop. 64. Tertiò, sit punctum B inter G, C, et punctum E in H; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG, sive EF, FG ad ipsum EF, FB, data erit ratio rectae FG ad ipsam FB, et data est recta GB, datum igitur est punctum F. Et similiter invenietur punctum F si punctum B cadat in H, aut in G. Quartò, sint puncta E, B inter ipsa H, G; et quoniam data est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum EF, FB, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, B, G ad inveniendum quintum F extra ipsa ad partes H quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione











ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo puncta reliqua E, B, quod fiet ope Prop. 65. Et eodem modo invenietur punctum F ſi puncta H, G fuerint inter ipſa E, B. Quintò, ſint puncta E, B, inter ipſa A, H, et data erunt in recta linea quatuor puncta E, B, H, G ad inveniendum quintum F extra ipſa ad partes E quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo puncta H, G ab ipſo remotiora ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 63.





Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC ſimul cum quadrato ex GF aequale quadrato ex GC, hoc eſt dato; quadratum igitur ex GF eſt id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, ſint puncta E, B inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F inter G et E quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo puncta E, B quae ſunt ad eaſdem ejus partes ad quadratum ex FG ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 51. Vel poteſt inveniri F inter A et G; in quo caſu data erunt in recta linea tria puncta G, E, B ad inveniendum quartum F extra ipſa





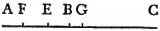
quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ab ipso remotiora in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum B, quod fiet ope Prop. 54. in qua ostenditur puncta ipsi G propiora, ut F, facere majorem rationem rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora, ut A; debet igitur data ratio rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG major esse ratione rectanguli EA, AB ad quadratum ex AG. Secundò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E in G; quoniam igitur data est ratio rectanguli EF, FB, hoc est GF, FB ad quadratum ex FG, data erit ratio rectae FB ad ipsam FG, et data est recta GB, datum igitur est punctum F.



Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; quoniam igitur data est ratio rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B et inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes E quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad quadratum ex segmento FG inter ipsum et reliquum punctum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 56.



Quartò, sint puncta E, B inter ipsa A, G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, G inveniendum est quartum F extra ipsa quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum reli-



quum G, quod fiet ope Prop. 55. in qua oſtenditur puncta ipſi E propiora, ut F, minorem facere rationem rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora, ut A; igitur ratio data rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG minor debet eſſe ratione rectanguli EA, AB ad quadratum ex AG.

Cas. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex GC dimidio ipſius AC; ſit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; et quoniam rectangulum AF, FC ſimul cum quadratis ex GF, GH aequale eſt quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, hoc eſt dato, erit quadratum ex GF una cum eo ex GH id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; et datum eſt quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus eſt rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; quare, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB majus eſt quadrato ex GF dato, quam in ratione. Primò, ſint puncta E, B inter ipſa G, C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F inter G et E quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo puncta E, B quae ſunt ad eaſdem ejus partes majus quadrato ex GF ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 78. partis ſcilicet ejus 1. Secundò, ſit punctum B inter G et C, punctum vero E in G; datis igitur duobus punctis G, B inveniendum eſt tertium F in BG producta quod faciet rectangulum EF, FB, ſive GF, FB, majus quadrato ex FG ſegmento inter ipſum et punctum G ei propius dato, quam in ratione, quod

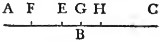




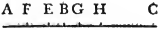
fiet ope Cor. Cas. 3. Part. 1. Prop. 81. Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; quoniam igitur rectangulum EF, FB majus est



quadrato ex GF dato, quam in ratione, data erunt in recta linea tria puncta E, G, B ad inveniendum quartum F in BE producta quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 83. Quartò, sit punctum B in G, punctum vero E inter A et G; et quoniam rectangulum EF, FB majus est quadrato



ex FG, sive FB dato, quam in ratione; datis duobus punctis E, B inveniendum est tertium F in BE producta, quod hoc efficiet; fiet vero ope Cor. Partis 1. Prop. 83. Quintò, sint puncta E, B inter ipsa A, G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, G inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes E quod

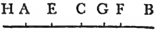


faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 82.

PROP. LXXXVIII. PROB. II. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
" tum F invenire in altero ex ſegmentis extremis CB quod
" faciet rectangulum AF, FC a ſegmentis inter ipſum et punc-
" tum extremum A quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas
" ſunt puncta media E, C punctumque medium C ab A re-
" motius majus, aut minus rectangulo EF, FB a ſegmentis
" inter ipſum et puncta reliqua E, B dato, quam in ratione,
" vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad
" quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipſo EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum. Eſt autem datum, rectangulum ſcilicet AG, GC minus ipſo AF, FC a quo auferendum eſt; quare cadet punctum G inter C et F; et quoniam aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F in CG producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum ipſo AG, GC; igitur ablato dato, rectangulo ſcilicet AG, GC ab ipſo AF, FC, reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG eſt id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypotheſi, habet rationem. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F in ſegmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H quod eſt ad



eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media E, G punctumque medium G ab H remotius ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta reliqua E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 61.

PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipſo EF, FB dato, quam in ratione.

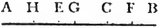
CAS. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur igitur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt AH, GC, et eſt punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HC, CG, hoc eſt ſimul cum dato, rectangulo ſcilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea eſt id ad



quod, ex hypotheſi, rectangulum EF, FB datam habet rationem. Primò, ſit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum eſt quintum F in ſegmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media G, E punctumque medium G quod ipſi H eſt propius, in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum F et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 62. Secundò, ſit punctum E in G; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF,



FE ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FB, et data eſt recta HB, datum igitur eſt punctum F. Tertiò, ſit punctum E inter H et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F in ſegmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter

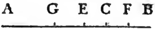


ipſum et punctum extremum H quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media E, G punctumque medium G quod ab ipſo H eſt remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 61. Quartò, ſit punctum E inter A, H puncta; datis igitur in recta linea quatuor punctis E, H, G, B inveniendum eſt quintum F in ſegmento extremo GB quod faciet



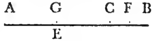
rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta media H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B, quod fiet ope Prop. 60.

Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC ſimul cum dato, quadrato ſcilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypotheſi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB. Primò, ſit punctum E inter G et C; datis



igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta E, B ad quadratum ex FG

ſegmento inter ipſum et punctum extremum G quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas eſt punctum medium E in ratione data, quod fiet ope Prop. 53. Secundò, ſit punctum E in G; datis igitur in recta linea duobus punctis G, B inveniendum eſt tertium F



inter ipſa quod faciet rectangulum EF, FB, ſive GF, FB ad quadratum ex GF in data ratione; data igitur eſt ratio rectae FB ad ipſam GF, et data eſt GB, igitur datum eſt punctum F. Tertiò, ſit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum eſt quartum F inter G et B quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B in data ratione ad quadratum ex FG ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G, quod fiet ope Prop. 52. in qua oſtenditur puncta ipſi G propiora majorem facere rationem rectanguli ad quadratum quam puncta remotiora; ratio igitur data rectanguli EF, FB ad quadratum ex FG minor debet eſſe ratione rectanguli EC, CB ad quadratum ex CG.



Cas. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex GC dimidio ipſius AC; ſit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; eſt igitur rectangulum AF, FC ſimul cum dato, quadrato ſcilicet ex GC una cum eo ex GH aequale quadrato ex GF una cum quadrato ex GH quae ſimul propterea datam habent rationem ad rectangulum EF, FB, ex hypotheſi; et quoniam datum eſt quadratum ex GH, erit quadratum ex GF mi-



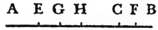
nus rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; et propterea, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB majus erit quadrato ex FG dato, quam in ratione. Primò, sit punctum E inter G, C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB



a segmentis inter ipsum et puncta E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et extremum G quod est ad easdem partes ipsius F ad quas est punctum medium E dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 80. ejus scilicet partis 2. Secundò, sit punctum E in G; datis igitur duobus punctis E, B inveniendum est tertium F inter ipsa quod faciet rectangulum EF, FB



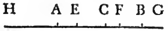
majus quadrato ex FG, sive FE dato, quam in ratione, quod fiet ope Cor. Partis 2. ejusdem Prop. 80. Tertiò, sit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum F inter G et B quod faciet rectangulum EF,



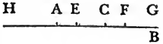
FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 79. Partis scilicet ejus 1.

Pars 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale ex-

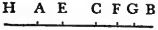
cedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; et quoniam datum rectangulum ſcilicet AG, GC majus eſt ipſo AF, FC cadet punctum F inter C et G. Aequales autem ſunt rectae HA, CG, et eſt punctum F inter C et G, igitur, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HF, FG aequale eſt rectangulo HC, CG, hoc eſt dato, rectangulo ſcilicet AG, GC; et propterea eſt rectangulum HF, FG id ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem.



Primò, ſit punctum G in AB producta; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F in ſegmento medio EB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 59. Secundò, cadat punctum G in ipſum B; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF, FB ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FE, et data eſt recta HE, datum igitur eſt punctum F.



Tertiò, ſit punctum G inter C et B; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F in ſegmento medio EG quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H punctumque medium G quod eſt ad contrarias partes puncti F in data ra-

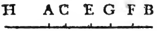


tione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua puncta E, B, quod fiet per Prop. 58.

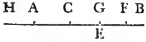
PROP. LXXXIX. PROB. II. EPITAGMA 3.

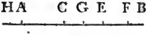
"DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quintum F invenire in altero ex ſegmentis extremis EB quod faciet rectangulum AF, FC a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum A quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media C, E punctumque medium C quod ipſi A eſt propius majus, aut minus rectangulo EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipſo EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F in CG producta, (rectangulum enim AG, GC, datum ſcilicet quod ab ipſo AF, FC auferendum eſt, minus eſt quam AF, FC,) erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF,FC aequale rectangulo HF, FG una cum ipſo AG, GC; ablato igitur dato, rectangulo ſcilicet AG, GC ab ipſo AF, FC, reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG eſt id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypotheſi, habet rationem. Primò, ſit punctum G in AE producta; datis igitur in



recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F in ſegmento extremo GB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media E, G, punctumque medium G ab ipſo H remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 61. Secundò, cadat punctum G in ipſum E; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF, FE ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FB, et data eſt recta HB, datum igitur eſt punctum F. Tertiò, ſit punctum G inter C et E; data igitur ſunt quatuor puncta H, G, E, B in recta linea ad inveniendum quintum F in ſegmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H quod eſt ad eaſdem ejus partes ad quas ſunt puncta media G, E punctumque medium G quod ipſi H eſt propius in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 62.

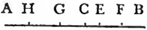




Pars 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipſo EF, FB dato, quam in ratione.

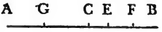
Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod ipſi C eſt propius, et H alterum. Quoniam igitur ae-

quales sunt AH, GC, et est punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HC, CG, hoc est simul cum dato, rectangulo scilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB. Datis igitur in recta linea



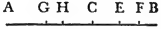
quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F in segmento extremo EB quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et punctum extremum H quod est ad easdem ejus partes ad quas sunt puncta media G, E punctumque medium G quod ipsi H est propius, in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 62.

Cas. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur sectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC, aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB. Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et ea puncta in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum extremum G, quod est ad easdem ejus partes ad quas est punctum medium E, quod fiet ope Prop. 53.

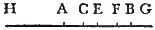


Cas. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio rectae AC; sit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, rectangulum igitur AF, FC una cum quadratis

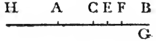
ex GC, GH, hoc eſt quadratum ex GF una cum quadrato ex GH habet, ex hypotheſi, datam rationem ad rectangulum EF, FB; et datum eſt quadratum ex GH, quadratum igitur ex FG minus eſt rectangulo EF, FB dato, quam in ratione, et propterea rectangulum EF, FB, per 14. Dat. majus eſt quadrato ex FG dato, quam in ratione. Datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F inter E et B quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta E, B, majus quadrato ex FG ſegmento inter ipſum et extremum G quod eſt ad eaſdem partes ipſius F ad quas eſt punctum medium E dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 80.



Pars 3. Denique ſit rectangulum AF, FC datum ſimul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, et ſit G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F inter C et G, minus enim eſt rectangulum AF, FC ipſo AG, GC a quo auferendum eſt, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc eſt dato, rectangulo ſcilicet AG, GC; rectangulum igitur HF, FG eſt id ad quod rectangulum EF, FB datam habet, ex hypotheſi, rationem. Primò, ſit G in AB producta; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F in ſegmento medio EB quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extre-



ma H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a fegmentis inter ipfum et duo puncta reliqua E, B, quod fiet ope Prop. 59. Secundò, cadat punctum G in ipfum B; quoniam igitur data eft ratio rectanguli HF, FG, five HF, FB ad ipfum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipfam FE, et data eft recta HE, datum igitur eft punctum F.



Tertiò, fit punctum G inter E et B; et quoniam eft punctum G inter F et B, data erunt in recta linea quatuor puncta H, E, G, B ad inveniendum quintum F in fegmento medio EG quod faciet rectangulum HF, FG a fegmentis inter ipfum et punctum extremum H et punctum medium G quod eft ad contrarias partes ipfius F ad quas eft H, in data ratione ad rectangulum EF, FB a fegmentis inter ipfum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 58.



LIB. IV. PROB. III.

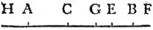
" DATIS in recta linea quatuor punctis invenire quintum " extra ipfa ad utrafvis partes quod faciet rectangulum a " fegmentis inter ipfum et duo quaevis ex punctis datis ma- " jus, aut minus rectangulo a fegmentis inter ipfum et duo " reliqua puncta dato, quam in ratione, vel quod faciet rect- " angulum illud datum fimul cum eo ad quod rectangulum " hoc datam habet rationem."

PROP. XC PROB. III. EPITAGMA I.

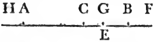
" DATIS in recta linea quatuor punctis A, C, E, B quin- " tum F invenire extra ipfa ad partes B quod faciet rectan-

" gulum AF, FC a ſegmentis inter ipſum et duo puncta A, C
" ab ipſo remotiſſima majus, aut minus rectangulo EF, FB a
" ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta dato, quam in
" ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum
" eo ad quod rectangulum hoc habet datam rationem."

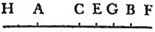
PARS 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipſo EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; et quoniam aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F in CG producta, erit rectangulum AF, FC aequale rectangulo HF, FG una cum ipſo AG, GC; ablato igitur dato, rectangulo ſcilicet AG, GC ab ipſo AF, FC, reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG eſt id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypotheſi, habet rationem. Primò, ſint puncta E, B inter G et F; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo puncta H, G ab eo remotiſſima in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 63.



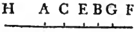
Secundò, ſit punctum B inter G et F, punctum vero E in G; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF, FE ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FB, et data eſt recta HB, datum igitur eſt punctum F. Et ſimiliter invenietur punctum F quando B eſt in G. Tertiò, ſit punctum B inter G et F,



punctum vero E inter C et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum extremum H ab ipſo remotiſſimum punctumque



medium B ipſi propius in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 64. Quartò, ſint puncta E, B inter C et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a



ſegmentis inter ipſum et duo puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 65.

Pars 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipſo EF, FB dato, quam in ratione.

Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt AH, GC, et eſt punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pap-



pi, rectangulum AF, FC una cum ipſo HC, CG, hoc eſt una cum dato, rectangulo ſcilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypotheſi, datam habet ratio-

nem ad rectangulum EF, FB. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum est quintum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta ab ipso remotissima H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 63.

Cas. 2. Quando datum aequale est quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC una cum dato quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypothesi, datam habet rationem ad rectangulum EF, FB; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G in data ratione, quod fiet ope Prop. 55.



Cas. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio rectae AC; sit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH, et rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC una cum eo ex GH, aequale erit quadrato ex GF una cum quadrato ex GH, quae propterea simul datam habent, ex hypothesi, rationem ad rectangulum EF, FB; igitur quadratum ex GF minus est rectangulo EF, FB dato, quam in ratione, et propterea rectangulum EF, FB majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione [14. Dat.] Datis igitur in recta linea tribus punc-



tis G, E, B inveniendum est quartum F in GB producta quod hoc efficiet, quod fiet ope Partis 1. Prop. 82.

Pars 3. Denique sit rectangulum AF, FC datum simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; et quoniam rectangulum AG, GC majus est ipso AF, FC erit punctum G in AF producta; et quia aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter C et G, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi,



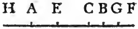
rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; rectangulum igitur HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F in segmento extremo BG quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 60.

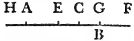
PROP. XCI. PROB. III. EPITAGMA 2.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, C, B quin-
" tum F invenire extra ipsa ad partes B quod faciet rectan-
" gulum AF, FC a segmentis inter ipsum et punctum A ab
" ipso remotissimum punctumque medium C quod ipsi F pro-

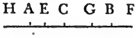
" pius eſt majus, aut minus rectangulo EF, FB a ſegmentis
" inter ipſum et puncta duo reliqua E, B dato, quam in ra-
" tione, vel quod faciet rectangulum illud datum ſimul cum
" eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipſo EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum dato aequale excedens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod eſt in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt HA, CG, et eſt punctum F in CG producta, eſt enim rectangulum AF, FC majus ipſo AG, GC quod ab eo auferendum eſt, erit rectangulum AF, FC aequale, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulo HF, FG una cum ipſo AG, GC; igitur ablato dato, rectangulo ſcilicet AG, GC ab ipſo AF, FC, erit reliquum, rectangulum ſcilicet HF, FG id ad quod rectangulum EF, FB datam, ex hypotheſi, habet rationem. Primò, ſit punctum G inter B et F; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et reliqua duo puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 65. Secundò, cadat punctum G in ipſum B; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF, FB ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FE, et data eſt recta HE, quare datum eſt punctum F. Tertiò, cadat punctum G inter C





et B; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum H ab ipſo remotiſſimum punctumque medium G ab H remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter F et reliqua duo puncta E, B, quod fiet ope Prop. 64.



Pars 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipſo EF, FB dato, quam in ratione.

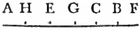
Cas. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; applicetur ad datam rectam AC rectangulum dato aequale deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; et quoniam aequales ſunt rectae AH, GC, et eſt punctum F in GC producta, erit rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HC, CG, hoc eſt ſimul cum dato, rectangulo ſcilicet AG, GC aequale, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad rectangulum EF,FB. Primò, ſit punctum E inter puncta G, C; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo puncta H, G ab ipſo remotiſſima in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 63. Secundò, ſit punctum E in ipſo G; quoniam igitur data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive



HF, FE ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FB, et data eſt recta HB, datum igitur eſt punctum F; et ſimiliter invenietur F ſi punctum E cadat in H. Tertiò, ſit punctum E inter H

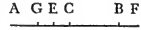


et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et punctum H ab ipſo remotiſſimum punctumque medium G ab H remotius in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 64. Quartò, ſit punctum E inter A et H; datis igitur in recta linea quatuor punctis E, H, G, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B ad rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta H, G in ratione data, quod fiet ope Prop. 65.

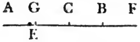




Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio rectae AC; bifariam igitur ſectâ AC in G, erit rectangulum AF, FC ſimul cum dato, quadrato ſcilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad rectangulum EF, FB. Primò, ſit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum



F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G, quod fiet ope Prop. 55. Secundò, sit punctum E in ipso G; quoniam igitur data est ratio rectanguli EF, FB ad quadratum ex GF, sive EF, data erit ratio rectae BF ad ipsam FE, et data est recta EB, quare datum est punctum F. Tertiò, sit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum



F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B ad quadratum ex FG segmento inter ipsum et punctum reliquum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 56.



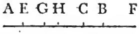
Cas. 3. Quando datum majus est quadrato ex GC dimidio ipsius AC; sit datum aequale quadrato ex GC una cum quadrato ex GH; igitur rectangulum AF, FC una cum dato, quadrato scilicet ex GC simul cum eo ex GH, hoc est quadratum ex GF una cum eo ex GH datam, ex hypothesi, habet rationem ad rectangulum EF, FB; et datum est quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus est rectangulo EF, FB dato, quam in ratione; et propterea, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB majus est quadrato ex GF dato, quam in ratione. Primò, sit punctum E inter G et C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B



quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta E, B ipsi propiora majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 82. Secundò, cadat punctum E in ipsum G; igitur rectangulum EF, FB majus est quadrato ex FG, sive FE dato, quam in ratione; et punctum F, quod hoc efficiet, invenietur per Cor. Partis 1. Prop. 83.



Tertiò, sit punctum E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema E, B majus quadrato ex FG segmento inter ipsum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Prop. 83.



Pars 3. Denique datum sit rectangulum AF, FC simul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F inter C et G, rectangulum enim AF, FC minus est dato rectangulo AG, GC, erit, per Prop. 23. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC simul cum ipso HF, FG aequale rectangulo HC, CG, hoc est dato, rectangulo scilicet AG, GC; quare rectangulum HF, FG est id ad quod rectangulum EF, FB datam habet ra-

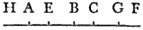


tionem, ex hypothesi. Datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum est quintum F in segmento extremo BG quod faciet rectangulum HF, FG a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 60.

PROP. XCII. PROB. III. EPITAGMA 3.

" DATIS in recta linea quatuor punctis A, E, B, C quintum F invenire extra ipsa ad partes C quod faciet rectangulum AF, FC a segmentis inter ipsum et duo puncta extrema A, C majus, aut minus rectangulo EF, FB a segmentis inter ipsum et reliqua duo puncta E, B dato, quam in ratione, vel quod faciet rectangulum illud datum simul cum eo ad quod rectangulum hoc datam habet rationem."

Pars 1. Sit rectangulum AF, FC majus ipso EF, FB dato, quam in ratione; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato excedens quadrato, sitque G punctum applicationis quod est in AC producta, et H alterum; quoniam igitur aequales sunt HA, CG, et est punctum F in CG producta, rectangulum enim AF, FC majus est ipso AG, GC quod ab eo auferendum est, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC aequale



rectangulo HF, FG una cum ipso AG, GC; ablato igitur dato, rectangulo scilicet AG, GC ab ipso AF, FC, reliquum, rectangulum scilicet HF, FG ad rectangulum EF, FB datam, ex hypothesi, habet rationem. Datis igitur in recta linea qua-

tuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo puncta extrema H, G in data ratione ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B, quod fiet ope Prop. 65.

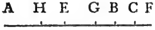
PARS 2. Sit rectangulum AF, FC minus ipſo EF, FB dato, quam in ratione.

CAS. 1. Quando datum minus eſt quadrato ex dimidio rectae AC; ad datam rectam AC applicetur rectangulum aequale dato deficiens quadrato, ſitque G punctum applicationis quod propius eſt ipſi C, et H alterum; quoniam igitur aequales ſunt AH, GC, et eſt punctum F in GC producta, erit, per Prop. 24. Lib. 7. Pappi, rectangulum AF, FC ſimul cum ipſo HC, CG, hoc eſt ſimul cum dato, rectangulo ſcilicet AG, GC aequale rectangulo HF, FG, quod propterea, ex hypotheſi, datam habebit rationem ad rectangulum EF, FB. Primò, ſint puncta E, B inter ipſa G, C; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, G, E, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter ipſum et duo puncta H, G ab ipſo remotiſſima ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 63. in qua, ad finem ejus, oſtenditur puncta propiora ipſi B majores facere rationes rectanguli HF, FG ad ipſum EF, FB quam puncta remotiora; igitur, quoniam punctum F debet eſſe in AC producta, ratio data rectanguli HF, FG ad ipſum EF, FB minor debet eſſe ratione rectanguli HC, CG ad ipſum EC, CB. Secundò, ſit punctum



B inter G et C, punctum vero E cadat in ipſum G; et quoniam data eſt ratio rectanguli HF, FG, ſive HF, FE ad ipſum EF, FB, data erit ratio rectae HF ad ipſam FB, et data eſt recta HB, datum igitur eſt punctum F. Similiter invenietur punctum F ſi B cadat in G, vel E aut B cadat in H. Tertiò, ſit punctum B inter G et C, punctum vero E inter H et G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, G, B inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter F et punctum H ab ipſo remotiſſimum punctumque medium G ipſi propius ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter idem punctum F et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 64. Quartò, ſint puncta E, B inter ipſa H, G; datis igitur in recta linea quatuor punctis H, E, B, G inveniendum eſt quintum F extra ipſa ad partes G quod faciet rectangulum HF, FG a ſegmentis inter F et duo puncta extrema H, G ad rectangulum EF, FB a ſegmentis inter idem punctum F et duo reliqua puncta E, B in ratione data, quod fiet ope Prop. 65. Quintò, ſi punctum B ſit inter G et C, punctum vero E inter A et H, ſolutio erit ut in articulo quarto praecedente. Sextò, ſi punctum B ſit inter H, G puncta, punctum autem E inter ipſa A, H, ſolutio erit ut in articulo tertio praecedente. Et ſeptimò, ſi puncta E, B fuerint inter A, H puncta, ſolutio erit ut in articulo primo praecedente.





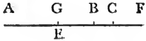


Cas. 2. Quando datum aequale eſt quadrato ex dimidio

rectae AC; bifariam igitur secta AC in G, erit rectangulum AF, FC simul cum dato, quadrato scilicet ex GC aequale quadrato ex GF, quod propterea datam, ex hypothesi, habebit rationem ad rectangulum EF, FB.



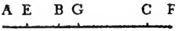
Primò, sint puncta E, B inter ipsa G, C; datis igitur in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum est quartum F extra data puncta ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et duo puncta E, B ipsi propiora in data ratione ad quadratum ex GF segmento inter ipsum et reliquum punctum G, quod fiet ope Prop. 55.



Secundò, sit punctum B inter G, C, punctum autem E in ipso G; et quoniam rectangulum EF, FB, hoc est GF, FB datam habet rationem ad quadratum ex GF, recta FB datam habebit rationem ad ipsam GF, et data est recta GB, datum igitur est punctum F. Similiter invenietur punctum F si punctum B cadat in G. Tertiò, sit punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum est quartum F extra ipsa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a segmentis inter ipsum et puncta extrema E, B in data ratione ad quadratum ex FG, segmento inter ipsum et punctum reliquum G, quod fiet ope Prop. 56.

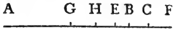


Quartò, sint puncta E, B inter ipsa A, G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, B,



G inveniendum eſt quartum F extra data puncta ad partes G quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo puncta E, B ab ipſo remotiora ad quadratum ex GF ſegmento inter ipſum et punctum reliquum G in ratione data, quod fiet ope Prop. 54.

Cas. 3. Quando datum majus eſt quadrato ex AG dimidio rectae AC; ſit datum aequale quadrato ex AG una cum quadrato ex GH, igitur rectangulum AF, FC una cum dato, quadrato ſcilicet ex AG ſimul cum eo ex GH, hoc eſt quadratum ex GF una cum quadrato ex GH datam, ex hypotheſi, habet rationem ad rectangulum



EF, FB; et datum eſt quadratum ex GH, igitur quadratum ex GF minus eſt rectangulo EF, FB dato, quam in ratione, et propterea, per Prop. 14. Dat. rectangulum EF, FB majus eſt quadrato ex GF dato, quam in ratione. Primò, ſint puncta E, B inter ipſa G, C; igitur datis in recta linea tribus punctis G, E, B inveniendum eſt quartum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo puncta E, B ipſi propiora majus quadrato ex GF ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope Partis 1. Prop. 82. Secundò, ſit punctum B inter G, C puncta, E autem ſit in ipſo G; datis igitur in recta



linea duobus punctis G, B inveniendum eſt tertium F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum GF, FB, hoc eſt EF, FB majus quadrato ex GF ſegmento inter ipſum et punctum remotius G dato, quam in ratione, quod fiet ope Cor. Part. 1.

Prop. 83. Et ſimiliter invenietur punctum F ſi B cadat in G, ſcilicet per Cor. Part. 1. Prop. 81. Tertiò, ſit



punctum B inter G et C, punctum vero E inter A et G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, G, B inveniendum eſt quartum F extra ipſa ad partes B quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et puncta extrema E, B majus quadrato ex



FG ſegmento inter ipſum et punctum reliquum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 83. Quartò, ſint puncta E, B inter ipſa A, G; datis igitur in recta linea tribus punctis E, B, G inveniendum eſt quartum F extra ipſa ad partes G quod faciet rectangulum EF, FB a ſegmentis inter ipſum et duo puncta



E, B ab ipſo remotiora majus quadrato ex GF ſegmento inter ipſum et reliquum punctum G dato, quam in ratione, quod fiet ope partis 1. Prop. 81.

Pars 3. Denique ſit rectangulum AF, FC datum ſimul cum eo ad quod rectangulum EF, FB datam habet rationem. Legatur demonſtratio partis 3. Prop. 91. quae huic parti etiam convenit.



FINIS.

315

ROBERTI SIMSON, M.D.

D E

PORISMATIBUS

TRACTATUS;

Q U O

DOCTRINAM PORISMATUM SATIS EXPLICATAM,

ET IN POSTERUM AB OBLIVIONE TUTAM

FORE SPERAT AUCTOR.

R r 2

PRAEFATIO.

De Porismatibus nihil, praeter ea quae Pappus servavit, apud Geometras veteres invenitur. Et Fermatius in var. Oper. Math. pag. 116. asserit, Recentiores ea ne vel nomine cognovisse, aut quid essent solummodo suspicatos fuisse. Invenio tamen ante Fermatium de iis explicandis et restituendis cogitasse Albertum Girardum, qui, in Trigonometria sua, Gallice scripta, et Hagae Comitum anno 1629 edita, post enumeratas formas figurarum rectilinearum quae quatuor, quinque, aut sex latera habent, haec addit, " Le tout, quand il n'y a que deux lignes qui passent par un point, comme jadis estoyent les Porismes d'Euclid, qui sont perdus, lesquelles j'espere de mettre bien tost en lumiere, les ayant restituez il y a quelques années en ça." Et rursus, in Operibus Mathematicis Simonis Stevini, quae emendata et aucta edidit Girardus Lugd. Batav. anno 1634, postquam in pag. 459. dixerat Euclidem raro admodum usum fuisse ratione composita, subjungit, " Mais il est a estimer qu'il en a plus escrit en ses trois livres de Porismes qui sont perdus, lesquelles, Dieu aidant, j'espere de mettre en lumiere, les ayant inventez de nouveau." Ex quibus patet Girardum, virum certe matheseos haud vulgariter peritum, putasse se Porismata restituisse; nunquam tamen quae de iis scripserat edita fuerunt, et, ni forte in bibliotheca aliqua in Hollandia delitescant, pro deperditis sunt habenda. Ex prima autem citatione videtur eum propositiones quasdam de figuris quadrilateris, aliisque, earumque affectionibus pro Porismatibus habuisse, et propterea eorum naturam non cognovisse.

Poſt Girardum Iſmael Bullialdus, in Exercitatione ſua Geometrica tertia, quae, una cum duabus prioribus, edita fuit Pariſiis anno 1667, conatus eſt Poriſmata explicare; verum quamvis quaedam de iis a Fermatio acceperat, citat enim verba Fermatii, quae poſtea in renovata Poriſmatum doctrina inter opera ejus varia mathematica Toloſae anno 1679 impreſſa fuerunt; ea tamen Bullialdus enodare minime potuit. In hoc autem Fermatii libro, qui poſt mortem ejus editus fuit, habentur paucula, ſed, ut videtur, omnia quae de Poriſmatum doctrina ſcriptis tradiderat. Ex quibus apparet ſoli viro huic ſagaciſſimo aliquid de eorum natura a tempore quo vixit Pappus innotuiſſe. Cum autem fateatur ſe in abdita hujus materiae penetraſſe nullo fere alio auxilio quam eo quod ſubminiſtrarunt verba vitioſae definitionis quam Poriſmatis dediſſe juniores Geometras merito culpat Pappus, Poriſma ſcilicet eſſe quod hypotheſi deficit a theoremate locali; certum eſt eum quid ſint Poriſmata non ſatis intellexiſſe. Etenim minime recte affirmat Fermatius definitionem hanc, Poriſmatis naturam ſpecifice revelare, cum innumera ſint Poriſmata quae ex theoremate locali nullo modo pendent, nihilque cum locis habent commune. Promittit quidem Fermatius, in eodem ſcripto, ſe totos tres Poriſmatum libros aliquando reſtituturum, et alia mirabilia et ignota (ſunt ipſius verba) detecturum; verum nimis temere haec dicta ſunt, multa enim ſunt Euclidis Poriſmata quorum nec vola nec veſtigium exſtat; at Fermatius ne vel primum primi libri enucleavit, quod unicum integrum ſervavit Pappus.

Non opus eſt referre quae de hac re habet Carolus Renaldinus in libro ſuo de Reſolutione et Compoſitione Mathema-

tica, nullo enim modo cognitioni Porismatum inserviunt. Atque hi soli sunt auctores, quantum novi, qui Porismatum mentionem fecerunt, saltem qui ea aliquo modo explicare conati sunt. Et quamvis vir clariss. David Gregorius in praefatione sua Euclidis Operibus praefixa ratus fuerit " non difficile futurum Porismata quodammodo restituere, ubi textus " Graecus Pappi lucem aspexerit," tamen collega ejus doctissimus Halleius, Gregorio in veterum Geometria non parum exercitatior, post editum a se textum Graecum quantum potuit emendatum, ingenuè Pappi Porismatum descriptioni sequentia subjungit, " Hactenus Porismatum descriptio nec " mihi nec lectori profutura, neque aliter fieri potuit: tam " ob defectum schematis cujus fit mentio; unde rectae satis " multae, de quibus hic agitur, absque notis alphabeticis, " ullove alio distinctionis charactere inter se confunduntur: " quam ob omissa quaedam et transposita, vel aliter vitiata, " in propositionis generalis expositione; unde quid sibi velit " Pappus haud mihi datum est conjicere. Hisce adde dictio- " nis modum nimis contractum, ac in re difficili, qualis haec " est, minime usurpandum."

Postquam vero apud Pappum legeram Porismata Euclidis collectionem fuisse artificiosissimam multarum rerum, quae spectant ad analysin difficiliorum et generalium problematum, magno desiderio tenebar, aliquid de iis cognoscendi; quare saepius et multis variisque viis tum Pappi propositionem generalem, mancam et imperfectam, tum primum lib. i. Porisma, quod, ut dictum fuit, solum ex omnibus in tribus libris integrum adhuc manet, intelligere et restituere conabar; frustra tamen, nihil enim proficiebam. Cumque cogi-

tationes de hac re multum mihi temporis confumpferint, atque tandem moleftae admodum evaferint, firmiter animum induxi haec nunquam in pofterum inveftigare; praefertim cum optimus Geometra Halleius fpem omnem de iis intelligendis abjeciffet. Unde quoties menti occurrebant, toties eas arcebam. Poftea tamen accidit, ut improvidum et propofiti immemorem invaferint, meque detinuerint donec tandem lux quaedam effulferit quae fpem mihi faciebat inveniendi faltem Pappi propofitionem generalem, quam quidem multa inveftigatione tandem reftitui. Haec autem paulo poft una cum Porifmate primo lib. i. impreffa eft inter Tranfactiones Philofophicas anni 1723. No. 177.

Quoniam autem eo tempore Porifmatum naturam non fatis perfpectam habebam, lubet nunc eam explicatius tradere, ut hoc genus propofitionum, et via qua inveftigantur, quae Geometras a tempore quo vixit Pappus hucufque latuerunt, Geometriae rurfus reddantur, atque ei haud inutile incrementum afferant. Et quoniam Pappi defcriptio Porifmatum, non facile fine fpecimine eorum intelligenda eft, ideo Porifmata quaedam facilia praemittere vifum eft explicationi eorum quae Pappus affert; dein Pappi defcriptioni fubjungere quaedam Euclidis Porifmata, ea fcilicet quae ipfius effe, vel ex Pappi propofitione generali, ejusve Porifmatum defcriptione, vel denique ope lemmatum ejus in Porifmata, dijudicare valebam. Haec fequuntur quatuor Fermatii propofitiones in formam Porifmatum mutatas, reliqua enim ex ejus quinque eft de Parabola, et eam in Prop. 19. lib. v. Sect. Conic. ed. 2. demonftravimus. Alia quaedam adjecta funt quorum praecipua mihi propofuit, et aliquorum conftructionem dedit exi-

mius Geometra Matthaeus Stewart in Academia Edinburgensi Matheseos Professor, a quo materia haec jam egregie est exculta, postea, ut spero, multum excolenda.

His igitur doctrinam Porismatum satis explicatam, et in posterum ab oblivione tutam fore sperare liceat.

DE

PORISMATIBUS.

DEFINITIONES.

I. THEOREMA eſt Propoſitio in qua aliquid proponitur demonſtrandum.

II. Problema eſt Propoſitio in qua aliquid proponitur conſtruendum, vel inveniendum.

III. Datum, ſive Propoſitio de datis, eſt Theorema in quo proponitur demonſtrare aliquid datum eſſe (ſecundum Definitiones Datorum Euclidis) quod propoſitam quandam relationem habet ad ea quae ex hypotheſi data ſunt.

Datum etiam in forma Problematis enuntiari poteſt, ſi nimirum ea quae data eſſe demonſtranda ſunt, invenienda proponantur. Quod ſi fiat, demonſtratio Dati, ut Theorema propoſiti, Analyſis erit Problematis; Compoſitio autem Analyſi reſpondens erit Conſtructio et Demonſtratio Problematis.

Quoniam Pappi definitio Poriſmatis nimis generalis eſt, vice ejus ſit haec, viz.

IV. Poriſma eſt Propoſitio in qua proponitur demonſtrare rem aliquam, vel plures datas eſſe, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, ſed quae ad ea quae data ſunt eandem habent relationem, convenire oſtendendum eſt affectionem quandam communem in Propoſitione deſcriptam.

Porisma etiam in forma Problematis enuntiari potest, si nimirum ea quae data demonstranda sunt, invenienda proponantur.

V. Locus est Propositio in qua propositum est datam esse demonstrare, vel invenire lineam aut superficiem cujus quodlibet punctum, vel superficiem in qua quaelibet linea data lege descripta, communem quandam habet proprietatem in Propositione descriptam.

Unde patet, quod Pappus affirmat, Locos speciem esse Porismatis; et communis affectio quae de punctis aut lineis hisce demonstranda proponitur, est ea omnia sita esse in una quadam linea aut superficie, quae quidem invenienda est.

Aliae autem propositiones in quibus proponitur aliquid demonstrare, aut invenire, praeter eas quae Data aut Porismata sunt, simpliciter Theoremata aut Problemata vocantur.

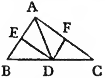
PROP. I.

"DATA positione recta AB, et circulo CD positione et
"magnitudine dato, datum erit punctum per quod si duca-
"tur utcunque recta linea quae rectae AB circuloque occur-
"rat, datum erit rectangulum contentum segmentis ductae
"inter punctum inveniendum, et puncta occursus."

LEMMA.

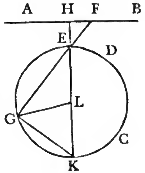
Sit triangulum ABC rectum habens angulum ad A, si bifariam secetur BC in D, et jungatur AD; erit BD aequalis ipsi DA. Est conversa partis primae 31. Prop. 3. Euclidis.

Ducatur enim DE parallela ipsi AC, et DF ipsi AB. Aequalis igitur est angulus DBE angulo CDF, ut et angulus BDE ipsi DCF, et aequalia sunt latera BD, DC quae aequalibus adjacent angulis; aequalis igitur est recta BE rectae DF, hoc est ipsi EA. Et in triangulis BED, DEA communis est DE, et anguli ad E recti, rectus enim est angulus ad A. Basis igitur BD aequalis est basi DA. Hoc etiam sequitur ex Cor. Pr. 5. Lib. 4. Eucl.



Sit jam E punctum in Porismate inveniendum, et ducta utcunque per E recta EF occurrat rectae AB in F, et circulo in G; igitur, ex hypothesi, datum est rectangulum FE, EG. Ad AB ducatur perpendicularis EH, occurratque circumferentiae in K, et KG jungatur; igitur, rursus ex hypothesi, datum est rectangulum HE, EK, quod propterea aequale est

rectangulo FE, EG. Ut igitur FE ad EH, ita est EK ad EG,
[a] 6. 6. et sunt circa aequales angulos, quare [a] angulus KGE aequalis est angulo recto EHF. Bifariam secetur EK in L, et jungatur LG; est
[b] Lem. igitur [b] LG aequalis ipsi LK. Similiter et omnes rectae a puncto L ad circumferentiam ductae eidem LK aequales ostendentur. Punctum igitur L centrum est circuli CD; et est LE ipsi LK aequalis, quare punctum E est in circumferentia circuli dati.
[c] 6. Def. Dat. Datum autem est [c] punctum L, data igitur positione est recta LH, et data erunt E, H, K puncta; quare rectangulum HF, EK, et ipsi aequale FE, EG datum est.



Componetur ita.

A centro L circuli dati ducatur LH perpendicularis ad AB, occurratque circumferentiae in punctis E, K; horum utrumlibet E Porismati satisfaciet. Ducatur enim utcunque per E recta FEG, et jungatur GK; quoniam igitur angulus EGK in semicirculo aequalis est angulo recto EHF, aequiangula sunt triangula EGK, EHF; ut igitur GE ad EK, ita EH ad EF, et propterea rectangulum GE, EF aequale est rectangulo dato KE, EH.

In hoc Porismate punctum E datum ostendendum est, et res innumerae quae ad punctum E, datamque rectam AB, et datum circulum CD eandem habent relationem, sunt segmenta rectarum inter punctum E et rectam AB, et circulum CD. Communis autem affectio quam iisdem segmentis convenire

demonſtranda proponitur, haec eſt, rectangulum ipſis contentum datum eſſe; quod rectangulum etiam inveniendum fuit.

Converſa hujus Poriſmatis eſt hic Locus, viz. Si a dato puncto E ducantur duae rectae lineae EF, EG in eadem recta, datum continentes ſpatium; tangat autem terminus F unius rectam lineam AB poſitione datam, tanget terminus G alterius circumferentiam poſitione datam. Qui Locus eſt Prop. 8. Lib. 1. Locorum Planorum Apollonii, qui Glaſguae editi ſunt anno 1749. Theorema autem ex hoc Loco manifeſte derivatum, quod propterea Theorema Locale dixerunt veteres, hoc eſt, ſi a centro circuli L ad rectam AB ducatur perpendicularis LH circumferentiae occurrens in E, K, et per punctum E utcunque ducatur recta FEG quae occurrat rectae AB in F et circumferentiae rurſus in G, rectangulum FE, EG aequale erit rectangulo HE, EK. Si vero hypotheſis hujus Theorematis deficeret, ſive diminuta eſſet una conditione, hoc eſt, ſi in ea non indicatum eſſet punctum E per quod rectae ducendae ſunt, ſed hoc modo propoſitum eſſet, viz. Datâ poſitione rectâ AB, datoque poſitione et magnitudine circulo CD, datum erit punctum per quod ſi utcunque ducatur recta quae ipſi AB, et circumferentiae occurrat, datum erit rectangulum a ſegmentis ductae inter punctum inveniendum et puncta occurſus contentum; patet propoſitionem jam in Poriſma praecedens mutatam eſſe. Hoc igitur exemplo clare explicatur definitio juniorum quâ Poriſma dixerunt eſſe id quod hypotheſi deficit a Theoremate Locali. Quam quidem definitionem merito culpat Pappus, utpote ex accidente tantum factam, ut in ſequentibus oſtendetur.

Ex hoc etiam exemplo patet Locos etiam deficere hypothesi a Theoremate Locali. Si enim hypothesis praecedentis Theorematis Localis ita diminuatur ut nihil de circulo in ea diceretur, sed hoc tantum, viz. Si per datum punctum E utcunque ducatur recta linea FEG cujus alter terminus F tangat rectam positione datam, fueritque rectangulum FE, EG dato spatio aequale, et proponatur invenire lineam quam reliquus terminus G tanget, patet Theorema jam in Locum converti. Unde Pappus hujus generis Porismatum, cui scilicet definitio juniorum convenit, Locos ipsos speciem esse affirmat.

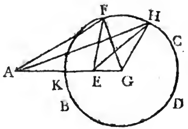
PROP. II.

" DATO puncto, datoque positione et magnitudine circulo; " si a quovis in circumferentia puncto ducatur recta ad " punctum datum, datum erit aliud punctum ad quod si ab " eodem in circumferentia puncto ducatur recta linea, ad " hanc primò ducta datam habebit rationem."

Sit datum punctum A, et circulus datus sit BCD; et puta Porisma verum esse, et punctum E sit illud quod inveniendum est. Si igitur a puncto quovis F in circumferentia ducantur FA, FE, data erit, ex hypothesi, ratio quam habet AF ad FE. Jungatur AE, et ad ipsam productam ducatur FG quae faciat angulum EFG aequalem ipsi EAF; quoniam igitur aequiangula sunt GAF, GFE triangula, ut AF ad FE, ita erit AG ad GF, et GF ad GE; proportionales igitur sunt AG, GF, GE, quare [a] ut quadratum ex AG ad quadratum ex GF, ita est recta AG ad ipsam GE; unde et quadratum ex AF est

[a] 2. cor. 20. 6.

ad quadratum ex FE, ut AG ad GE. Rurſus ſumatur aliud quodvis punctum H in circumferentia, et jungantur HA, HE, HG. Quoniam igitur, ex hypotheſi, ratio AH ad HE, eadem eſt rationi AF ad FE, erit quadratum ex AH ad quadratum ex HE, ut recta AG ad ipſam GE; ergo, per Lemma ad Prop. 2. Lib. 2. Apollonii de Locis planis in editione quae Glaſguae impreſſa eſt, quod eſt Prop. 119. Lib. 7. Pappi, rectangulum AG, GE aequale eſt quadrato ex GH. Et quoniam proportionales ſunt AG, GF, GE, idem rectangulum AG, GE aequale eſt quadrato ex GF; quare recta GH aequalis eſt ipſi GF. Et ſimiliter quaevis recta a puncto G ad circumferentiam ducta eidem GF aequalis oſtendetur. Ergo punctum G centrum eſt circuli dati, et propterea datum erit; datumque eſt punctum A, quare recta AG data eſt, datamque habebit [c] rationem ad datam magnitudine GF. Huic autem rationi eaedem oſtenſae ſunt rationes AF ad FE, et GF ad GE, quae propterea datae erunt. Et quoniam data eſt GF, et ratio ejus ad GE, data [d] erit GE magnitudine, ſed et poſitione data eſt, datumque eſt punctum G, datum igitur eſt punctum E, Quae fuerunt oſtendenda.



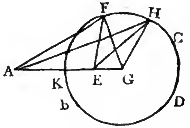
[c] 1. Dat.

[d] 2. Dat.

Componetur ita.

Sit A punctum datum, et G centrum dati circuli, et juncta AG circumferentiae occurrat in K; ipſis vero AG, GK tertia inveniatur proportionalis GE. Erit punctum E illud quod in-

veniendum fuit, et ratio AG ad GK ea quae data fuit oſtendenda. A punctis enim A, E utcunque ad circumferentiam inflectantur AF, EF, erit ratio AF ad FE, eadem rationi AG ad GK. Jungatur FG, et quoniam AG, GK, ſive GF, et GE ſunt proporti-



[b] 6. 6. onales, aequiangula erunt [b] GAF, GFE triangula; ut igitur AF ad FE, ita eſt AG ad GF, hoc eſt ad GK.

In hoc Poriſmate punctum E datum oſtendendum, ſive inveniendum fuit, innumerae autem rectae quae a punctis A, E ad circumferentiam inflecti poſſunt, eandem habent relationem ad puncta A, E et circumferentiam. Communis autem affectio, quam hiſce rectis convenire demonſtranda fuit, eſt haec, viz. rectas eas datam inter ſe habere rationem, quae ratio etiam invenienda fuit.

Converſa hujus Poriſmatis eſt Locus qui habetur in Prop. 2. Lib. 2. Locorum Planorum Apollonii, ex quo ſequens Theorema Locale fluit, viz. Si a puncto A ad centrum G circuli BCD ducatur recta AG, et ipſi AG et ſemidiametro GK ſumatur tertia proportionalis GE quae in recta GA ponatur verſus partes A, ab ipſis autem A, E punctis inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae AF, EF, habebunt eae rationem eandem rationi AG ad GK. Si vero ex hypotheſi hujus Theorematis auferatur ea pars quae docet qua via inveniendum eſt punctum E, et quae ſit ratio ductarum, mutabitur, ut patet, Theorema in praecedens Poriſma.

PROP. III.

" DATIS in recta linea duobus punctis A, B, et data ratione; " si in eadem recta sumantur alia duo puncta C, D quae fa-" ciunt rationem AC ad BD eandem rationi datae; datum " erit aliud punctum quod faciet rationem segmentorum in-" ter ipsum et puncta C, D datam."

Puta Porisma verum esse, et punctum E illud esse quod faciet rationem EC ad ED datam. Igitur quoniam A, B puncta data sunt, si etiam datum sit E, magnitudine datae erunt rectae EA, EB, quare et ipsarum ratio data erit. Quoniam igitur, in fig. 1. data est ratio totius AE ad totum EB, et partis AC ad partem BD, et reliquae CE ad reliquam ED; at, in fig. 2. data est ratio totius EC ad totum ED, et partis AC ad partem BD, et reliquae AE ad reliquam EB; datae erunt [a] rationes omnium ad omnes, si scilicet rationes datae non eaedem fuerint. Igitur si eaedem non fuerint, data erit ratio AE ad utramque ipsarum CE, ED; et quoniam AE data ponitur, datae erunt CE, ED; et quoniam punctum E datum ponitur, data essent puncta C, D. Non autem data sunt; C enim et D quaelibet sunt puncta quae faciunt rationem AC ad BD eandem rationi datae. Igitur rationes CE ad ED, AC ad BD, et AE ad EB sunt eaedem. Et quoniam data est ratio AC ad BD, ratio AE ad EB, quae ipsi eadem est, data erit. Et data est AB, quare et AE, datumque erit punctum E.

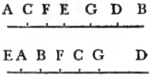




[a] 12. Dat.

Componetur ita.

Sumatur punctum E inter puncta A, B, si puncta C, D debent esse ad contrarias partes punctorum A, B, quod faciet rationem AE ad EB eandem rationi datae; si vero puncta C, D debent esse ad easdem partes ipsorum A, B sumatur punctum E in AB producta ad partes contrarias iis ad quas sunt C, D, quod faciet rationem AE ad EB eandem rationi datae. Erit in utroque casu CE ad ED, ut AE ad EB. Quoniam enim est, ex constructione, AE



[b] 19 aut 12.5. ad EB, in ratione data quam habet AC ad BD, erit [b] CE ad ED, ut AE ad EB.

IDEM ALITER.

Sit E punctum inveniendum quod facit rationem EC ad ED datam. Sumantur autem alia duo puncta F, G quae faciunt rationem AF ad BG eandem rationi AC ad BD; igitur, ex hypothesi, ratio EF ad EG, eadem erit rationi EC ad ED. Quoniam igitur est AF ad BG, ut AC ad BD, erit [b] et CF ad DG, ut AC ad BD; et quoniam est EF ad EG, ut EC ad ED, erit [b] et CF ad DG, ut EC ad ED, quare est EC ad ED, ut AC ad BD; et propterea [b], ut AC ad BD, ita est AE ad EB. Data autem est ratio AC ad BD, ergo data est ratio AE ad EB; et data est AB, quare punctum E datum est. Et ostensum fuit esse EC ad ED, ut AC ad BD; data igitur est ratio EC ad ED. Compositio eadem est ut in praecedente.

PROP. IV.

" SI recta AB pofitione et magnitudine data fuerit, et in ipfa
" producta fumatur utcunque punctum C, rectangulum AC,
" CB una cum fpatio quodam dato, aequale erit quadrato ex
" fegmento inter punctum C et punctum quoddam datum."

Sit Porifma verum, et dicatur fpatium quod datum oftendendum, five inveniendum eft, S; fitque D punctum inveniendum. Igitur, ex hypothefi, rectangulum AC, CB una cum fpatio S aequale eft quadrato ex DC. Rurfus fumatur utcunque in AB producta aliud punctum E, et, ex hypothefi, rectangulum AE, EB una cum fpatio S aequale erit quadrato ex DE. Exceffus igitur rectanguli AC, CB fupra ipfum AE, EB aequalis erit



exceffui quadrati ex DC fupra quadratum ex DE. Si autem fiat AF aequalis ipfi BE, exceffus rectanguli AC, CB fupra ipfum AE, EB aequalis [a] eft rectangulo FC, CE. Exceffus vero quadrati ex DC fupra quadratum ex DE eft [b] duplum rectangulum DE, EC una cum quadrato ex EC, quae propterea fimul aequalia funt rectangulo FC, CE. Commune auferatur quadratum ex EC, et rectangulum DE, EC bis aequale erit rectangulo FE, EC. Igitur DE bis aequalis eft ipfi FE; quare

[a] Vid. infra.
[b] 4. 2.

[a] Eft Prop. 24. Lib. 7. Pappi. Bifariam fecetur AB in D, et quoniam rectangulum AC, CB una cum quadrato ex DB, aequale eft quadrato ex DC, hoc eft, rectangulo FC, CE una cum quadrato ex DE, hoc eft, una cum rectangulo AE, EB et quadrato ex DB. Commune auferatur quadratum ex DB; reliquum igitur rectangulum AC, CB aequale erit rectangulo FC, CE, et rectangulo AE, EB.

FD aequalis eſt ipſi DE, quarum aequales ſunt FA, BE; reliqua igitur AD reliquae BD eſt aequalis. Data autem eſt AB, quare data eſt AD, punctumque D erit datum. Rectangulum autem AC, CB una cum ſpatio S aequale eſt quadrato ex DC,
c 6. 2. hoc eſt [c] rectangulo AC, CB una cum quadrato ex DB; igitur ſpatium S aequale eſt quadrato ex DB. Datumque propterea eſt ſpatium S.

Componetur ita.

Bifariam ſecetur AB in D; erit D punctum, et quadratum ex DB ſpatium inveniendum. Sumatur enim utcunque punctum C in AB producta, erit rectangulum AC, CB una cum quadrato ex DB aequale quadrato ex DC, ut conſtat ex 6. 2. vel ita ex analyſi praecedente oſtendi poteſt.

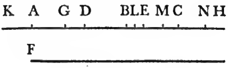


Quoniam rectangulum
d 3. 2. AC, CB aequale eſt [d] rectangulo AB, BC una cum quadrato ex BC, commune apponatur quadratum ex DB, et rectangulum AC, CB una cum quadrato ex DB aequale erit rectangulo AB, BC, hoc eſt duplo rectangulo DB, BC, una cum quadra-
b 4. 2. tis ex BC, BD, hoc eſt [b] quadrato ex DC.

PROP. V.

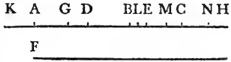
" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C, ſi inter A, B " ſumatur utcunque punctum D, datum erit in recta AC " punctum quod faciet rectangulum contentum ſegmento in- " ter ipſum et punctum D, et datâ quâdam rectâ aequale " rectangulo AD, DB una cum quadrato ex ſegmento inter " D et tertium punctum C."

Puta verum esse Porisma, sitque punctum inveniendum E, et recta invenienda F. Quoniam igitur, ex hypothesi, rectangulum F, DE aequale est rectangulo AD, DB una cum quadrato ex DC, hoc est [a] rectangulo AD, DB, quadratis ex DB, [a] 4. 2.
BC et duplo rectangulo DB, BC; erit [b] rectangulum F, DE [b] 3. 2.
aequale rectangulo AB, BD, duplo rectangulo DB, BC, et quadrato ex BC. Rursus sumatur aliud punctum G inter A et B; et similiter ostendetur rectangulum F, GE aequale rectangulo AB, BG, duplo rectangulo GB, BC, et quadrato ex BC. Excessus igitur rectangulorum F, GE, F, DE, hoc est rectangulum F, GD, aequalis erit excessui rectangulorum AB, BG, AB, BD una cum duplo excessus ipsorum GB, BC, DB, BC, hoc est rectangulo AB, GD una cum ipso BC, GD bis. Recta igitur F aequalis est ipsi AB una cum BC bis, hoc est ipsis AC, CB simul; facta igitur CH aequali ipsi CB, recta F aequalis erit ipsi AH, quare data est recta F. Est igitur rectangulum AH, DE aequale (ipsi F, DE, hoc est, ut ostensum fuit, rectangulo AB, BD, duplo rectangulo DB, BC, et quadrato ex BC; hoc est rectangulo AB, BD, ipsique DB, BH et quadrato ex BC; hoc est) ipsi AH, DB et quadrato ex BC. Auferatur commune rectangulum AH, BD, et reliquum rectangulum AH, BE aequale erit quadrato ex BC. Et datae sunt BC, AH, quare data est BE, datumque erit punctum E. Et data est recta F, ut ostensum fuit. Quae fuerunt ostendenda.



Componetur ita.

Producatur BC ad H ut aequales ſint BC, CH, et ipſis AH, BC tertia proportionalis inveniatur BE quae ponatur in AB producta. Erit AH recta invenienda, quae dicta fuit F, et E erit punctum inveniendum. Sumatur enim inter A et B utcunque punctum D. Et quoniam rectangulum AH, BE aequale eſt, ex conſtructione, quadrato ex BC; eſt autem rectangulum AH, DB aequale (rectangulo AB, BD una cum ipſo HB, BD, hoc eſt, quia BH dupla eſt ipſius BC,) rectangulo AB, BD una cum ipſo DB, BC bis; erit totum, rectangulum ſcilicet AH, DE aequale (toti, rectangulo ſcilicet AB, BD, duplo rectangulo DB, BC, et quadrato ex BC, hoc eſt rectangulo AD, DB, quadratis ex DB, BC, et duplo rectangulo DB, BC, hoc eſt) rectangulo AD, DB et quadrato ex DC.



Quidam exiſtimare poſſunt, analyſin brevius inſtitui poſſe ſumendo punctum D, non utcunque, ſed in aliquo ex punctis datis; et hoc modo analyſis ita fieri poteſt ut ſequitur.

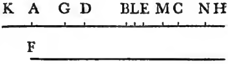
Puta Poriſma verum eſſe, ſitque E punctum et F recta quae invenienda ſunt. Igitur in caſu in quo punctum D incidit in ipſum A, quoniam nullum eſt rectangulum a ſegmentis inter D, ſive A, et puncta A, B contentum, ſequitur, ex hypotheſi Poriſmatis, rectangulum F, DE, ſive F, AE aequale fore quadrato ex AC. Rurſus ponatur punctum, quod fuit G in praecedente analyſi, incidere in ipſum B, et quoniam et in hoc caſu nullum eſt rectangulum AG, GB, ſimiliter, ex hypotheſi,

ſequitur rectangulum F, BE aequale fore quadrato ex BC. Exceſſus igitur rectangulorum F,AE, F,BE qui quidem eſt rectangulum F,AB, aequalis eſt exceſſui quadratorum ex AC, BC, hoc eſt quadrato ex AB et duplo rectangulo AB, BC. Recta igitur F aequalis eſt rectae AB una cum ipſa BC bis, hoc eſt rectae AH, facta ſcilicet CH aequali ipſi BC. Et quoniam rectangulum F, BE, hoc eſt AH, BE aequale eſt quadrato ex BC, et datae ſunt AH, BC rectae, data erit BE, quare et punctum E datum eſt. Quamvis autem haec via qua inveniuntur recta AH et punctum E brevior eſt praecedente, ab hujuſmodi tamen analyſi omnino cavendum eſt; non enim ex ea demonſtratio generalis Poriſmatis derivari poteſt, ut fieri debet, quodcunque ſumatur punctum D, ſed tantum particularis de punctis A et B quae in analyſi adhibita fuerunt. Semel igitur ad minimum, punctum, recta, angulus, vel quodcunque fuerit de quo in Poriſmate aliquid generaliter affirmatur, ſumendum eſt utcunque, intra tamen limites, ſi qui ſint, in Poriſmate praeſcriptos, ut legitime fiat analyſis. Saepe autem brevius et facilius ea quae inveſtiganda ſunt invenientur, ſi tum quaevis ex praedictis rebus ſumatur utcunque, tum denuo modo quodam particulari ſumatur, quando hoc fieri poteſt. Ut in praecedente Poriſmate, puncto D utcunque ſumpto, oſtenſum fuit rectangulum F, DE aequale rectangulo AB, BD, duplo rectangulo DB, BC, et quadrato ex BC; ſi denuo ſumatur, vice puncti G quod in praecedente prima analyſi ſumptum fuit utcunque, punctum B, erit, ex hypotheſi, rectangulum F, BE aequale quadrato ex BC; et hiſce ex prioribus aequalibus ablatis, erit reliquum, rectangulum ſcilicet F, DB aequale reliquo, rectangulo ſcilicet AB,

BD et duplo rectangulo DB, BC. Recta igitur F aequalis est ipsi AB una cum BC bis, quare data est recta F; et punctum E datum ostendetur, ut in prima analysi, cujus compositio etiam huic inservit.

Cor. 1. Si, vice puncti D quod sumptum fuit inter A, B puncta, sumatur punctum, ut K, in AB producta ad partes A; erit rectangulum F, KE, sive AH, KE una cum ipso AK, KB aequale quadrato ex KC.

Quoniam enim rectangulum AH, BE aequale est, ex constructione, quadrato ex BC; et est rectangulum AH, KB aequale (rectangulo KB, BA una cum ipso KB, BH, hoc est, quia BH dupla est ipsius BC,) rectangulo KB, BA una cum ipso KB, BC bis; aequalibus hisce additis, erit



rectangulum AH, KE aequale rectangulo KB, BA, duplo rectangulo KB, BC et quadrato ex BC; commune apponatur rectangulum AK, KB, erit rectangulum AH, KE una cum ipso AK, KB aequale quadrato ex KB, duplo rectangulo KB, BC, et quadrato ex BC, hoc est quadrato ex KC.

Cor. 2. Si vero sumatur punctum, ut L, inter B et E, et in hoc casu erit rectangulum AH, LE una cum ipso AL, LB aequale quadrato ex LC.

Quoniam enim rectangulum AH, BE aequale est quadrato ex BC, addito communi rectangulo AL, LB, erit rectangulum AH, BE una cum ipso AL, LB aequale (quadrato ex BC una

cum rectangulo AL, LB, hoc est quadratis ex BC, BL una cum rectangulo AB, BL, hoc est,) duplo [c] rectangulo CB, BL, [c] 7. 2. quadrato ex LC, et rectangulo AB, BL; et est AH, BL rectangulum aequale rectangulo AB, BL, (una cum rectangulo BH, BL, hoc est) una cum duplo rectangulo CB, BL. Et ablatis hisce aequalibus ex prioribus, erit rectangulum AH, LE una cum ipso AL, LB aequale quadrato ex LC.

Cor. 3. Quando punctum, ut M, est inter E et C, erit rectangulum AM, MB aequale rectangulo AH, ME una cum quadrato ex MC.

Est enim rectangulum AM, MB una cum quadrato ex BC aequale (rectangulo AB, BM una cum quadratis ex BM, BC, hoc est rectangulo AB, BM, duplo rectangulo [c] CB, BM, et quadrato ex MC, hoc est, quia BH dupla est ipsius BC, rectangulo AB, BM una cum ipso HB, BM et quadrato ex MC, hoc est) rectangulo AH, BM una cum quadrato ex MC; quorum quadratum ex BC aequale est rectangulo AH, BE; reliquum igitur rectangulum AM, MB aequale est reliquo, rectangulo scilicet AH, ME una cum quadrato ex MC.

Cor. 4. Quando punctum, ut N, sumptum est in AC producta; erit rectangulum AN, NB aequale rectangulo AH, NE una cum quadrato ex NC. Ostendetur hoc ut Corollarium 3.

Denique si sumatur punctum A vice ipsius D, rectangulum AH, AE aequale erit quadrato ex AC. Si sumatur punctum B, erit rectangulum AH, BE aequale quadrato ex BC;

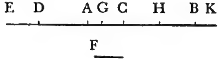
Et ſi ſumatur in E, rectangulum AE, EB erit aequale quadrato ex EC. Si autem ſumatur punctum C, erit rectangulum AH, CE aequale rectangulo AC, CB.

Haec autem omnia numeris illuſtrari poſſunt, ponendo, ex. gr. AB, 24; BC, 12; erit enim F, ſive AH, 48; BE, 3. Et ſi ſumatur AD, 10, erit F, DE, 816; AD, DB, 140; et quadratum ex DC erit 676. et ita in reliquis caſibus.

P R O P. VI.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quorum C eſt
" inter A, B; datum erit in AB producta ad partes A, punc-
" tum D, ita ut ſi ſumatur utcunque, in AB producta ad
" eaſdem partes, punctum E, rectangulum BC, CE aequale
" erit rectangulo DA, AE una cum rectangulo contento recta
" EB, et datâ quâdam rectâ."

Puta Poriſma verum eſſe, ſitque D punctum, et F recta quae invenienda ſunt. Igitur, ex hypotheſi, ſi ſumatur utcunque punctum E in BA producta, rectangulum BC, CE aequale erit rectangulo DA, AE una cum rectangulo F, EB. Sumatur nunc punctum A, vice ipſius E, et rurſus, ex hypotheſi, rectangulum BC, CA aequale erit rectangulo F, AB. Et hiſce



ex praecedentibus aequalibus ablatis, erit reliquum rectangulum BC, AE aequale reliquo, rectangulo ſcilicet DA, AE una cum rectangulo F, AE. Recta igitur BC aequalis eſt rectis

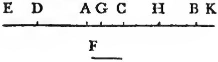
DA, F ſimul; quare rectangulum AB, BC aequale eſt rectangulo DA, AB una cum rectangulo F, AB. Oſtenſum autem fuit rectangulum BC, CA aequale rectangulo F, AB, et hiſce ex proxime praecedentibus aequalibus ablatis, erit reliquum, quadratum ſcilicet ex CB aequale reliquo rectangulo DA, AB. Data autem eſt BC, datum igitur eſt rectangulum DA, AB; et data eſt AB, quare recta AD et punctum D data ſunt. Fuit autem BC aequalis rectis DA, F ſimul; data igitur eſt recta F.

Componetur ita.

Inveniatur AD tertia proportionalis ipſis AB, BC, quae ponatur ab A in BA producta. Sumatur autem recta F aequalis exceſſui ipſarum CB, AD, hoc eſt, ſit CB aequalis ipſis AD, F ſimul; eſt igitur quadratum ex BC aequale rectangulo DA, AB; commune addatur rectangulum AC, CB, erit totum rectangulum AB, BC aequale toti, rectangulo ſcilicet DA, AB una cum ipſo AC, CB. Et quoniam recta CB aequalis eſt ipſis AD, F ſimul, erit rectangulum AB, BC aequale rectangulo DA, AB una cum rectangulo F, AB. Igitur rectangulum DA, AB uno cum ipſo AC, CB aequale eſt rectangulo DA, AB una cum ipſo F, AB; quare AC, CB rectangulum aequale eſt ipſi F, AB. Rurſus quoniam recta BC aequalis eſt ipſis AD, F ſimul, erit rectangulum BC, AE aequale rectangulo AD, AE una cum ipſo F, AE; additiſque hiſce proxime praecedentibus aequalibus, erit totum rectangulum BC, CE aequale toti, rectangulo ſcilicet DA, AE una cum rectangulo F, EB. Q. E. D.

Cor. 1. Si, vice puncti E ſumatur punctum G inter A et C, reliquis manentibus, erit rectangulum DA, AG una cum ipſo BC, CG aequale rectangulo F, GB.

Quoniam enim rectangulum DA, AB aequale eſt quadrato ex CB, commune apponatur rectangulum GC, CB, erit rectangulum DA, AB una cum ipſo GC, CB aequale rectangulo GB, BC. Eſt autem recta CB aequalis ipſis DA, F ſimul, quare rectangulum GB, BC, hoc eſt rectangulum DA, AB una cum ipſo GC, CB aequale eſt rectangulo DA, GB una cum ipſo F, GB. Auferatur commune rectangulum DA, GB, erit rectangulum DA, AG una cum ipſo GC, CB aequale rectangulo F, GB.



Cor. 2. Si inter C et B ſumatur utcunque punctum H, erit rectangulum DA, AH aequale rectangulo BC, CH una cum rectangulo F, HB.

Quoniam enim recta CB aequalis oſtenſa fuit ipſis DA, F ſimul, erit rectangulum HB, BC aequale rectangulo DA, HB una cum ipſo F, HB. Commune apponatur rectangulum DA, AH, erit rectangulum DA, AH una cum ipſo HB, BC aequale (rectangulo DA, AB una cum ipſo F, HB, hoc eſt,) quadrato ex CB una cum rectangulo F, HB. Auferatur commune HB, BC, erit DA, AH rectangulum aequale rectangulo BC, CH una cum rectangulo F, HB.

Cor. 3. Si in AB producta ſumatur utcunque punctum K, erit rectangulum DA, AK una cum ipſo F, KB aequale rectangulo BC, CK.

Quoniam rectangulum DA, AB aequale eſt quadrato ex

CB, et est rectangulum DA, KB una cum ipso F, KB aequale rectangulo CB, BK, quia recta DA una cum ipsa F, aequalis est rectae CB; erit totum, rectangulum DA, AK una cum ipso F, BK aequale toti, rectangulo KC, CB.

Poterint etiam PORISMATA proponi de numeris, ex. gr. praecedens ita de numeris proponi potest.

DATIS duobus numeris a, b quorum major sit a, dati erunt duo alii numeri x, y, tales, ut si sumatur utcunque quintus numerus c, factus ab excessu primi a et secundi b, et summa secundi b et quinti c, aequalis sit facto a tertio x, et quinto c; una cum facto a summa primi a et quinti c, et quarto y. Igitur ex hypothesi erit,

$$\overline{a-b}\times\overline{b+c}=cx+ay+cy$$

i. e. $ab+ac-bb-bc=cx+ay+cy$.

Sumatur rursus utcunque numerus d, vice ipsius c, et similiter ostendetur $ab+ad-bb-bd=dx+ay+dy$; et si c major sit quam d, ablatis hisce aequalibus a praecedentibus, erit $a\times\overline{c-d}-b\times\overline{c-d}=\overline{c-d}+c-d\times y$; igitur est $a-b=x+y$. Unde $a-b-y=x$, et $ac-bc-cy=cx$. Et fuit $ab+ac-bb-bc=cx+ay+cy$; igitur est $ab+ac-bb-bc=ac-bc-cy+ay+cy$. Unde est $ab-bb=ay$, et $\frac{ab-bb}{a}=y$. Et fuit $a-b-y=x$, quare $a-b-\frac{ab-bb}{a}$, i. e. $\frac{aa-2ab+bb}{a}=x=\frac{\overline{a-b}^2}{a}$.

Vel brevius ita.

Ostendetur ut prius $ab+ac-bb-bc=cx+ay+cy$, igitur in casu in quo $c=0$, erit $ab-bb=ay$, et hisce a praecedentibus

ablatis, erit $ac-bc=cx+cy$. Unde erit $a-b=x+y$, et $a-b-x=y$, et $aa-ab-ax=ay$. Fuit autem $ab-bb=(ay=)\ aa-ab-ax$; igitur est $\frac{aa-2ab+bb}{a}$, i. e. $\frac{\overline{a-b}^2}{a}=x$.

Ex. gr. Sit $a=9$. $b=3$. erit $x=\frac{36}{9}=4$. et $y=2$. sumatur vero utcunque numerus pro c, ex. gr. unitas, erit $\overline{a-b}\times\overline{b+c}=6\times4=24$. et est $cx=4$. et $\overline{a+c}\times y=10\times2=20$. et est $24=4+20$.

Si autem c fuisset 10, reliquis manentibus, erit $\overline{a-b}\times\overline{b+c}=6\times13=78$. $cx=40$. $\overline{a+c}\times y=38$. et $78=40+38$.

Ex his exemplis manifestum est multa esse Porismata quae a Theoremate Locali hypothesi deficiunt, alia autem quae ex Locis nullatenus pendent. Merito igitur juniores Pappus reprehendit, quod Porisma ex accidente definiverunt, ex quadam sc. re quae quibusdam quidem non omnibus Porismatibus inest. Fermatius in pag. 118. var. Oper. Math. sequentem tradit Porismatis definitionem, viz. " Cum Locum investigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantisper ignotam, donec Locum inveniendae lineae designaverimus, sed cum ex supposito Loco dato et cognito alium Locum venamur, novus iste Locus Porisma vocatur ab Euclide, qua ratione Locos ipsos Porismatum unam speciem et esse et vocari verissime Pappus subjunxit. Exemplo unico definitionem nostram astruimus, in fig. 5ta Porismatis, datâ rectâ RC, si quaeratur curva quaelibet RAC cujus ea sit proprietas ut a quolibet ipsius puncto ut A demissa perpendicularis AD faciat quadratum AD aequale rectangulo RDC, inveniemus curvam RAC esse circuli circumferenti-

" am; sed si ex dato jam Loco illo alium investigemus, Pro-
" blema verbi gratia Porismatis 5ti, novus iste Locus et in-
" finiti alii quos periti sagacitas analystae repraesentabit, et ex
" jam cognito eliciet, Porisma dicitur.

" Cum autem ut jam diximus Porismata ipsa sint Loci &c.

Verum ex hac definitione quid sint Porismata minime intelligi queat, et revera quae adfert Fermatius vel in definitione sua, vel ad eam adstruendam, Porismatibus nullis conveniunt, nisi iis solis quae sunt Loci. Locos enim sive derivati sint a Loco alio sive a nullo alio derivati Pappus et ipse Fermatius speciem esse Porismatum agnoscit, ejus sc. generis Porismatum cui definitio juniorum convenit; unde patet alias vel saltem aliam speciem esse hujus generis quae non sunt Loci, praeter alia genera, de quibus, ut videtur, nihil noverat Fermatius, quae nihil cum Locis commune habent. Ille vero Porismata cum Locis confundit, cum vocet Porisma ejus 5tum Locum, et postea affirmet Porismata in genere Locos esse. Exemplum autem Loci ad circumferentiam ex quo velit Porisma suum deduci, nihil ad rem facit, neque cum eo particularem aliquem nexum habet. Et quidem melius dixisset Fermatius Porisma illud 5tum conversam esse Loci in pag. 7. libri sui vel deficere hypothesi a Theoremate Locali a Loco illo oriundo; atque ita definitionem juniorum exemplo hoc illustrasset.

Hisce praemissis, quae de Porismatibus tradit Pappus in praefatione ad lib. 7. Math. Collectionum facilius intelligentur; sunt autem haec quae sequuntur.

EX LIBRO SEPTIMO
MATHEMATICARUM COLLECTIONUM
PAPPI ALEXANDRINI

" DE PORISMATIBUS EUCLIDIS III.

POST Tactiones in tribus libris habentur Porismata Euclidis, collectio artificiosissima multarum rerum quae spectant ad analysin difficiliorum et generalium problematum, quorum quidem ingentem copiam praebet natura. Nihil vero additum est iis quae Euclides primum scripserat, praeterquam quod imperiti quidam qui nos praecesserunt secundas descriptiones paucis ipsorum [sc. Porismatum] apposuerunt. Cum vero unumquodque definitum habeat demonstrationum numerum [a], ut ostendimus [b], Euclides unam eamque maxime evidentem in singulis posuit. Habent autem subtilem et naturalem contemplationem, necessariamque et maxime universalem, atque iis quae singula perspicere et investigare valent admodum jucundam. Specie autem haec omnia neque theoremata sunt, neque problemata, sed mediae quodammodo inter haec naturae, ita ut eorum propositiones possunt vel ut theoremata, vel ut problemata formari. Unde factum est ut inter multos Geometras alii haec genere theoremata existiment, alii vero problemata, respicientes ad formam tantum propositionis. Differentias autem horum trium melius intellexisse vete-

[a] Forsan intelligit demonstrationes diversorum casuum ejusdem Porismatis; vel propositionum quae sunt ejus conversae.

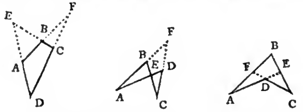
[b] In quibusdam ex lemmatibus, ni fallor, ad Porismata.

res manifeſtum eſt ex definitionibus. Dixerunt enim Theorema eſſe quo aliquid propoſitum eſt demonſtrandum; Problema vero, quo aliquid propoſitum eſt conſtruendum; Poriſma vero eſſe quo aliquid propoſitum eſt inveſtigandum. A Neotericis autem immutata eſt haec Poriſmatis definitio, qui haec omnia inveſtigare haud potuerunt, ſed Elementis hiſce adhibitis, oſtenderunt tantum quid ſit quod quaeritur, non autem illud inveſtigaverunt. Et quamvis a definitione et ab ipſis rebus quae traditae ſunt redarguerentur, hoc tamen modo, ab accidente, definierunt. Poriſma eſt quod deficit hypotheſi a Theoremate Locali [hoc eſt, Poriſma eſt Theorema Locale deficiens ſive diminuta in hypotheſi ejus.] Hujus autem generis Poriſmatum Loca Geometrica ſunt ſpecies, quorum magna eſt copia in Libris de Analyſi; ac ſeorſim a Poriſmatibus collecta, ſub propriis titulis traduntur, eo quod magis diffuſa et copioſa ſit haec prae caeteris ſpeciebus. E Locis enim quaedam plana ſunt, quaedam ſolida, quaedam linearia, et praeter haec ſunt Loca ad medietates [ſive a mediis proportionalibus orta.] Accidit hoc etiam Poriſmatibus, propoſitiones habere conciſas propter difficultatem multarum rerum quae ſubintelligi ſolent; unde evenit Geometras non paucos ex parte tantum rem perſpicere, dum ea quae inter oſtenſa magis neceſſaria ſunt haud capiunt. Multa autem ex iis in una propoſitione minime comprehendi poſſunt, quia ipſe Euclides non multa in unaquaque ſpecie poſuerit, ſed ut ſpecimen daret multae copiae, pauca ad principium primi libri poſuit ejuſdem omnino ſpeciei cum uberrima illa [quae in primo libro habetur] Locorum ſpecie, ut decem ſint numero. Quare has [propoſitiones ſcilicet hujus ſpeciei] una propo-

ſitione comprehendi poſſe animadvertentes, eam ita deſcribimus.

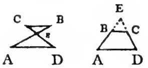
" Si quadrilateri cujus anguli oppoſiti vel ex adverſo, vel " ad eaſdem partes ſunt poſiti [a], [lateribus productis] data " ſint in uno ipſorum tria puncta [interſectionum ſcilicet;] " vel ſi in quadrilatero cujus duo latera ſunt inter ſe paralle- " la [data ſint duo puncta interſectionum in altera parallela- " rum;] caetera vero puncta praeter unam tangant rectam [b]

[a] Primum horum Pappus vocat ὕπτιον, alterum παρυπτίον; et ita videtur ὕπτιον, ſcilicet ſchema, explicandum, quod ſit figura quadrilatera in qua duo latera AD, CD vergunt ad partes contrarias iis ad quas vergunt reliqua duo



AB, BC, hoc eſt vergunt retrorſum ab iis. Παρυπτίον vero ſchema eſt figura quadrilatera in qua duo latera AD, CD vergunt juxta latera reliqua AB, CB ſive verſus eaſdem partes. Ita ut hiſce duabus figuris comprehenditur quaevis figura quatuor laterum, quorum nulla ſunt inter ſe parallela.

In quibuſdam lemmatibus Pappi in Poriſmata mentio fit τοῦ παραλλήλων, ſcili-



cet ſchematis, quod eſt figura quadrilatera cujus duo latera ſunt parallela, ut ABCD in appoſitis figuris.

[b] i. e. Unum tangat unam, aliud tangat aliam rectam poſitione datam, et ſic deinceps.

"positione datam; etiam hoc tanget rectam positione da-" "tam." Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duae per idem punctum transeunt. In quolibet vero proposito rectarum numero ignoratur, quamvis vera sit hujusmodi propositio, viz.

"Si quotcunque rectae occurrant inter se, nec plures quam" "duae per idem punctum; data vero sint puncta omnia in" "earum una, unumquodque autem punctum in alia tangat" "rectam positione datam." Vel generalius sic. "Si quotcun-" "que rectae occurrant inter se, neque sint plures quam duae" "per idem punctum, omnia vero puncta [intersectionum sci-" "licet] in earum unâ data sint; reliquorum numerus erit nu-" "merus triangularis, cujus latus exhibet numerum puncto-" "rum rectam positione datam tangentium; quarum inter-" "sectionum si nullae tres existant ad angulos trianguli spatii" "[nullae quatuor ad angulos quadrilateri, nullae quinque ad" "angulos quinquelateri, &c. i. e. Universim, si nullae harum" "intersectionum in orbem redeant] unaquaeque intersectio" "reliqua tanget rectam positione datam."

Euclidem autem hoc nescivisse haud verisimile est, sed principia sola respexisse: nam per omnia Porismata non nisi prima principia, et semina tantum multarum et magnarum rerum sparsisse videtur. Haec autem juxta hypothesium differentias minime distinguenda sunt; sed secundum differentias accidentium et quaesitorum. Hypotheses quidem omnes inter se differunt, cum specialissimae sint: accidentium vero et quaesitorum unumquodque, cum sit unum idemque multis diversisque hypothesibus contingit [a].

[a] **Ex. gr. Multa sunt Porismata quae diversas hypotheses habent, sed quae**

Talia itaque inquirenda offeruntur in primi libri propositionibus: (in principio septimi habetur * diagramma huc spectans) "Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae "ad rectam positione datam, abscindat autem earum una à "rectâ positione data segmentum dato in ea puncto adjacens, "auferet etiam altera ab aliâ rectâ segmentum datam habens "rationem." i. e. *quod ad alterum segmentum habebit rationem "eandem rationi quae ex hypothesi data est.* Deinde in subsequentibus; "Quod punctum illud tangit rectam positione datam. "Quod ratio ipsius ... ad rectam ... data est. Quod ratio ipsius ... ad partem abscissam data est. Quod haec recta ... "positione data est. Quod haec ad datum punctum vergit. "Quod data est ratio ipsius ... ad interceptam inter punctum ... et datum punctum. Quod data est ratio rectae ... "ad aliquam a puncto .. ductam. Quod data est ratio rectanguli ** ad rectangulum contentum datâ et ipsâ ... Quod "hujus rectanguli unum latus datum est, alterum vero rationem habet *datam* ad rectam abscissam. Quod rectangulum hoc vel solum, vel una cum quodam dato spatio est ** "illud vero rationem datam habet ad partem abscissam. Quod "recta ... una cum aliâ ad quam ... est in ratione data, rationem habet datam ad interceptam inter punctum .. et datum punctum. Quod contentum quâdam datâ et rectâ ... "aequale est contento aliâ datâ et interceptâ inter punctum .. "et datum .. Quod data est ratio rectae ... atque etiam ipsius ... ad interceptam inter punctum .. et datum. Quod

omnia concludunt punctum aliquod tangere rectam positione datam; vel rectam aliquam vergere ad punctum datum. &c.

* Non jam habetur.

" recta ... aufert a positione datis segmenta rectangulum da-
" tum comprehendentia.

In secundo libro hypotheses quidem diversae sunt. Inquirenda vero ut plurimum eadem ac in primo: praetereaque haec " Quod rectangulum illud ... rationem habet *datam* ad " partem abscissam, vel per se, vel adjuncto quodam dato rect-" angulo. Quod data est ratio rectanguli contenti ... et ... " ad partem abscissam. Quod data est ratio rectanguli con-" tenti utrâque ... et ... simul sumptâ, et utrâque ipsarum ... " et ... etiam simul sumptarum, ad partem abscissam. Quod " contentum ipsâ ... et utraque ipsarum ... et ... quae ad " rectam ... datam habet rationem; atque etiam contentum " ... et illâ quae ad ipsam datam habet rationem sunt in da-" ta ratione ad partem abscissam. Quod data est ratio utri-" usque .... simul sumptae ad interceptam inter punc-" tum .. et datum punctum. Quod datum est rectangulum " contentum ipsis ... et ...

In tertio libro plures sunt hypotheses de semicirculis, paucae autem de circulis et segmentis. Inquirendorum vero maxima pars affinis est praecedentibus. Insuper vero haec sese offerunt. " Quod data est ratio rectanguli ... in ... ad rectan-" gulum ... in ... Quod data est ratio quadrati ipsius ... ad " partem abscissam. Quod rectangulum contentum ipsis ... " et ... *aequale* est rectangulo contentum datâ et intercepta in-" ter punctum .. et datum punctum. Quod quadratum ip-" sius ... *aequale* est contento datâ .. et interceptâ inter Cathe-" tum et punctum datum. Quod rectae ...... una cum illa " ad quam ... datam habet rationem, simul sumptae, da-" tam habent rationem ad partem abscissam. Quod datum est

" punctum aliquod, a quo si ducantur rectae ad puncta quae-
" vis ... continebunt illae triangulum specie datum. Quod
" datum est aliquod punctum a quo si ducantur rectae ad
" puncta quaevis ... abscindent illae *è circulo* aequales circum-
" ferentias. Quod recta ... vel parallela erit positione datae,
" *vel verget ad datum punctum*, vel cum quadam alia recta ver-
" sus punctum datum vergente datum continebit angulum."
Habent autem tres Porismatum Libri Lemmata XXXVIII.
Theoremata vero CLXXI. Hactenus Pappus.

Perspicuum est propositiones has omnes, primâ exceptâ, omnino mancas et imperfectas esse. Paucas quidem magno labore enucleavimus, ex quibus praestantiam Porismatum, et quam maxime eorum jactura Geometris deploranda sit, dignoscere licet.

Decem vero Loci qui in prima praecedentium Propositionum generalium continebantur, videntur fuisse hi qui sequuntur.

LOCUS I. PROP. VII.

" SI fuerint quatuor rectae quarum duae sunt inter se paral-
" lelae, et in una harum data sint duo puncta intersectionum,
" reliqua vero intersectionum puncta praeter unum tangant
" rectas parallelas positione datas; tanget etiam hoc rectam
" positione datam."

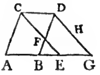
Cas. I. Quando duae reliquae ex quatuor rectis sunt etiam inter se parallelae, hoc est quando quatuor rectae paralle-

logrammum continent, et duo puncta interſectionum data ſunt in uno ex lateribus, unum vero reliquorum tangit rectam poſitione datam, tanget et alteram rectam poſitione datam.

Sit ABCD parallelogrammum, et data ſit in uno ex lateribus puncta A, B, unum vero C ex reliquis tangat rectam EF poſitione datam; tanget et alterum D poſitione datam.

Quoniam enim magnitudine data eſt recta AB, data erit et CD; et quoniam datus eſt angulus FEA, data erit ipſi aequalis angulus FCD. A puncto igitur C in recta poſitione data EF, ducta eſt recta CD magnitudine data in dato angulo FCD, et propterea punctum D tangit rectam poſitione datam [a], parallelam ſcilicet ipſi EF. [a] Prop. 37. Dat.

Ponatur igitur EG a puncto E aequalis ipſi AB, ita ut puncta B, G ſint ad eaſdem partes punctorum A, E; et ducatur GH parallela ipſi EF; erit GH recta quam tangit punctum D; hoc eſt ſi per A, B ducantur quaevis parallelae, quarum prima occurrat rectae EF in C, altera ipſi GH occurrat in D; juncta CD parallela erit ipſi AB. Aequiangula enim ſunt EAC, GBD triangula, ut igitur EA ad AC, ita eſt GB ad BD; eſt autem EA aequalis ipſi GB, quia AB ipſi EG, igitur eſt AC aequalis rectae BD; et ſunt parallelae; igitur parallela eſt CD ipſi AB.

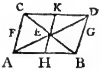


Vel ſi fiat EG aequalis ipſi AB, ut dictum fuit, et ſuper AB deſcribatur parallelogrammum quodvis ABDC, tangat autem angulus ejus C rectam EF; erit juncta GD parallela

ipsi EF. Est enim CD aequalis ipsi (AB, hoc est rectae) EG, et sunt parallelae; igitur parallelae sunt EC, GD.

Cas. 2. Quando duae ex quatuor rectis sunt parallelae, non autem reliquae; et data sunt duo intersectionum puncta in una parallelarum per quae transeunt rectae parallelae et positione datae quas tangunt duo ex punctis reliquis; tanget et tertium punctum rectam positione datam.

Sint quatuor rectae AB, CD, AD, BC quarum AB, CD sunt parallelae; et data sint puncta A, B, reliquorum autem C, D, E unum C tangat rectam AF positione datam, aliud D tangat rectam BG positione datam ipsi AF parallelam; tanget et reliquum E rectam positione datam.



Quoniam enim parallelogrammum est ABDC, erit AE aequalis ipsi ED; quoniam igitur AD ducta inter positione datas parallelas AF, BG secta est in data ratione in puncto E, recta EH quae per E ducta est parallela ipsis AF, BG, positione data est [a].

[a] 40. Dat.

Bifariam igitur secetur AB in H, recta HK ipsi AF parallela erit ea quam tangit punctum E, hoc est si per quodvis punctum E in ipsa HK ducantur ad ipsas BD, AC rectae AD, BC, erit juncta CD parallela ipsi AB. Est enim [b] ut AH ad HB, ita AE ad ED, et ita CE ad EB; aequales igitur sunt AE, ED, ut et CE, EB. Et quoniam aequales sunt AE, EB ipsis DE, EC altera alteri, et aequales continent angulos, erit [c] angulus ABC aequalis ipsi DCB. Parallela igitur est CD ipsi AB.

[b] 2. 6.

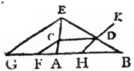
[c] 4. 1.

Vel si ducatur CD parallela et aequalis ipsi AB, et jungantur AD, BC sibi mutuo occurrentes in E; juncta EH parallela erit ipsi BD. Est enim AE aequalis ipsi ED quoniam parallelogrammum est ABDC, et est AH aequalis HB; igitur EH parallela [b] est rectae AB. [b] 2. 6.

Cas. 3. Reliquis ut in Casu 2. manentibus, non transeant ambae positione datae per puncta data.

Sint AB, CD, AC, BD quatuor rectae quarum AB, CD sunt parallelae, et in una harum AB data sint duo intersectionum puncta A, B, reliquorum autem trium C, D, E duo quaevis C, E tangant rectas positione datas inter se parallelas, viz. C tangat rectam FC, et E ipsam GE; tanget et reliquum D rectam positione datam.

Quoniam enim est AF ad FG, ut AC ad CE, hoc est ut BD ad DE; et data est ratio AF ad FG, ipsae enim rectae datae sunt, data erit ratio BD ad DE. Igitur quoniam a dato puncto B ducta est BE ad rectam GE positione datam, et secta est BE in data ratione in puncto D; recta DH quae per punctum D parallela ducta est ipsi EG positione data erit [d]. [d] 39. Dat.



Secetur igitur GB in H ita ut BH sit ad HG, ut AF ad FG, et per H ducatur HK parallela ipsi GE; erit HK recta quam tangit punctum D. Hoc est si ad punctum quodvis E in recta GE ducantur AE, BE quarum AE occurrit ipsi FC in C, BE vero ipsi HK in D; juncta CD parallela erit ipsi AB. Est enim AC ad CE, ut (AF ad AG, hoc est, ex constructione, ut

BH ad HG, hoc eſt propter parallelas ut) BD ad DE. Igitur eſt CD parallela ipſi AB.

Vel ſi ducatur quaevis CD ipſi AB parallela quae occurrat ipſis FC, HK in C, D, et jungatur AC occurratque ipſi GE in E; erunt puncta B, D, E in recta linea. Eſt enim, ex conſtructione, BH ad HG, ut AF ad FG, et, componendo, BG ad GH, ut AG ad GF; reliqua igitur AB eſt ad reliquam FH ſive CD, ut (AG ad GF, hoc eſt ut) AE ad EC. In recta igitur linea ſunt puncta B, D, E.



Vel ſi ad quodvis punctum E in recta GE ducantur AE, BE, quarum AE occurrit ipſi FC in C, et ad BE ducatur CD parallela ipſi AB; juncta DH parallela erit ipſis GE, FC. Eſt enim BD ad DE, ut (AC ad CE, hoc eſt ut AF ad FG, hoc eſt, ex conſtructione, ut) BH ad HG; parallela igitur eſt DH rectae GE.

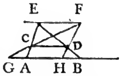
LOCUS II. PROP. VIII.

" SI ſint quatuor rectae quarum duae ſint inter ſe parallelae, " et in harum una data ſint duo puncta interſectionum, duo " vero reliquorum tangant rectas poſitione datas, non autem " inter ſe parallelas; tanget et tertium punctum rectam po- " ſitione datam."

Cas. 1. Quando una ex rectis poſitione datis parallela eſt rectae in qua ſunt duo puncta data.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt inter se parallelae, et data sint puncta A, B; reliquorum autem C, D, E unum C tangat rectam GF positione datam, aliud E tanget rectam EF positione datam et ipsi AB parallelam; tanget et tertium D rectam positione datam.

Jungatur FD occurratque ipsi AB in H; quoniam igitur parallelae sunt GH, CD, ut GH ad CD, ita est (GF ad FC, et ita, propter GA, EF parallelas est AE ad EC, et ita) AB ad CD. Est igitur GH aequalis ipsi AB, data autem est AB, quare et GH; datumque est punctum G, datum igitur est H; et datum est punctum F, positione enim datae sunt GF, EF; igitur recta HF quam tangit punctum D positione data est.



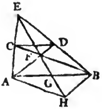
Ponatur igitur GH aequalis rectae AB, ita ut puncta B, H sint ad easdem partes punctorum A, G, et HF jungatur; erit HF recta quam tangit punctum D; hoc est si ad quodvis punctum E in recta EF ducantur AE, BE quae occurrunt ipsis GF, HF in C, D; juncta CD parallela erit rectae AB. Quoniam enim aequales sunt GH, AB, erit GA aequalis ipsi HB; est autem, quia parallelae sunt GB, EF, ut AC ad CE, ita (GA ad EF, hoc est HB ad EF, et ita est) BD ad DE. Parallela igitur est CD ipsi AB. Et reliquae hujus Loci conversae brevius ostendi possunt.

Cas. 2. Quando duae positione datae rectae transeunt per puncta quae data sunt in una parallelarum.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt

inter ſe parallelae, et data ſint puncta A, B; reliquorum autem C, D, E unum C tangat rectam BF poſitione datam, aliud D tangat AF poſitione datam; tanget et punctum E rectam poſitione datam.

Jungatur EF occurratque rectae AB in G; et quoniam CD
[a] 37. 1. parallela eſt ipſi AB, aequalia erunt [a] ACD, BCD et propterea AFC, BFD triangula. Eſt autem triangulum AFC ad ipſum AFE, ut (recta AC ad ipſam AE, hoc eſt ut BD ad BE, hoc eſt ut) triangulum BFD ad ipſum BFE. Eſt igitur triangulum AFE aequale ipſi BFE. Ut autem triangulum AFE ad ipſum AFG, ita eſt (recta EF ad ipſam FG, et ita eſt) triangulum BFE ad ipſum BFG.



Eſt igitur AFG aequale ipſi BFG triangulo, quare et baſis AG baſi GB eſt aequalis. Data autem eſt AB, igitur datum eſt punctum G; et datum eſt punctum F, recta igitur GF quam tangit punctum E poſitione data eſt.

Bifariam igitur ſecetur AB in G, et jungatur GF, erit haec recta quam tangit punctum E; hoc eſt ſi ducantur ad quodvis in ea punctum E rectae AE, BE quae ipſis BF, AF occurrant in C, D punctis, erit juncta CD parallela ipſi AB. Quoniam enim aequales ſunt AG, GB erunt triangula AEG, BEG ut et AFG, BFG aequalia, quare aequalia ſunt et AEF, BEF triangula. Eſt autem triangulum AED ad ipſum ADB, ut FED ad FBD triangulum, utraque enim ratio eadem eſt
[b] 19. 5. rationi ED ad DB; et propterea [b] eſt triangulum AEF ad ipſum AFB, ut AED ad triangulum ADB, hoc eſt ut recta ED ad ipſam DB. Similiter oſtendetur triangulum BFE ad ipſum

BFA, et recta EC ad ipsam CA. Quoniam vero aequalia ostensa sunt triangula AEF, BFE, ut AEF ad AFB, ita erit BFE ad idem AFB. Est igitur ED ad DB, ut EC ad CA, et parallelae erunt [c] rectae CD, AB. [c] 2. 6.

Brevior hujus Demonstratio habetur in Prop. 132. Lib. 7. Pappi, quae est ejus Lemma 6. in Porismata. viz. Ponatur GH aequalis ipsi GF, et jungantur AH, HB; erit AHBF parallelogrammum [d], ac propterea ut AE ad EC, ita (HE ad EF, et ita est) BE ad ED. Igitur est CD parallela ipsi AB. [d] 4. 1. et 29. 1.

Alia hujus Loci conversa haec est; Si ducatur quaevis CD parallela ipsi AB, occurratque positione datis BF, AF in C, D, et junctae AC, BD sibi mutuo occurrant in E, recta erit linea quae per G, F, E transit. Quoniam enim parallelae sunt AB, CD erit triangulum AEF aequale ipsi BEF, ut in Demonstratione Loci ostensum fuit. Est autem AE ad EC, ut (triangulum AFE ad triangulum EFC, hoc est ut triangulum BFE ad idem EFC, hoc est ut recta BF ad ipsam FC, sive) HA ad FC. Et parallelae sunt AH, CF, igitur in recta linea sunt puncta G, F, E.

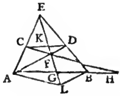
Cas. 3. Quando una tantum positione datarum transit per datum punctum in una parallelarum.

Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD sunt inter se parallelae, et data sint A, B puncta; reliquorum autem C, D, E unum D tangat rectam AF positione datam, aliud E tangat rectam GF positione datam; tanget et punctum C rectam positione datam.

Juncta CF occurrat ipsi AB in H, et GF ipsi CD in K. Et quoniam parallelae sunt AB, CD, ut GB ad KD, ita est AG

ad CK; ut vero KD ad AG, ita CK ad GH; igitur ex aequali, ut BG ad GA, ita AG ad GH. Datae autem ſunt BG, GA, quare data eſt ratio AG ad GH; et data eſt AG, data igitur eſt GH, et datum erit punctum H. Poſitione autem datae ſunt AF, GF, quare punctum F datum eſt; recta igitur FH quam tangit punctum C poſitione data eſt.

Fiat igitur ut BG ad GA, ita AG ad GH, et jungatur HF, erit haec recta quam tangit punctum C; hoc eſt ſi ad quodvis punctum E in recta GF ducantur AE, BE quae occurrant ipſis HF, AF in C, D juncta CD parallela erit ipſi AB. Hoc in Prop. 133. Lib. 7. Pappi, ut ſequitur demonſtratur, quibuſdam, ut fecerat Commandinus in notis ſuis, ſuppletis; Ducatur ad FG recta AL



parallela ipſi CH, et LB jungatur. Quoniam igitur eſt ut BG ad GA, ita (AG ad GH, et ita, propter parallelas AL, CH, eſt) LG ad GF, aequiangula ſunt triangula BGL, AGF; angulus igitur FAG eſt aequalis ipſi LBG, et propterea LB parallela eſt ipſi AD. Eſt igitur, propter parallelas AL, CH, ut AC ad CE ita (LF ad FE, et ita propter parallelas LB, AD eſt) BD ad DE, et propterea parallela eſt CD ipſi AB.

Et ſi inveniatur punctum H, ut dictum fuit, et ducantur AE, BE ad quodvis punctum E in recta GF, quraum BE occurrat ipſi AF in D, et ad AE ducatur DC parallela ipſi AB, erunt puncta C, F, H in recta linea.

Quoniam enim parallelae ſunt CD, AB, eſt DK ad KC, ut (BG ad GA, hoc eſt ut) AG ad GH; et permutando, KD ad AG, ut CK ad GH. Eſt autem KF ad FG ut (KD ad AG,

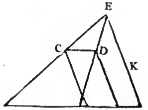
hoc eſt ut) CK ad GH; aequiangula igitur ſunt triangula CKF, HGF; quare in recta linea ſunt C, F, H puncta.

CAS. 4. Quando neutra poſitione datarum tranſit per datum punctum in una parallelarum, nec una ipſarum parallela eſt rectae in qua data ſunt duo puncta.

Sint AB, CD, AC, BD quatuor rectae quarum AB, CD ſunt inter ſe parallelae, et data ſint puncta A, B, reliquorum autem C, D, E duo tangant rectas poſitione datas, tanget et reliquum rectam poſitione datam.

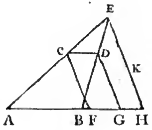
1mo. Sint AB, CD, AC, BD quatuor rectae, ut dictum fuit, et puncta C, D tangant rectas FC, GD poſitione datas et inter ſe parallelas, tanget reliquum punctum E rectam poſitione datam.

Ducatur EH parallela ipſi DG; et quoniam CFDG eſt parallelogrammum, erit CD aequalis ipſi FG; eſt autem AB ad CD, hoc eſt ad FG, ut (BE ad ED, hoc eſt ut) BH ad HG, et datae ſunt AB, FG, data igitur eſt ratio BH ad HG; et data eſt BG, datum igitur eſt punctum H, et eſt recta HE parallela poſitione datae GD, quare recta HE, quam tangit punctum E poſitione data eſt.



Fiat igitur ut AB ad FG, ita BH ad HG, et per H ducatur recta HK parallela rectae GD, erit haec recta quam tangit punctum E, hoc eſt ſi ad quodvis punctum E in HK ducantur AE, BE quae occurrant rectis FC, GD in C, D punctis, juncta CD parallela erit rectae AB.

Eſt enim BH ad HG, ut BE ad ED, et quoniam ut AB ad FG, ita facta eſt BH ad HG, erit per 12. aut 19. 5. AH ad HF, ut BH ad HG; igitur eſt AE ad EC, ut (BH ad HG, hoc eſt ut) BE ad ED, et propterea parallela eſt CD rectae AB.



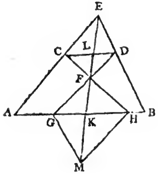
Et manente eadem Conſtructione, ſi ſcilicet fiat ut AB ad FG, ita BH ad HG, et ducatur utcunque recta CD parallela ipſi AB, occurratque poſitione datis FC, GD in C, D, et AC, BD ſibi mutuo in E, juncta EH parallela erit rectae GD, ſive FC. Eſt enim BE ad ED, ut (AB ad CD, hoc eſt ad FG, et ita eſt, ex conſtructione) BH ad HG. Parallela igitur eſt EH rectae DG.

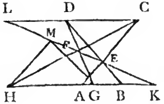
2do. Non ſint poſitione datae inter ſe parallelae, ſcilicet ſint AB, CD, AC, BD quatuor rectae, quarum AB, CD ſunt inter ſe parallelae, et data ſint puncta A, B, reliquorum autem C, D, E primùm duo C, D, quae ſunt in recta quae parallela eſt ipſi AB, tangant rectas poſitione datas HF, GF; tanget et reliquum punctum E rectam poſitione datam.

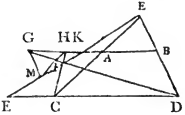
Jungatur EF occurratque ipſis AB, CD in K, L; igitur quoniam eſt AK ad KB, ut (CL ad LD, hoc eſt ut) HK ad KG, componendo vel dividendo, aut dividendo inverſe, et permutando, erit AB ad GH, ut BK ad KG; datae autem ſunt AB, GH, quare data eſt ratio BK ad KG; et data eſt GB, datum igitur eſt punctum K; et datum eſt F, recta igitur KF quam tangit punctum E poſitione data eſt.

Fiat igitur ut AB ad GH, ita BK ad KG, et jungatur KF,

erit haec recta quam tangit punctum E; hoc eſt ſi ducantur AE, BE ad punctum quodvis E in recta KF, occurrantque ipſis HF, GF in C, D; juncta CD parallela erit ipſi AB. Ducatur enim ad EK recta GM parallela ipſi BE, et jungatur MH. Quoniam igitur eſt BE ad GM, ut (BK ad KG, hoc eſt, ex conſtructione, ut) AB ad GH, permutando, erit ut BE ad BA, ita MG ad GH, et ſunt circa aequales angulos alternos, vel quorum unus eſt interior et alter exterior ipſi oppoſitus, igitur







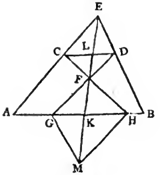
triangulum ABE aequiangulum eſt ipſi HGM, et propterea angulus BAE aequalis eſt ipſi GHM, quare parallela eſt MH rectae AE. Eſt autem, propter parallelas GM, EB, ut GF ad FD, ita (MF ad FE, hoc eſt, quia parallelae ſunt MH, AE ita) HF ad FC; et, permutando, eſt GF ad FH, ut FD ad FC; igitur [2. 6.] parallela eſt CD rectae GH, ſive AB.

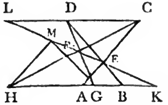
Et, manente eadem Conſtructione, qua ſcilicet facta eſt ut

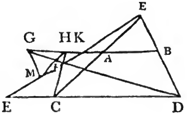
AB ad GH, ita BK ad KG, si ducatur quaevis recta CD parallela ipsi AB, occurratque positione datis HF, GF in C, D, et junctae AC, BD sibi mutuo occurrant in E, erunt puncta E, F, K in recta linea.

Haec est Propositio 128. Lib. 7. Pappi, quam demonstrat ut sequitur.

Ducatur per G recta linea GM parallela ipsi DB, et juncta EF ad M producatur. Quoniam igitur est ut AB ad GH, ita BK







ad KG; ut autem AB ad GH, ita est BE ad GM, quod duae duabus sunt parallelae[a]; ut igitur BK ad KG, ita BE ad GM;

[a] Longa explicatio quam adfert Commandinus in nota sua B in pag. 240. a et sequente ad ostendendam hanc proportionem erronea est et inepta. Et in nota C, ad verba " quod duae duabus sint parallelae" veretur ne haec ab aliquo addita sint; sunt autem omnino necessaria, AK enim parallela est ipsi CD ex hypothesi, at GM est parallela ipsi DB ex constructione, et ex primo horum sequitur esse AB ad CD, ut BE ad ED, et ex altero esse CD ad HG, ut

atque eſt BE parallela ipſi GM, ergo recta linea eſt quae per E, K, M tranſit, et eſt punctum F in recta EM, igitur et puncta E, F, K ſunt in recta linea.

Et in Caſ. 3. quando puncta C, D tangant rectas poſitione datas, eadem ſimiliter oſtendi poſſunt.

Sint jam, in articulo 2do Caſ. 4. puncta D, E quorum E non eſt in recta CD quae parallela eſt ipſi AB, ea quae tangunt rectas poſitione datas, ſcilicet tangat D rectam GF, et E rectam KF; tanget et C rectam poſitione datam.

Jungatur enim CF occurratque ipſi AB in H, et EF occurrat ipſis AB, CD in K, L, et quoniam parallelae ſunt AB, CD erit ut KB ad LD, ita AK ad CL; ut vero LD ad GK, ita CL ad KH; igitur, ex aequali, ut KB ad GK, ita AK ad KH. Datae autem ſunt KB, GK, quare data eſt ratio AK ad KH; et data eſt AK, data igitur eſt KH, datumque erit punctum H, et datum eſt punctum F quia poſitione datae ſunt GF, KF, recta igitur HF quam tangit punctum C poſitione data eſt.

Fiat igitur ut BK ad KG, ita AK ad KH, et HF jungatur, erit haec recta quam tangit punctum C; hoc eſt, ſi ad punctum quodvis E in recta KF ducantur AE, BE quae occurrant ipſis HF, GF in C, D, juncta CD parallela erit rectae AB. Ducatur enim ad FK recta GM ipſi BE parallela, et jungatur MH. Et quoniam eſt ut BK ad KG, ita AK ad KH, per 12. aut 19. 5. erit AB ad GH, ut (BK ad KG, et ita propter parallelas BE, GM, eſt) BE ad GM, et permutando, ut AB ad

(DF ad FG, hoc eſt ut) DE ad GM; igitur, ex aequali, eſt AB ad HG, ut BE ad GM.

N. B. "Et permutando" ad notam B in textu Commandini debet poni poſt "AB ad BK, ita HG ad GK.

BE, ita eſt HG ad GM; et ſunt circa aequales angulos ABE, HGM, aequiangula igitur ſunt triangula ABE, HGM, et angulus propterea BAE eſt aequalis ipſi GHM, parallela igitur eſt MH ipſi AE. Eſt autem GF ad FD, ut (MF ad FE, quia parallelae ſunt GM, BE, et ita eſt) HF ad FC, et permutando; igitur CD eſt ipſi AB parallela, [2. 6.]

Et ſi inveniatur punctum H, ut dictum fuit, et ducantur AE, BE ad quodvis punctum E in recta KF, quarum BE occurrat ipſi GF in D, et ad AE ducatur DC parallela ipſi AB; erunt puncta C, F, H in recta linea.

Quoniam enim parallelae ſunt CD, AB, eſt DL ad LC ut (BK ad KA, hoc eſt, ex conſtructione, ut) GK ad KH, et, permutando, DL ad GK, ut LC ad KH. Eſt autem LF ad FK, ut (DL ad GK, hoc eſt ut) LC ad KH; aequiangula igitur ſunt triangula CLF, HKF, et in recta linea erunt C, F, H puncta.

Cas. 5. Quando punctum in quo ſibi mutuo occurrunt duae rectae poſitione datae, eſt in recta in qua data ſunt duo puncta; caeteris ut in Caſ. 4. manentibus.

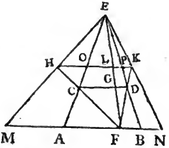
Sint quatuor rectae AB, CD, AC, BD quarum AB, CD ſunt inter ſe parallelae, et data ſint puncta A, B, et reliquorum C, D, E unum C tangat rectam FC poſitione datam, aliud E tangat rectam FE poſitione datam, ſitque punctum F in recta AB; tanget et punctum D rectam poſitione datam.

Jungatur DF, et occurrat EF ipſi CD in G. Quoniam igitur poſitione datae ſunt FC, FG, et eſt CG parallela poſitione datae AB, ſpecie datum eſt triangulum FCG; data igitur eſt ratio FG ad GC, et data eſt ratio CG ad GD, eadem ſcilicet

rationi datae AF ad FB, data igitur [a] eſt ratio FG ad GD, et datus eſt angulus FGD; ſpecie igitur datum eſt [b] triangulum FGD, et datus erit angulus GFD. Poſitione autem data eſt FG, punctumque F datum eſt; recta igitur FD quam tangit punctum D poſitione data eſt [c].

[a] 9. Dat.
[b] 44. Dat.
[c] 32. Dat.

Ducatur igitur inter rectas FC, FG recta quaevis HL parallela ipſi AB, et ut AF ad FB, ita fiat HL ad quartam LK; juncta FK erit recta quam tangit punctum D; hoc eſt ſi a punctis A, B ducantur ad quodvis punctum E in recta FG, rectae AE, BE quae occurrant ipſis FH, FK in C, D, juncta CD parallela erit ipſi AB. Junctae enim EH, EK occurrant rectae AB in M, N; et AE, FE, BE occurrant ipſi HK in punctis O, L, P. Et quoniam eſt MF ad FN, ut (HL ad LK, hoc eſt, ex conſtructione, ut) AF ad FB, erit [d] et MA ad BN, ut AF ad FB; et propter parallelas eſt HO ad PK, ut (MA ad BN, hoc eſt ut) AF ad FB; igitur, permutando, ut HO ad AF, ita PK ad FB, et propterea ut HC ad CF, ita eſt KD ad DF. Parallela igitur eſt CD ipſi HK, quare et ipſi AB. Et haec eſt Prop. 135. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 9. in Poriſmata.



[d] 19. 5.

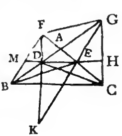
Et, manente eadem conſtructione, ſi ducatur quaevis AE quae occurrat ipſis FH, FG in C, E, et per C ducatur CG parallela ipſi AB, junctaque BE occurrat rectae CG in D; recta erit linea quae per F, D, K tranſit. Eſt enim FL ad LH, ut FG ad GC; ut vero HL ad LK, ita, ex conſtructione, eſt

(AF ad FB, et ita) CG ad GD; igitur, ex aequali, ut FL ad LK, ita FG ad GD. In recta igitur sunt F, D, K puncta.

P R O P. IX.

" SINT quatuor rectae AB, AC, BC, DE quarum BC, DE " sunt inter se parallelae, et ab intersectione alterutrius pa- " rallelae DE et alterius ex reliquis rectis puta a puncto D " ducatur utcunque recta DF ad AC, et jungatur FB; a re- " liqua autem intersectione E ejusdem parallelae ducatur EG " ad rectam AB parallela ipsi FB; erit juncta GC parallela " primò ductae DF."

Occurrat FD ipsi GE in K, et DE occurrat ipsi GC in H; et quoniam parallelae sunt BF, EG, ut FD ad DK, ita est (BD ad DG, et ita propter parallelas BC, DH est) CH ad HG. Quoniam igitur inter tres rectas FEC, DEH, KEG quae in uno puncto E conveniunt ductae sunt duae rectae FDK, CHG quae in eadem ratione sectae sunt in punctis D, H, erunt FK, CG inter se parallelae.



A L I T E R.

Quoniam parallelae sunt GE, BF, ut GA ad AB, ita est EA ad AF; ut vero BA ad AD, ita CA ad AE; igitur ex aequali in proportione perturbata, ut GA ad AD, ita CA ad AF, et permutando, ut GA ad AC, ita DA ad AF. Aequiangula igitur sunt GAC, DAF triangula, quare angulus CGA

eſt aequalis ipſi FDA, et propterea parallelae ſunt CG, FD.

Haec eſt Prop. 134. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus nonum in Poriſmata Euclidis; plenius autem eam enuntiavimus. Eleganter Pappus Propoſitionem demonſtrat ut ſequitur,

Jungantur BE, DC, FG; erit triangulum DBE aequale triangulo DCE; commune apponatur triangulum DAE, ergo totum ABE toti CDA eſt aequale. Rurſus quoniam BF parallela eſt ipſi EG, triangulum BFE aequale eſt triangulo BFG; auferatur ABF, reliquum igitur ABE reliquo AGF aequale erit; ſed triangulum ABE eſt aequale triangulo ACD, ergo et ACD ipſi AGF eſt aequale; et communi appoſito triangulo ACG, fiet totum triangulum CDG aequale toti CFG; et eſt in eadem baſi CG; quare [a] CG ipſi DF eſt parallela. [a] 39. 1.

Cor. Et ſi poſitione data ſit recta DF, datumque ſit punctum C, reliquis manentibus, tanget punctum G interſectio ipſarum BD, EG rectam CG poſitione datam, nam CG ducta eſt per datum punctum C parallela rectae DF poſitione datae.

Una ex converſis hujus Propoſitionis eſt haec quae ſequitur; Si a duobus punctis B, C inflectantur duae rectae BF, CF, et rurſus ab iiſdem inflectantur BG, CG; ab occurſu autem F ducatur ad alterutrum ex ſecundò inflexis, puta ad BG quae a puncto B ducta eſt, recta FD parallela reliquae ex ſecundò inflexis CG; et ab occurſu G ſecundò inflexarum ducatur ad eam ex primò inflexis quae a puncto C ducta eſt recta GE parallela reliquae ex primò inflexis BF; juncta DE parallela erit junctae BC.

Quoniam enim parallelae ſunt FD, CG, erit triangulum CDG aequale triangulo CFG; auferatur commune CAG, erit reliquum CAD aequale reliquo GAF. Et quoniam parallelae

funt GE, BF, erit triangulum BEF aequale triangulo BGF, et ablato communi BAF, erit reliquum BAE aequale (reliquo GAF, hoc eft) ipfi CAD; auferatur rurfus commune DAE, erit reliquum BDE aequale reliquo CED, et eft in eadem bafi
a 39. 1. DE, igitur [a] parallela eft DE rectae BC.

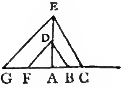
Propofitio haec nona non continetur in Pappi Propofitione generali. Videtur autem Propofitionem aliquam cui inferviebat, puta Corollarium praecedens, aut aliquod aliud fimile, fuiffe inter Porifmata Euclidis.

PROP. X.

LOCUS III. " Quando duae ex quatuor rectis funt paral-
" lelae, et data funt tria interfectionum puncta in una reli-
" quarum; aliud vero punctum tangit rectam pofitione da-
" tam; tanget et reliquum rectam pofitione datam."

Sint quatuor rectae AB, AD, BD, CE quarum BD, CE funt inter fe parallelae, et in una reliquarum AB data fint tria puncta A, B, C, aliud vero D tangat rectam FD pofitione datam; tanget et reliquum punctum E rectam pofitione datam.

Quoniam enim eft ut AB ad BC, ita AD ad DE, et datae funt AB, BC, data erit ratio AD ad DE. Igitur quoniam a dato puncto A ducta eft AD ad rectam pofitione datam FD, et in AD fumptum eft punctum E faciens rationem AD ad DE datam, recta EG quae per E ducta eft parallela ipfi
a 39. Dat. DF data erit pofitione [a].



Fiat igitur ut AB ad BC, ita AF ad FG, et ducatur GE ipſi FD parallela; erit GE recta quam tangit punctum E; hoc eſt ſi a punctis B, C ducantur quaevis rectae inter ſe parallelae BD, CE quae occurrant ipſis FD, GE in punctis D, E; erunt A, D, E puncta in recta linea. Quoniam enim eſt ut AB ad BC, ita AF ad FG; invertendo, erit CB ad BA, ut GF ad FA, et componendo vel dividendo, ut CA ad AB, ita GA ad AF; igitur[b] ut CA ad AB, ita (GC ad FB, et ita) eſt CE ad BD, quia aequiangula ſunt triangula CEG, BDF; igitur in recta linea ſunt A, D, E puncta.

[b] 12. aut 19. 5.

Et, manente eadem conſtructione, ſi a punctis B, C ducantur quaevis duae parallelae BD, CE quarum BD ipſi FD occurrit in D, et juncta AD occurrat rectae CE in E; ducta EG parallela erit ipſi DF. Quoniam enim propter parallelas eſt AD ad DE, ut (AB ad BC, hoc eſt, ex conſtructione, ut) AF ad FG; erit[c] EG parallela rectae DF.

[c] 2. 6.

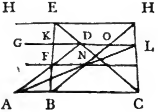
PROP. XI.

LOCUS IV. " Quando nullae ex quatuor rectis ſunt inter " ſe parallelae, et data ſunt tria interſectionum puncta in ea- " rum una; duo vero ex reliquis punctis tangunt rectas po- " ſitione datas ei in qua ſunt data puncta parallelas. Tanget " et reliquum punctum rectam poſitione datam."

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et in una ipſarum data ſint tria interſectionum puncta A, B, C; duo vero D, E ex reliquis tangant rectas GD, HE poſitione datas, et ipſi AB parallelas; tanget et reliquum punctum F rectam poſitione datam.

Quoniam enim a dato puncto B ad parallelas HE, GK po-
[a] 38. Dat. ſitione datas ducta eſt BE, data erit [a] ratio BE ad EK, igitur et ratio BC ad KD data eſt; data autem eſt recta BC, quare et KD data eſt; et data eſt AB, ratio igitur AB ad KD data eſt. Eſt autem AB ad KD, ut AF ad FD; et propterea ratio AF ad FD eſt data. Quoniam igitur poſitione data eſt GKD,
[b] 39. Dat. recta ipſi parallela per punctum F ducta poſitione data erit [b].

Ducatur igitur a puncto C recta quaevis CLM, occurratque poſitione datis GK, HE in L, M; junctae autem AL, BM ſibi mutuo occurrant in puncto N; parallela ipſi AB ducta per N erit recta quam tangit punctum F; hoc eſt ſi ducantur BE, CE ad quodvis punctum E in recta HE, et occurrat CE ipſi GK in D, BE vero occurrat parallelae ipſi AB per N ductae in



F; erunt A, F, D puncta in recta linea. Occurrat enim BM ipſi GK in O, et quoniam ut BC ad KD, ita eſt (BE ad EK, et ita BM ad MO, et ita eſt) BC ad OL, erit KD aequalis rectae OL. Et eſt BF ad FR, ut (BN ad NO, hoc eſt ut) AB ad OL, ſive KD, aequiangula igitur ſunt ABF, DKF triangula, et propterea in recta linea ſunt A, F, D puncta.

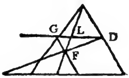
Vel invento puncto N, ut dictum fuit, ſi ducantur BE, CE ad rectam HE quarum CE occurrit ipſi GK in D, et juncta AD occurrit ipſi BE in F; erit juncta FN parallela ipſi AB. Erit enim BF ad FK, ut (AB ad KD, ſive OL, ut oſtenſum fuit, hoc eſt ut) BN ad NO; parallela igitur eſt FN ipſi KO, hoc eſt rectae AB.

PROP. XII.

LOCUS V. "Quando una tantum rectarum positione datarum parallela est rectae in qua data sunt tria interfectionum puncta; reliquis ut in Loco 4to manentibus."

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et in una ipsarum data sint tria interfectionum puncta A, B, C; reliquorum autem D, E, F unum D tangat rectam GD positione datam ipsi AB parallelam, aliud E tangat rectam GH positione datam; tanget et reliquum F positione datam.

Occurrat enim juncta GF ipsi AB in K, et BE ipsi GD in L; quoniam igitur est AB ad BK, ut (DL ad LG, hoc est ut) CB ad BH, et data est ratio CB ad BH, data erit ratio AB ad BK; et data est AB, data igitur est BK, et punctum K datum; et datum est punctum G; igitur recta GK quam tangit punctum F positione data est.



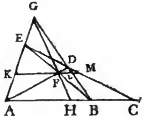
Fiat igitur ut CB ad BH, ita AB ad BK, et jungatur KG, erit haec recta quam tangit punctum F; hoc est si ducatur quaevis CE, occurratque rectis GD, GH in D, E, junctaque BE occurrat ipsi KG in F; erunt puncta A, F, D in recta linea. Est enim CB ad BH, ut DL ad LG, quare et AB ad BK, est ut DL ad LG; et, permutando, AB ad DL, ut (BK ad GL, hoc est ut) BF ad FL. Et est BFL recta linea; in recta igitur sunt A, F, D puncta.

PROP. XIII.

LOCUS VI. " Quando quatuor rectae sibi mutuo occur-" runt, et data sunt tria intersectionum puncta in una ipsa-" rum, duo vero ex reliquis punctis tangunt rectas positione " datas quae transeunt per duo ex datis punctis."

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et data sint tria puncta A, B, C in una ipsarum, reliquorum vero D, E, F unum D tangat rectam positione datam BG, aliud E tangat positione datam AG; tanget et reliquum F rectam positione datam.

Jungatur GF, occurratque ipsi AB in H; per F ducatur recta parrallela eidem AB et occurrat ipsis AG, BG, CE in K, L, M punctis. Quoniam igitur est ut FM ad ML, ita AC ad CB, et ita KM ad MF, erit ut FM ad ML, ita KM ad MF, et ita reliqua KF ad reliquum FL, et ita AH ad HB. Est igitur AH ad HB, ut (KM ad MF, hoc est ut) AC ad CB; et data est ratio AC ad CB, ipsae enim datae sunt; data igitur est ratio AH ad HB, et data est AB, quare punctum H datum est; et datum est G; recta igitur GH quam tangit punctum F positione data est.



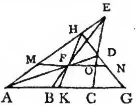
Fiat igitur ut AC ad CB, ita AH ad HB, et HG jungatur, erit haec recta quam tangit punctum F; hoc est si a puncto C ducatur quaevis CDE occurratque ipsis AG, BG in E, D, junctaque BE occurrat ipsi HG in F; erunt A, F, D puncta in recta linea.

Quoniam enim eſt KM ad MF, ut (AC ad CB, hoc eſt ut AH ad HB, hoc eſt ut) KF ad FL; erit reliqua FM ad reliquam ML, ut (KM ad MF, hoc eſt ut) AC ad CB; et permutando, ut FM ad AC, ita (ML ad CB, et ita) MD ad DC. Igitur in recta linea ſunt A, F, D puncta. Et haec eſt Prop. 131. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 5tum in Poriſmata. Vitiata autem eſt non parum apud Commandinum, qui voces *et reliqua ad reliquam* omiſit tanquam ſupervacaneas et corruptas, minime autem ſunt ſupervacaneae, ſed paululum corruptae; integritati autem ſuae hic reſtituuntur. Figura etiam apud eum male delineata eſt, nam in ea E, G, C (cui in noſtra reſpondent E, F, B) non ſunt in recta linea, ut fieri debet.

PROP. XIV.

LOCUS VII. " Quando una tantum ex rectis poſitione da-" tis tranſit per datum punctum; caeteris ut in Loco 6to " manentibus."

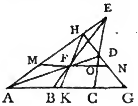
Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et data ſint puncta A, B, C reliquorum vero D, E, F unum D tangat rectam poſitione datam HDG, aliud E tangat rectam EHA poſitione datam, quae tranſit per datum punctum A; tanget et reliquum F rectam poſitione datam.



Jungatur HF, occurratque ipſi AB in K; per F ducatur MN parallela ipſi AB, et occurrat ipſis AH, GH, CE in M, N, O. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita MF ad FO; ut

vero FO ad FN, ita AC ad AG; ratio MF ad FN, hoc eſt ratio AK ad KG, eadem erit rationi compoſitae ex rationibus AB ad BC, et AC ad AG, hoc eſt rationi rectanguli AB, AC ad rectangulum BC, AG; haec autem ratio data eſt, quia puncta A, B, C, G data ſunt. Data igitur eſt ratio AK ad KG, et data eſt AG, quare punctum K datum eſt; et datum eſt H, igitur recta HK quam tangit punctum F poſitione data eſt.

Fiat igitur ut rectangulum AB, AC ad ipſum BC, AG, ita recta AK ad ipſam KG, et jungatur KH; erit haec recta quam tangit punctum F; hoc eſt ſi ducatur quaevis CE occurratque ipſis GH, AH in D, E, juncta vero BE occurrat KH in F; erunt puncta A, F, D in recta linea. Quoniam enim ratio MF ad FN, (hoc eſt ratio AK ad KG,) eadem eſt rationi rectanguli AB, AC ad ipſum BC, AG, hoc eſt rationi compoſitae ex rationibus AB ad BC, et AC ad AG. Eſt autem ratio MF ad FN, eadem ei quae compoſita eſt rationibus MF ad FO, hoc eſt AB ad BC, et FO ad FN; igitur ablata communi ratione AB ad BC, erit reliqua ratio AC ad AG, eadem reliquae FO ad FN. Igitur, dividendo inverſe, et permutando, erit CG ad ON, hoc eſt GD ad DN, ut AG ad FN. In recta linea igitur ſunt puncta A, F, D.



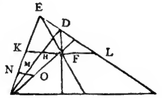
PROP. XV.

LOCUS VIII. " Quando quatuor rectae ſibi mutuo occur-
" runt, nulla autem earum tranſit per punctum datum, rec-

" tae autem poſitione datae quas tangunt duo ex punctis oc-
" currunt ſibi mutuo in recta in qua data ſint tria interſecti-
" onum puncta."

Sint quatuor rectae AB, AD, BE, CE, et data ſint tria puncta A, B, C; reliquorum autem D, E, F duo D, E tangant rectas poſitione datas GD, GE quarum occurſus G ſit in recta AB. Tanget reliquum F rectam poſitione datam.

Jungatur enim GF, et per F ducatur KF parallela ipſi AB, occurratque rectis GD, GE, CE in H, K, L punctis. Igitur quoniam data eſt ratio GB ad BC, data erit ratio KF ad FL; et quoniam data eſt ratio CA ad AG, erit et ratio LF ad FH data; quare [a] data eſt ratio KF ad FH, ut et ratio KF ad KH. Poſitione autem datae ſunt GH, GK, et eſt KH parallela poſitione datae AB; ſpecie igitur [b] datum eſt triangulum GKH, quare data eſt ratio GK ad KH, et propterea [a] ratio GK ad KF data eſt; et datus eſt angulus GKH, quare [c] ſpecie datum eſt triangulum GKF, datusque erit angulus KGF. Igitur, quia data eſt GK poſitione, et datum eſt punctum G, recta GF poſitione data eſt.



[a] 9. Dat.

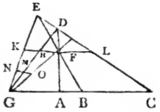
[b] 43. Dat.

[c] 44. Dat.

Quoniam vero ratio KF ad FH eadem eſt, (ut oſtenſum fuit, rationi compoſitae ex rationibus GB ad BC, et CA ad AG, hoc eſt [d]) rationi rectanguli GB, AC ad ipſum BC, GA, convertendo, erit KF ad KH, ut rectangulum GB, AC ad ipſum AB, GC. Ut igitur inveniatur recta GF, ducatur quaevis NM parallela ipſi AB, poſitione datis GE, GD occurrens in N,

[d] 23. 6.

M, et sumatur in ea NO quae ad NM sit ut rectangulum GB, AC ad ipsum AB, GC; erit juncta GO recta quam tangit punctum F. Ducatur enim a puncto C quaevis CD, occurratque positione datis GM, GN in D, E; et juncta BE ipsi GO occurrat in F, erunt puncta A, F, D in recta linea. Ducatur per F recta KHFL parallela ipsi NO sive AB, est igitur KF ad KH, ut (NO ad NM, hoc est ut) rectangulum GB, AC ad ipsum AB, GC; et, convertendo, ut KF ad FH, ita rectangulum GB, AC ad ipsum



BC, GA. Ratio igitur KF ad FH, hoc est ratio composita ex rationibus KF ad FL, et FL ad FH, eadem est [d] rationi compositae ex rationibus GB ad BC, et CA ad AG, quarum ratio KF ad FL eadem est rationi GB ad BC; ratio igitur reliqua LF ad FH eadem est rationi reliquae CA ad AG; et, componendo permutandoque, ut HL ad GC, hoc est ut HD ad DG, ita HF ad GA; et parallelae sunt HF, GA, igitur puncta A, F, D sunt in recta linea.

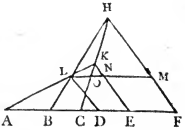
[d] 23. 6.

PROP. XVI.

LOCUS IX. "Quando quatuor rectae sibi mutuo occurrunt, earum autem nulla transit per punctum datum, rectae autem positione datae quas tangunt duo intersectionum puncta sunt inter se parallelae, non autem rectae in qua sunt data puncta."

Sint quatuor rectae ABC, ALK, BLH, CKH, et data sint tria interfectionum puncta A, B, C in una earum, reliquorum vero H, K, L unum H tangat rectam FH positione datam, aliud K tangat rectam EK positione datam et ipsi FH parallelam; tanget et reliquum L rectam positione datam.

Per punctum L ducatur recta LM parallela ipsi AB occurratque ipsis FH, EK, CH in punctis M, N, O. Et quoniam est ML ad LO, ut FB ad BC; et ut LO ad LN, ita est AC ad AE; ratio ML ad LN (quae composita est ex rationibus ML ad LO, et LO ad LN,) eadem [a] erit ei quae composita est ex [a] G. 5.
rationibus FB ad BC, et AC ad AE, hoc est eadem erit [b] rationi rectanguli FB, AC ad rectangulum BC, AE. Data autem est ratio rectangulorum quia ipsorum latera data sunt; igitur data est ratio rectae ML ad ipsam LN. Ad AB ducatur LD parallela ipsis FH, [b] 23. 6.



EK, et quoniam est ut ML ad LN, ita FD ad DE, data erit ratio FD ad DE; et data est recta EF, punctum igitur D datum est, quare recta DL, quae parallela est [c] positioni datae, data erit positione. Positione igitur data est recta DL quam tangit punctum L. [c] 31. Dat.

Fiat igitur ut rectangulum FB, AC ad ipsum BC, AE, ita recta FD ad ipsam DE, et per D ducatur DL parallela rectae EK, erit haec recta quam tangit punctum L; hoc est si ducatur quaevis AK occurratque ipsis DL, EK in L, K, junctae

vero BL, CK ſibi mutuo occurrant in H, juncta HF parallela erit ipſis DL, EK.

Ducatur enim LN parallela rectae AB, et CH, EK, FH ipſi LN occurrant in punctis O, N, M. Igitur, ut in analyſi, oſtendetur ratio ML ad LN eadem eſſe rationi (rectanguli FB, AC ad ipſum BC, AE, hoc eſt, ex conſtructione, rationi) rectae FD ad ipſam DE. Et eſt LN aequalis ipſi DE, igitur LM aequalis eſt ipſi DF, et ſunt parallelae, quare recta FMH parallela eſt ipſi DL.

Loco decimo inſervit Prop. 129. Lib. 7. Pappi, quae eſt Lemma ejus 3. in Poriſmata, ut et Prop. 130. quae eſt Lemma ejus 4. Hae igitur praemittendae ſunt.

PROP. XVII.

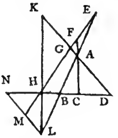
Quae eſt Prop. cxxix. Lib. 7. Pappi.

" SI in tres rectas lineas AB, CA, AD in eodem puncto con-
" venientes ducantur duae rectae lineae HE, HD; dico ut
" rectangulum quod continetur HE, GF ad contentum HG,
" FE, ita eſſe rectangulum HB, CD ad HD, BC."

Ducatur per H quidem recta linea KL parallela ipſi FC, et DA, AB cum ea conveniant in punctis K, L; per L vero ducatur LM parallela ipſi DA, et cum EH conveniat in M. Itaque quoniam ut EF ad FA, ita EH ad HL; ut autem AF ad FG, ita LH ad HM, ita enim eſt HK ad HG in parallelo ſcilicet ſchemate; † igitur, ex aequali, ut EF ad FG, ita EH ad

† Viz. eſt AF ad FG, ut HK ad HG in parallelo ſchemate AFGHK, et LH ad HM, ut HK ad HG in parallelo LHKGM. Unde patet Commandinum

HM; quare rectangulum HE, GF aequale est ipsi EF, HM. Sed aliud rectangulum est HG, FE; ut igitur rectangulum HE, GF ad ipsum HG, FE, ita est rectangulum EF, HM ad ipsum HG, FE, et ita est recta MH ad ipsam HG, et ita LH ad HK. Eadem ratione † et ut LH ad HK, ita rectangulum HB, CD ad ipsum HD, BC. Sed ut LH ad HK, ita ostendimus esse rectangulum HE, GF ad ipsum HG, FE; ut igitur rectangulum HE, GF ad HG, FE, ita erit rectangulum HB, CD ad ipsum HD, BC.



Per compositam vero rationem ostendetur hoc modo.

Quoniam ratio rectanguli HE, GF ad rectangulum HG, FE composita est ex ratione HE ad EF, et ratione FG ad GH, atque est ut HE ad EF, ita HL ad FA; ut autem FG ad GH, ita FA ad HK; erit ratio rectanguli HE, GF ad ipsum HG, FE composita ex ratione HL ad FA, et ratione FA ad HK;

non intellexisse quid significatur *parallelo* sc. schemate; in nota enim ad B in hac Propositione putat verba textus Graeci mutanda esse, quae quidem recte se habent.

† Commandinus hoc dissimili admodum ratione et prolixe ostendit ad notam G in commentario ad hanc Propositionem; simili autem ratione ita ostenditur. Occurrat LM ipsi BH in N; et quoniam est BC ad CA, ut BH ad HL; ut autem AC ad CD, ita LH ad HN; utraque enim ratio eadem est rationi KH ad HD in parallelis figuris KHDAC, KHLND; erit, ex aequali, BC ad CD, ut BH ad HN; quare rectangulum HB, CD aequale est ipsi NH, BC. Sed aliud rectangulum est HD, BC, igitur ut rectangulum HB, CD ad rectangulum HD, BC, ita est rectangulum NH, BC ad ipsum HD, BC, et ita est recta NH ad ipsam HD, et ita LH ad HK.

haec autem ratio composita eadem est rationi LH ad HK. Est igitur rectangulum HE, GF ad rectangulum HG, FE, ut recta LH ad ipsam HK.

Eadem ratione * et ut rectangulum HB, CD ad rectangulum HD, BC, ita recta LH ad ipsam HK; ut igitur rectangulum HE, GF ad rectangulum HG, FE, ita rectangulum HB, CD ad ipsum HD, BC.

PROP. XVIII.

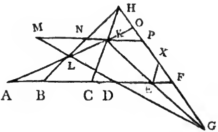
Quae est PROP. CXXX. LIB. 7. PAPPI, sed plenius enuntiata.

" SI in recta linea fuerint sex puncta A, B, C, D, E, F, et a " tribus ipsorum A, B, C ducantur tres rectae ALK, BLH, " CKH sibi mutuo occurrentes in punctis L, K, H, et junctae " LD, KE conveniant in G; fueritque ut rectangulum AF, " BC ad rectangulum AB, CF, ita rectangulum AF, DE ad " ipsum AD, EF; erunt puncta H, F, G in recta linea.

Quoniam enim est ut rectangulum AF, BC ad ipsum AB, CF, ita rectangulum AF, DE ad ipsum AD, EF, erit, permutando, ut rectangulum AF, BC ad ipsum AF, DE, hoc est ut recta BC ad ipsam DE, ita rectangulum AB, CF ad ipsum AD, EF. Sed si per K ipsi AD parallela ducatur KM quae ipsi BH occurrat in N, ratio BC ad DE composita erit ex ratione BC ad KN, et ratione KN ad KM, et insuper ex ratione KM ad DE. Ratio autem rectanguli AB, CF ad rectangulum AD,

* Est enim rectangulum HB, CD ad rectangulum HD, BC in ratione composita ex rationibus HB ad BC, et CD ad DH, hoc est ex rationibus LH ad CA, et CA ad HK quae eadem est rationi LH ad HK.

EF compoſita eſt ex ratione BA ad AD, et ratione CF ad FE; communis auferatur ratio BA ad AD, eadem ſcilicet rationi NK ad KM, erit reliqua ratio CF ad FE eadem ei quae compoſita eſt ratione BC ad KN, hoc eſt ratione CH ad HK et ratione KM ad DE, hoc eſt ratione KG ad GE. Per E ipſi CH parallela ducatur EX, et juncta HG ipſi occurrat in X, et ratio CF ad FE, quae compoſita oſtenſa eſt ex ratione CH ad HK, et ratione (KG ad GE, hoc eſt ratione) KH ad EX, eadem erit rationi CH ad EX. Quoniam igitur eſt CF ad FE, ut CH ad EX, et eſt CH ipſi EX parallela, recta erit linea quae tranſit per H, X, F, et propterea H, F, G erunt in recta linea.*



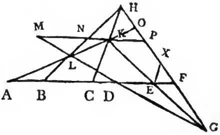
* In enuntiatione Propoſitionis apud Commandinum habetur, "Sit deſcripta figura ABCDEFGHKLMNX;" imperite autem addit tres ultimas literas MNX, quas fatetur non eſſe in Graeco codice; minime enim ſpectant ad enuntiationem ſed ad conſtructionem quae neceſſaria eſt demonſtrationi. Ordinem autem quorundam in fine demonſtrationis mutavimus, perſpicuitatis gratia. In textu autem Commandini in pag. 243. *a*. Lib. 7. Pappi, in linea 5ta a fine demonſtrationis pro CE lege GE; et in 3tia et 2da linea ab eodem fine, poſt verba "CH ad EX," legendum eſt, igitur proportio CF ad EF eadem eſt quae CH ad EX; cum vero CX ipſi EX parallela ſit, recta erit linea quae tranſit, &c.

PROP. XIX.

LOCUS X. " Quando duae rectae positione datae non sunt " inter se parallelae, neque sibi mutuo occurrunt in recta in " qua data sunt tria puncta, caeteris ut in Loco 9. manenti- " bus. Atque Locus hic omnium maxime est generalis."

Sint quatuor rectae ABC, ALK, BLH, CKH, et data sint tria intersectionum puncta A, B, C in una earum, reliquorum vero H, K, L unum L tangat rectam GDL positione datam, aliud K tangat rectam GEK positione datam; tanget et reliquum H rectam positione datam.

Jungatur enim GH occurratque rectae AB in F et rectae AK in O. Quoniam igitur ad tres rectas GL, GK, GO in eodem puncto G convenientes, ductae sunt duae rectae AO, AF, erit, per Prop. 129. Lib. 7. Pappi, quae est 17. hujus, ut rectangulum AL, KO ad ipsum AO, LK, ita rectangulum AF, DE ad ipsum AD, EF. Rursus quoniam ad tres rectas HB, HC, HF ductae sunt duae AO, AF, per eandem Prop. erit ut AL, KO rectangulum ad AO, KL, ita AF, BC ad rectangulum AB, CF. Ut igitur rectangulum AF, BC ad ipsum AB, CF, ita AF, DE ad rectangulum AD, EF, et, permutando, ut rectangulum AF, BC ad ipsum AF,



DE, hoc eſt ut recta BC ad ipſam DE, ita rectangulum AB, CF ad ipſum AD, EF. Data autem eſt ratio rectae BC ad rectam DE, ipſae enim datae ſunt, data igitur eſt ratio rectanguli AB, CF ad ipſum AD, EF; et data eſt ratio lateris AB ad latus AD, quia ipſa data ſunt, igitur ratio reliqui lateris CF ad reliquum EF data eſt [a]; data autem eſt recta CE, quare punctum F datum eſt, et datum eſt punctum G, igitur recta GF quam tangit punctum H datum eſt.

[a] 65. Dat.

Ad inveniendum autem punctum F, invenienda eſt ratio quam habet CF ad FE, quae, ut conſtat ex 65. Dat. eadem eſt rationi quae compoſita eſt ex ratione AD ad AB, et ratione BC ad DE, haec autem ratio compoſita eadem eſt rationi rectanguli AD, BC ad rectangulum AB, DE. Fiat igitur ut rectangulum AD, BC ad ipſum AB, DE, ita recta CF ad ipſum FE, et jungatur punctum inventum F et punctum G, erit GF recta quam tangit punctum H; hoc eſt ſi a puncto A ducatur quaevis recta AL et rectis GD, GE occurrat in punctis L, K, junctae autem BL, CK ſibi mutuo occurrant in H, in recta linea erunt puncta H, F, G, ſive punctum H erit in recta GF.

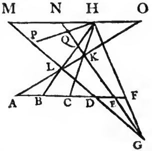
Quoniam enim rectangulum AF, BC eſt ad rectangulum AD, BC, ut (recta AF ad ipſam AD, hoc eſt ut) rectangulum AF, DE ad ipſum AD, DE; ut vero AD, BC rectangulum ad ipſum AB, DE, ita, ex conſtructione, eſt (recta CF ad ipſam EF, et ita eſt) rectangulum AB, CF ad ipſum AB, EF; quare, permutando, et per 1. 6. ut rectangulum AD, BC ad ipſum AB, CF, ita eſt (recta DE ad ipſam EF, et ita eſt) rectangulum AD, DE ad ipſum AD, EF; ut vero rectangulum AF, BC ad ipſum AD, BC, ita oſtenſum fuit rectangulum AF, DE ad

AF, BC. AD, BC.
AB, CF. AF, DE.
AD, DE. AD, EF.

rectangulum AD, DE; igitur, ex aequali, ut rectangulum AF, BC ad ipsum AB, CF, ita est rectangulum AF, DE ad ipsum AD, EF. Ergo, per Prop. 130. Lib 7. Pappi, quae est 18. hujus, in recta linea sunt puncta H, F, G.

Locus vero decimus brevius ostendi potest modo quo eum olim ostendimus in Philosophicis Transactionibus anni 1723, No. 377. ita scilicet, manente eadem enuntiatione, ut in praemissis.

Per punctum H ducatur recta HM parallela ipsi AB, occurratque ipsis GD, GE, AL in M, N, O punctis. Et quoniam propter parallelas est MH ad HO, ut DB ad BA, ut vero OH ad HN, ita AC ad CE, erit ratio MH ad HN, quae scilicet composita est ex ratione MH ad HO, et ratione OH ad HN, eadem ei quae composita est ex ratione DB ad BA et ratione AC ad CE, hoc est rationi rectanguli AC, BD ad ipsum AB, CE. Data autem est ratio rectangulorum quia ipsorum latera data sunt; igitur data est ratio rectae MH ad ipsam HN. Occurrat juncta GH ipsi AB in F, et quoniam est MH ad HN, ut DF ad FE, data erit ratio DF ad FE,



et data est recta DE, punctum igitur F datum est, et datum est punctum G; positione igitur data est recta GF quam tangit punctum F.

Fiat igitur ut rectangulum AC, BD ad ipsum AB, CE, ita recta DF ad ipsam FE, et jungatur GF, erit haec recta quam

tangit punctum H; hoc est si ducatur quaevis recta ALK quae occurrat ipsis GD, GE in L, K, et junctae BL, CK sibi mutuo occurrant in H, erunt H, F, G puncta in recta linea.

Iisdem enim ut in analysi constructis, erit, ut in ea ostensum est, ratio MH ad HN eadem (rationi rectanguli AC, BD ad rectangulum AB, CE, hoc est, ex constructione,) rationi rectae DF ad ipsam FE. Igitur, dividendo, vel componendo, ratio MN ad NH, eadem erit rationi DE ad EF, et permutando, erit MN ad DE, hoc est NG ad GE, ut NH ad EF; et est NH parallela rectae EF, igitur in recta linea sunt puncta H, F, G.

Et si ad rectam inventam GF inflectantur utcunque a punctis B, C rectae BH, CH quae positione datis GD, GE occurrant in punctis L, K; erunt A, L, K puncta in recta linea.

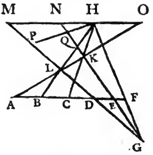
Per punctum enim H ducatur MH parallela rectae AB, occurratque ipsis GL, GK in M, N et junctae AK, et si opus productae, in O. Igitur propter parallelas est MH ad HN, ut DF ad FE; ratio autem MH ad HN composita est ex ratione MH ad HO, et ratione OH ad HN; et ratio DF ad FE, ex constructione, composita est ex ratione DB ad BA, et ratione AC ad CE; igitur ratio composita ex ratione MH ad HO, et ratione OH ad HN eadem est rationi compositae ex ratione DB ad BA, et ratione AC ad CE, quarum ratio OH ad HN eadem est, propter parallelas, rationi AC ad CE; reliqua igitur ratio MH ad HO, eadem est reliquae DB ad BA. Permutando igitur ut MH ad DB, hoc est ut HL ad LB, ita HO ad BA; et rursus, permutando, ut HL ad HO, itaLB ad BA, et sunt circa aequales angulos alternos; aequiangula igitur

ſunt HLO, BLA triangula, quare in recta ſunt A, L, O, et propterea A, L, K puncta.

Cor. 1. Patet rectam FG quae Locus eſt punctorum H in hac Propoſitione tranſire per punctum G occurſum ſcilicet rectarum GD, GE quae poſitione datae ſunt; et propterea ſi inveniatur punctum aliquod H in loco, quod fiet ducendo utcunque a puncto A rectam AL quae occurrit poſitione datis GD, GE in L, K et jungendo BL, CK quae ſibi mutuo occurrunt in H, erit juncta GH recta quae eſt Locus inveniendus. Simile autem tenet in praecedentibus poſt Prop. 7. excepto 9.

Cor. 2. Ex his Problema ſequens facile ſolvitur; Datis tribus punctis A, B, C in recta linea, datisque poſitione tribus rectis GD, GE, PQ inter ipſas ponere triangulum cujus latera vergent ad tria puncta data.

Factum puta, ſitque triangulum HKL cujus angulus H ſit in recta PQ, K in recta GE, et angulus L in recta GD, et latera KL, HL, HK vergant ad puncta data A, B, C, Et quoniam quatuor ſunt rectae AB, ALK, BLH, CKH, et data ſunt tria puncta inſectionum A, B, C in una ipſarum, reliquorum autem H, K, L duo K, L tangunt rectas poſitione datas GE, GD reliquum tanget rectam poſitione datam per hanc Propoſitionem. Inveniatur igitur haec recta,



quae ſit GF, per Cor. 1. hujus, et ipſi occurrat tertia poſitione data PQ in H, et jungantur BH, CH quae occurrant ipſis GD,

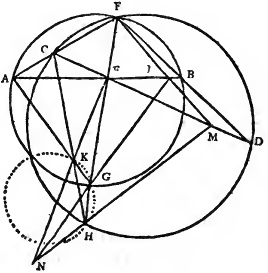
GE in L, K; erit HKL triangulum inveniendum, recta enim KL vergit ad punctum A per secundam partem Propositionis hujus.

PROP. XX.

Quae ostendit usum Porismatum in solutione Problematum.

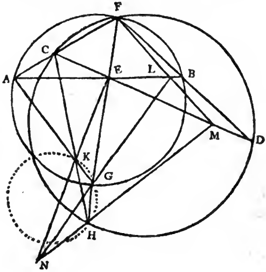
" DATIS positione duabus rectis lineis AB, CD sibi mutuo " occurrentibus in E, ad ipsas a dato puncto F ducere duas " rectas FCA, FBD et facere rectangula AE, EB, CE, ED con- " tenta abscissis inter ductas et punctum E datis spatiis ae- " qualia."

Factum sit, et jungatur FE, sit autem rectangulum FE, EG aequale dato rectangulo AE, EB, et rectangulum FE, EH aequale dato rectangulo CE, ED. Quoniam igitur positione et magnitudine data est FE, positione et magnitudine datae erunt rectae EG, EH [a], et propter aequalia rectangula puncta A, F, B, G erunt in circulo, ut et puncta C, F, D, H in alio cir-



[a] 61. Dat.

b conv. 35. 3. culo[b]; occurrant junctae GA, HC in K, et angulus FGA aequalis erit angulo FBA in eodem segmento; et similiter erit angulus FHC aequalis ipsi FDC, quare et angulus GKH dato
c 16. 1. angulo BED aequalis erit[c]. Et quoniam recta GH positione et magnitudine data est, punctum K tangit circumferentiam positione datam per Prop. 2. Lib. 1. Loc. Planorum Apollonii edit. Glasguae 1749. A tribus autem punctis datis in recta linea F,G,H ductae sunt tres rectae FA, GA, HC et ipsarum duae intersectiones A, C tangunt rectas positione datas EB, ED, reliqua igitur intersectio K tanget etiam rectam positione datam per Prop. 19. praecedentem. Idem autem punctum K



ostensum est tangere circumferentiam positione datam, datum igitur est punctum K, et datum est G, quare recta GK positione data est; et positione data est recta AE, punctum igitur A datum est, et datum est E, et propterea recta AE magnitudine data est. Et datum est rectangulum AE, EB, recta
a 61. Dat. igitur EB magnitudine data est[a], sed et positione, quare da-

tum eſt punctum B, et datum eſt F, rectae igitur FA, FB poſitione datae ſunt.

Componetur vero ita.

A puncto F ducatur utcunque recta FL occurratque poſitione datis AB, CD in L, M punctis, et jungantur LG, MH quae ſibi mutuo occurrant in N, et ſuper GH deſcribatur ſegmentum circuli quod capiat angulum dato angulo BED aequalem, et circumferentiae hujus occurrat juncta EN in K, juncta vero GK occurrat rectae BE in A; denique fiat rectangulum AE, EB aequale dato rectangulo FE, EG, et jungantur FA, FB; erunt hae rectae inveniendae, hoc eſt ſi FA, FB occurrant rectae poſitione datae CD in punctis C, D, erit rectangulum CE, ED aequale dato rectangulo FE, EH. Recta enim EN, per Corollarium 1. Propoſitionis praecedentis, eſt Locus inveniendus, et propterea punctum K erit in recta HC, nam quoniam recta FA occurrit poſitione datis AB, CD in punctis A, C, junctae GA, HC ſibi mutuo occurrent in puncto rectae EN, rectae vero GA, EN ſibi mutuo occurrunt in puncto K, quod propterea erit in recta HC. Quoniam vero rectangulum AE, EB aequale eſt ipſi FE, EG, erunt A, F, B, G puncta in circulo, quare aequales ſunt anguli FBA, FGA, et, ex conſtructione, aequales ſunt anguli BED, GKH, aequales igitur ſunt anguli BDC, ſive FDC, et GHK, ſive FHC; et propterea in circulo ſunt F, D, H, C puncta. Rectangulum igitur CE, ED aequale eſt dato rectangulo FE, EH.

Sequitur Pappi Propoſitio ſecunda generalis, quâ illud quod de quatuor tantum rectis lineis in prima enuntiaverat, ad quotcunque extendit.

PROP. XXI.

" SI quotcunque rectae lineae occurrant inter ſe, nec plures " quam duae per idem punctum; data vero ſint puncta om- " nia in earum una, unumquodque autem punctum in alia " tangat rectam poſitione datam; vel generalius ſic, ſi quot- " cunque rectae occurrant inter ſe, neque ſint plures quam " duae per idem punctum, omnia vero puncta in earum una " data ſint; reliquorum numerus erit numerus triangularis, " cujus latus exhibet numerum punctorum rectam poſitione " datam tangentium; quarum interſectionum ſi nullae tres " exiſtant ad angulos trianguli ſpatii [* nullae quatuor ad an- " gulos quadrilateri, nullae quinque ad angulos quinquela- " teri, &c. i. e. Univerſim, ſi nullae harum interſectionum in " orbem redeant;] unaquaeque interſectio reliqua tanget rec- " am poſitione datam."

Explicatio ſecundae Propoſitionis.

Obſervandum eſt, numerum interſectionum, quae in una recta reperiuntur in quacunque propoſita multitudine recta- rum, quarum non plures quam duae per idem punctum trans- eunt, et quarum nullae ſunt inter ſe parallelae, unitate mino- rem eſſe ipſo numero rectarum; nam duae in unico puncto ſe invicem ſecant, tertia vero ducta priores in duobus, quarta priores in tribus punctis ſecat, &c. igitur numerus interſec-

* Quae uncis incluſa ſunt Pappi textui neceſſitate coacti adjecimus, nam ſine iis Propoſitio non vera eſſet ultra caſum quinque rectarum.

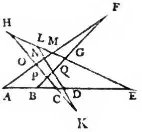
tionum in tribus rectis est unitas binario aucta, i. e. ternarius; numerus earundem in quatuor rectis est ternarius ternario auctus; in quinque vero rectis est ultimus praecedens seu senarius quaternario auctus, &c. qui numeri, ut manifestum est, triangulares sunt, quorum cujusque latus est numerus intersectionum quae inveniuntur in una qualibet recta, i. e. numerus qui unitate minor est numero omnium rectarum. Igitur si ex hoc numero intersectionum dematur numerus omnium punctorum datorum qui idem est cum numero intersectionum in una quavis recta; reliquus erit adhuc triangularis, cujus latus unitate deficit a latere prioris numeri triangularis, et proinde binario minus est numero rectarum propositarum. Et hic est numerus intersectionum quas tangere rectam positione datam Pappus in hac Propositione requirit, quarumque si nullae tres sint ad angulos trianguli, nullae quatuor ad angulos quadrilateri et ita deinceps; unamquamque intersectionum reliquarum tangere rectam positione datam affirmat.

Commode vero in duos casus dividitur Propositio, quos etiam aperte satis indicat Pappus, qui hypothesim casus facilioris praemittit Propositioni eleganti, et hujus generis maxime generali.

CASUS I.

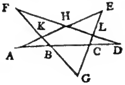
Sint quotcunque rectae, ex. gr. sex, AF, BG, CH, DK, EL, EA; et data sint omnia puncta in earum una, puncta scilicet A, B, C, D, E; omnia vero puncta in alia F, M, N, O tangant rectam positione datam: unaquaeque reliqua intersectio tanget rectam positione datam.

Sumatur enim quaevis interſectio ex reliquis, ex. gr. L, et quoniam quatuor ſunt rectae AE, AM, DL, EL et data ſunt tria puncta A, D, E in earum una, reliquorum vero L, M, N duo M, N tangunt rectam poſitione datam, tertium L tanget rectam poſitione datam per Prop. 19. eodem modo idem de omnibus reliquis punctis oſtendetur.



CASUS II.

Caeteris manentibus, non ſint omnia puncta rectam poſitione datam tangentia, quorumque numerus binario minor eſt numero rectarum propoſitarum, in eadem recta, ſed nulla eorum in orbem redeant; reliqua omnia tangent rectam poſitione datam.



LEMMA I.

Si quotcunque rectae inter ſe occurrant neque plures quam duae per idem punctum, et ſumantur quaevis rectarum, ſit vero numerus interſectionum qui conficitur ſumendo duo puncta in unaquaque rectarum ſumptarum aequalis numero harum rectarum; puncta haec in orbem redibunt. Nam quoniam ſunt duo puncta in unaquaque recta, erunt ad minimum tria in duabus rectis, et quatuor in tribus, et ita deinceps, ſemper ſcilicet erit numerus punctorum ad minimum unitate major numero rectarum niſi recta ultima tranſeat per punctum primum; i. e. niſi puncta in orbem redeant, in

quo solo casu aequalis erit numerus punctorum numero rectarum.

LEMMA II.

Si quotcunque rectae inter se occurrant neque plures quam duae per idem punctum, sumantur vero quaelibet ipsarum intersectiones, quarum numerus numero omnium rectarum aequalis sit; vel hae intersectiones omnes, vel earum aliquae, in orbem redibunt, hoc est invenientur ad angulos polygoni vel trianguli.

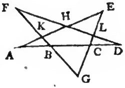
Tres enim intersectiones trium rectarum sunt ad angulos trianguli; si vero sint quatuor rectae, et sumantur quatuor puncta, una harum necessario invenietur in unaquaque recta; quod si in una aliqua ex quatuor rectis unum tantum inveniatur punctum, tria reliqua erunt in tribus reliquis rectis, et propterea ad angulos trianguli; si vero nulla fuerit recta in qua unum tantum invenitur punctum, erunt duo in unaquaque ex quatuor rectis; et sunt quatuor puncta, ergo, per Lem. 1. sunt ad angulos quadrilateri. Et manifestum est si fuerint quatuor rectae, et sumantur plura quam quatuor puncta, multo magis aliqua eorum in orbem redire.

Sint jam quinque rectae, et sumantur quinque intersectionum puncta, et, si fuerit aliqua ex rectis in qua nullum invenitur punctum ex hisce quinque, erunt omnia quinque in quatuor reliquis rectis; si vero fuerit aliqua recta in qua unum duntaxat invenitur punctum, erunt reliqua quatuor puncta in reliquis quatuor rectis; igitur in utroque casu puncta aliqua erunt ad angulos trianguli vel quadrilateri, per praecedentem casum; si autem nulla fuerit recta in qua vel nullum vel unicum invenitur punctum, erunt duo in una-

quaque ex quinque rectis, et sunt quinque puncta; ergo, per Lem. 1. sunt ad angulos quinquelateri; et similiter Propositio ostendetur in sex rectis, et ita in infinitum.

Hisce praemissis Propositio hoc modo demonstratur. Primo, sint quinque rectae AD, AE, BF, CG, DH, et demptis punctis datis in una rectarum, viz. A, B, C, D, reliqua erunt sex puncta E, F, G, H, K, L, in quatuor rectis; et tria horum (nam latus numeri triangularis 6 est 3) quae non sunt ad angulos trianguli, a tribus scilicet rectarum propositarum contenti, ex.gr. E, F, G tangant rectam positione datam; reliqua tria H, K, L etiam tangent rectam positione datam.

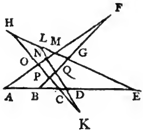
Quoniam enim sunt quatuor rectae AE, BF, CG, DF, et tria intersectionum puncta E, F, G sumpta sunt in ipsis; erit una aliqua ex hisce rectis in qua necessario invenietur unum tantum ex hisce punctis; nam si non, erit vel aliqua in qua nullum est punctum, et proinde erunt tria puncta in tribus reliquis rectis, hoc est ad angulos trianguli, contra hypothesin; vel erunt ad minimum duo ex hisce tribus



punctis in unaquaque quatuor rectarum, et propterea quatuor ad minimum essent puncta; sed sunt tantum tria; igitur necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum. Sit haec recta AE in qua scilicet est punctum E; ergo reliqua duo F, G sunt in reliquis tribus rectis BF, CG, DF; igitur quoniam quatuor sunt rectae BD, BF, CG, DF, et data sunt tria puncta intersectionum B, C, D, in una rectarum, reliquorum vero F, G, L duo F, G tangunt rectam positione datam, reliquum punctum L in tribus illis rectis tangit

rectam positione datam per Prop. 19. praecedentem. Sumatur nunc GE recta scilicet ex hisce tribus quae transit per punctum E in quarta recta AE, et omnia puncta in hac recta GE tangent rectam positione datam. Igitur per casum primum hujus Propositionis, reliqua puncta H, K tangunt rectam positione datam.

2do. Sint jam sex rectae AE, AF, BG, CH, DK, EL; et demptis quinque datis punctis A, B, C, D, E quae sunt in una rectarum, reliqua erunt decem puncta F, G, H, K, L, M, N, O, P, Q in quinque rectis; et, ex hypothesi, quatuor horum (nam latus numeri triangularis 10 est 4) quae non in orbem redeunt tangunt rectam positione datam; sint hae F, G, H, K; reliqua sex L, M, N, O, P, Q tangent rectam positione datam.



Quoniam enim quinque sunt rectae AF, BG, CH, DK, EL, et in ipsis sumpta sunt quatuor intersectionum puncta F, G, H, K; erit una recta in qua unum tantum ex hisce punctis invenitur, aliter enim vel erit aliqua recta in qua nullum est punctum, et ita quatuor puncta essent in quatuor reliquis rectis, et propterea per Lem. 2. aliqua eorum in orbem redibunt, contra hypothesin; vel erunt ad minimum duo puncta in unaquaque recta, et propterea essent ad minimum quinque puncta; sed sunt tantum quatuor, quare necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum; sit haec recta AF in qua est punctum F, ergo reliqua tria G, H, K sunt in reliquis quatuor rectis BG, CH, DK, EL; quoniam igitur quinque sunt rectae BE, BG, CH, DK, EL, et da-

ta ſunt omnia puncta B, C, D, E in una rectarum, et tria reliquorum G, H, K quae non ſunt ad angulos trianguli tangunt rectam poſitione datam; per primam partem hujus demonſtrationis, reliqua tria puncta in his quatuor rectis ſcilicet L, P, Q, tangunt rectam poſitione datam. Sumatur nunc BF recta ſcilicet quae tranſit per punctum F in quinta recta AF, et omnia puncta in hac recta BF tangent rectam poſitione datam; quare per caſum primum hujus Propoſitionis reliqua puncta M, N, O tangunt rectam poſitione datam. Eodem prorſus modo Propoſitio demonſtrabitur in ſeptem, octo, &c. rectis in infinitum, ut patet.

P R O P. XXII.

Quae eſt Prop. 127. Lib. 7. Pappi, et ejus Lemma primum in Poriſmata.

" SIT deſcripta figura ABCDEFG, ſitque ut AF ad FG, ita
" AD ad DC, et HK jungatur; Dico HK ipſi AC parallelam
" eſſe."

Vel magis explicite.

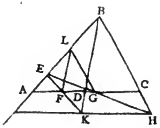
" SI in recta linea fuerint puncta A, F, D, G, C ita ut AF ſit
" ad FG, ut AD ad DC; et ad rectam lineam AB inflectan-
" tur FE, GE, et ad eandem inflectantur DB, CB, et inflexae
" a punctis F, D ſibi mutuo occurrant in K, inflexae vero a
" punctis G, C occurrant in H, et HK jungatur; erit KH
" parallela ipſi AC."

Ducatur per F ipſi BD parallela FL; quoniam igitur ut AD ad DC, ita eſt AF ad FG, permutando et per 12. 5. erit ut AD ad AF, hoc eſt in rectis parallelis, ut BA ad AL, ita CA ad AG; ergo juncta LG ipſi BC parallela eſt. Ut igitur EB

ad BL, ita in parallelis, EK ad KF, et EH ad HG. Quare ut EK ad KF, ita eſt EH ad HG; ideoque HK ipſi AC eſt parallela.

Per compoſitam vero rationem hoc pacto, demonſtratio quae apud Commandinum, et, ut videtur, in textu Graeco, manca habetur, ita reſtituitur.

Quoniam eſt ut AF ad FG, ita AD ad DC, invertendo erit ut GF ad FA, ita CD ad DA; et componendo, permutandoque et convertendo, ut AD ad DF, ita AC ad CG.* Sed ratio AD ad DF, compoſita eſt † ex ratione AB ad BE, et ratione EK ad KF; et ratio AC ad CG compoſita eſt ‡ ex ratione AB ad BE, et ratione EH ad HG. Ratio igitur compoſita ex ratione AB ad BE, et EK ad KF, eadem eſt rationi compoſitae ex ratione AB ad BE, et EH ad HG. Communis auferatur ratio AB ad BE, reliqua igitur ratio EK ad KF, eadem eſt rationi EH ad HG. Igitur HK ipſi AG parallela eſt.



* Ita habetur apud Commandinum, ſed paulo brevius oſtendetur ut ſequitur; Quoniam eſt ut AD ad DC, ita AF ad FG, permutando, erit ut AD ad AF, ita DC ad FG, et per 12. 5. ut AD ad AF, ita AC ad AG, igitur, convertendo, ut AD ad DF, ita AC ad CG.

† ‡ Quae ad has notas habentur ex Lemmate ſequenti pendent, quod quidem habetur in ſecunda parte Prop. 3. Lib. 8. Pappi. Vid. fig. Prop. 22. hujus.

Si duae rectae lineae BA, AD duabus rectis EK, KB occurrant, et dicatur quaevis earum AD prima, alia AB ſecunda, quaevis reliquarum KB tertia, et altera KE quarta; ratio ſegmenti primae AD inter occurſum A primae et ſecundae et tertiam, ad ſegmentum ejuſdem DF inter tertiam et quartam, compoſita erit ex ratione ſegmenti AB ſecundae inter occurſum A et tertiam ad ejuſdem ſegmentum BE inter tertiam et quartam, et ex ratione ſegmenti KE

PROP. XXIII.

Quae eſt Poriſma 1. Lib. 1. Poriſmatum Euclidis.

" SI a duobus punctis datis inflectantur duae rectae ad rec- " tam poſitione datam, abſcindat autem earum una a recta " poſitione data ſegmentum dato in eo puncto adjacens, au- " feret etiam altera ab alia recta ſegmentum " dato puncto " adjacens," datamque habens rationem " ad alterum ſeg- " mentum."

In No. 377. Tranſactionum Philoſophicarum anno 1723, Poriſma hoc explicatum fuit quaſi non ſolum alia ea recta invenienda eſſet, punctumque in ea cui adjacet ſegmentum ablatum; ſed et ratio quam habet ſegmentum hoc ad ſegmentum a prima recta ablatum invenienda eſſet. Verum poſtea inveni innumeras rectas ſibi invicem parallelas Poriſmati, hoc modo propoſito, ſatisfacere; igitur verba Pappi " datamque habens rationem" interpretanda ſunt " habens rationem eandem datae rationi," et ita quidem ſcribenda ſunt ad clare diſtinguendum ea quae data ſunt ex hypotheſi in Poriſmate ab iis quae data fore affirmantur, et invenienda proponuntur. Et in hoc ſenſu Propoſitionis, qui quidem genuinus eſt, duae

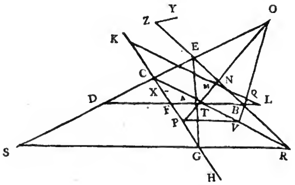
quartae inter tertiam et ſecundam ad ejuſdem ſegmentum KF inter tertiam et primam.

Ducatur enim ad AB recta FL parallela ipſi KB, ratio igitur AD ad DF eadem eſt rationi AB ad BL quae compoſita eſt ex ratione AB ad BE, et ratione (EB ad BL, hoc eſt ratione) EK ad KF.

Commandinus ad notam G commentarii ejus ad hunc locum Prop. ſc. 127. Lib. 7. Pappi, ponit junctam GL parallelam eſſe ipſi BC; hoc autem minime aſſumendum eſt, ita enim tota fere demonſtratio prima aſſumenda eſſet, ſi autem hoc fieret, demonſtratio ſecunda omnino inutilis eſſet.

tantum rectae Porismati satisfaciunt. Investigatio autem Porismatis ita fiet.

Sint A, B puncta data, a quibus ad rectam CD positione datam inflectantur utcunque rectae AE, BE; auferat autem earum una AE a recta positione data CF segmentum GH dato puncto H adjacens; ostendendum est alteram inflexam BE auferre segmentum ab alia quadam recta dato puncto in ea adjacens quod ad alterum segmentum GH habet rationem eandem datae rationi quam habet data recta β ad datam α, et

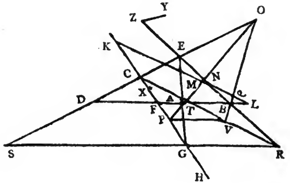


alia haec recta invenienda est et data ostendenda, et punctum in ea, cui adjacet segmentum auferendum, datum ostendendum est.

Puta Porisma verum esse, et rectam KL eam esse ex qua segmentum auferendum est ab inflexa a puncto B, et esse M punctum cui segmentum adjacet. Occurrat igitur BE ipsi KL in N, et NM erit segmentum abscissum. Ex hypothesi igitur habet GH ad NM eandem rationem quam habet recta α ad ipsam β. Occurrat juncta AB ipsi CD in D, et CF, KL ipsi AD

occurrant in F, L punctis. Quoniam igitur a punctis A, B ad rectam CD ductae sunt AD, BD, et AD aufert a recta CF segmentum FH adjacens puncto H, BD vero ab ipsa KL segmentum aufert LM puncto M adjacens, habebit FH ad LM eandem rationem quam α ad β. Est igitur GH ad NM, ut HF ad LM, quare et GF est ad LN, ut HF ad LM, seu ut α ad β.

Rursus a punctis A, B ad rectam CD inflectantur AO, BO occurrantque ipsis CF, KL in P, Q punctis, et similiter osten-



detur esse PF ad LQ, ut HF ad LM. Et ostensa est GF ad LN, ut HF ad LM; ut igitur GF ad LN, ita est PF ad LQ. Ducatur ad EB recta GR parallela ipsi AB, occurratque rectae CD in S, et juncta CR occurrat ipsi AB in T. Et quoniam est DA ad AB, ut SG ad GR, hoc est ut DF ad FT, et data est ratio DA ad AB, puncta enim D, A, B data sunt, data erit ratio DF ad FT. Data autem est DF, positione enim data est CF, data igitur est FT, datumque erit punctum T, et recta CT positione, datum enim est punctum C. Datae igitur sunt

CT, CF ipsarumque ratio, quare et ratio RT ad GF data est. Occurrat OB ipsi CR in V, et PV jungatur; et quoniam est DA ad AB, ut DF ad FT, et a punctis A, B, ad rectam CD inflexae sunt AO, BO; ad eandem autem CD a punctis F, T inflexae sunt FC, TC ipsis AO, BO occurrentes in P, V, erit [a] recta PV parallela ipsi AB, ideoque et ipsi GR. Est igitur ut RT ad GF, ita VT ad PF; ut vero GF ad LN, ita ostensa fuit PF ad LQ; ergo, ex aequali, ut RT ad LN, ita VT ad LQ; et permutando, ut RT ad TV, ita NL ad LQ; hoc est rectae RT, LN in eadem ratione sectae sunt a tribus rectis TBL, VBQ, RBN quae in eodem puncto conveniunt; parallela igitur [b] est RT ipsi LN. Data autem ostensa est ratio quam habet RT ad GF, ut et ratio GF ad LN, eadem scilicet datae rationi α ad β; data igitur est [c] ratio RT ad LN. Est autem RT ad LN, ut TB ad BL, quare ratio TB ad BL data est; et data est TB, quia puncta T, B data sunt, data igitur est BL, ideoque punctum L datum est. Et quoniam per datum punctum

[a] Prop. 22.

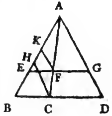
[b] Vide infra.

[c] 9. Dat.

[b] Hoc sequenti Lemmate ostenditur.

" SI inter tres rectas AB, AC, AD in eodem puncto convenientes ducantur " duae rectae BCD, EFG quae in eadem ratione sectae sunt in C, F, ductae " erunt inter se parallelae."

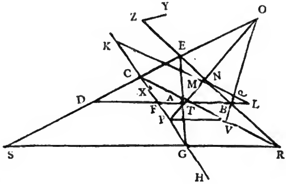
Ducantur enim ad AB rectae CH, FK ipsi AD parallelae; quoniam igitur, ex hypothesi, est ut BC ad CD, ita EF ad FG; propter parallelas erit BH ad HA, ut EK ad KA; et componendo permutandoque, ut BA ad EA, ita (HA ad AK, et ita) CA ad AF. Parallelae igitur sunt BC, EF. Vel ita, manente eadem constructione, Quoniam est BH ad HA, ut (BC ad CD, hoc est ex hypothesi, ut EF ad FG, hoc est ut) EK ad KA; ut vero HA ad HC, ita est KA ad KF; igitur, ex aequali, erit BH ad HC, ut EK ad KF. Et sunt circa angulos aequales, igitur aequiangula sunt BHC, EKF triangula, et angulus CBH aequalis erit ipsi FEK, et propterea BD, EG sunt parallelae.



L ducta eſt KL parallela rectae CT poſitione datae, poſitione
[d] 31. Dat. data [d] eſt KL. Et quoniam data eſt FH, et ratio ipſius ad LM, data erit LM; et datum eſt punctum L, quare et punctum M. Recta igitur KL punctumque M poſitione data ſunt. Quae fuerunt inveſtiganda.

Componetur vero ita.

Occurrat recta per data puncta A, B ducta poſitione datis CD, CF in punctis D, F; ut autem α ad β, ita fiat CF ad FX; et ut DA ad AB, ita fiat DF ad FT, et juncta CT produca-



tur; fiat etiam ut CT ad FX, ita TB ad BL, quae ponatur in recta BD verſus utraſvis partes puncti B; et ducatur LK parallela ipſi CT. Sit autem H punctum datum in CF cui adjacet ſegmentum rectâ a puncto A inflexâ abſciſſum, et ut CF ad FX, ita fiat FH ad LM, quae ponatur in recta LK ad eaſdem vel contrarias partes rectae DL ad quas eſt FH, prout punctum L eſt ad eaſdem vel contrarias partes puncti B ad quas eſt punctum T. Erit recta KL ea ex qua inflexa a puncto B aufert ſegmentum puncto M adjacens, quod ad ſegmentum ex

recta CF abscissum puncto H adjacens a recta inflexa a puncto A eandem habebit rationem quam β ad α, seu quam habet FX ad FC.

Inflectantur enim utcunque a punctis A, B ad rectam CD rectae AE, BE, occurratque AE ipsi CF in G, BE vero ipsi KL in N; abscindant autem ex CF, KL segmenta GH, NM punctis H, M adjacentia. Erit GH ad NM, ut CF ad FX, hoc est ut α ad β. Occurrat enim BE ipsi CT in R, et jungatur GR. Quoniam igitur ut DA ad AB, ita est DF ad FT, erit[a] GR parallela ipsi AB; ut igitur GF ad RT, ita est FC ad CT; ut vero RT ad LN, ita est (TB ad BL, et ita, ex constructione, est) TC ad FX; ergo, ex aequali, ut GF ad LN, ita (CF ad FX, et ita facta fuit) FH ad LM. Est igitur[b] GF ad LN, ut GH ad NM. Quare abscissa GH est ad abscissam NM, ut α ad β.

[a] Pr. 22.

[b] 12. aut 19. 5.

P R O P. XXIV.

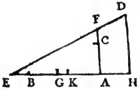
Quae est Lemma ad Problema in sequente Propositione; est autem Casus Loci 1. Lib. 2. Apollonii de Sectione Rationis.

" Ad duas rectas positione datas AB, AC a dato puncto D
" extra ipsas, rectam ducere DFE quae abscindet a positione
" datis segmenta EB, FC inter se aequalia, datis punctis B, C
" adjacentia."

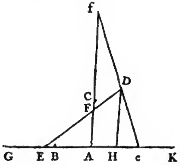
Factum puta; et ad AB ducatur DH parallela ipsi AC, ponatur autem BG aequalis ipsi AC; data igitur est BG, datumque punctum G. Ponatur etiam HK aequalis ipsi HD, et quoniam ut EH ad HD, ita est EA ad AF, hoc est (quia EG aequalis est ipsi AF, et KH ipsi HD) EH ad HK, ut AE

[a] comp. aut divid. ad EG; erit [a] et EK ad KH, ut AG ad GE. Rectangulum igitur GE, EK aequale est dato rectangulo KH, GA; data autem est recta KG, quia data sunt K, G puncta, quare [b] data est GE, punctumque E datum erit; et datum est punctum D, recta igitur DE positione data est.

[b] 85. vel 86. Dat.



[c] 28. aut 29. 6. Fiat [c] igitur rectangulum GE, EK aequale dato rectangulo KH, GA, et DE jungatur quae occurrat ipsi AC in F, et fiat HK aequalis ipsi HD, et BG ipsi AC; erunt segmenta EB, FC inter se aequalia. Quoniam enim, ex constructione, est ut AG ad GE, ita EK ad KH, erit [a] AE ad EG, ut (EH ad HK, sive HD, hoc est ut) EA ad AF. Aequalis igitur est EG ipsi AF, et est BG aequalis rectae AC, quare reliqua EB aequalis est reliquae FC.



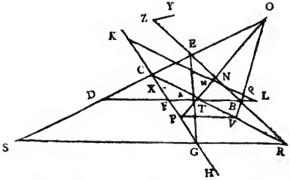
P R O P. XXV.

Quae praebet exemplum quo usus Porismatum in solutione Problematum ostenditur.

" A DUOBUS punctis datis A, B ad rectam CD positione
" datam inflectere rectas AE, BE quae abscindent a duabus
" aliis rectis positione datis CF, YZ segmenta GH, ZY datis

" punctis H, Y adjacentia, quae inter se habebunt rationem " eandem datae rationi α ad β."

Factum puta; et quoniam a datis punctis A, B ad rectam positione datam CD inflexae sunt AE, BE quarum una AE abscindit a positione data CF segmentum GH adjacens dato puncto H, abscindet, per Porisma in Prop. 23. altera BE ab alia quadam recta segmentum dato puncto adjacens ad quod alterum GH habebit rationem eandem datae rationi α ad β. Inveniatur haec recta, sitque KL, et sit M punctum in ea in-



ventum, ipsique KL occurrat BE in N. Est igitur GH ad NM, ut α ad β; eadem vero GH, ex hypothesi, est ad ZY, ut α ad β; aequalis igitur est NM ipsi ZY. Quoniam igitur a dato puncto B ducta est BN quae a positione datis KL, ZY abscindit segmenta NM, ZY datis punctis M, Y adjacentia, quae inter se sunt aequalia, positione data erit [a] BN; datum igitur est punctum E in quo BN rectae CD positione datae occurrit; quare et AE, BE positione datae sunt.

[a] Pr. 24.

Compositio patet, inventis scilicet rectâ KL et puncto M.

ope Porifmatis in Prop. 23. inveniatur praeterea recta BEZ per Prop. 24. quae abfcindat a rectis KL, ZY fegmenta aequalia NM, ZY datis punctis M, Y adjacentia, occurratque BZ rectae CD in E, et AE jungatur quae occurrat ipfi CF in G; erit HG ad YZ, ut α ad β. Ex constructione enim eft GH ad NM, ut α ad β, et itidem ex conftructione, eft NM aequalis ipfi ZY; igitur eft GH ad ZY, ut α ad β.

Porifmati fequenti utilia funt octo Lemmata quae habentur in Lib. 7. Pappi, in Prop. fcilicet 136. et feptem fequentibus, et quamvis fine iis Porifma oftendi poteft, ne tamen eorum ufus Geometras diutius lateat, Lemmata ea hic tradere non inutile vifum eft.

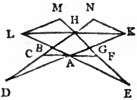
PROP. XXVI.

Quae eft 136. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum in Porifmata; eft autem converfa Prop. 17. hujus.

" IN duas rectas lineas BAE, DAG duae rectae lineae ab eo-
" dem puncto ducantur HD, HE, et in ipfis fumantur punc-
" ta C, F; fitque ut rectangulum quod continetur DH, CB
" ad contentum DC, BH, ita rectangulum contentum EF,
" GH ad contentum EH, FG. Dico rectam lineam effe quae
" per puncta C, A, F tranfit."

Ducatur per H ipfi CA parallela KL, quae cum AB, AD in punctis L, K conveniat; et per L ipfi AD parallela agatur LM, producaturque EH ad M. Deinde per K parallela ipfi AB ducatur KN, et DH ad N producatur. Itaque quoniam

ob lineas parallelas fit ut DH ad HN, ita DC ad CB *, erit rectangulum DH, CB aequale ipsi DC, HN. Sed aliud aliquod rectangulum est quod DC, BH continetur; ergo ut rectangulum DH, CB ad ipsum DC, BH, ita rectangulum DC, HN ad DC, BH, hoc est ita recta HN ad BH. Sed ut rectangulum quidem DH, CB ad ipsum DC, BH, ita ponitur esse rectangulum EF, GH ad ipsum EH, FG; ut autem recta HN ad BH, ita in parallelis est KH ad HL, et ita GH ad HM, et ita est



rectangulum EF, GH ad ipsum EF, HM. Igitur ut rectangulum EF, GH ad ipsum EH, FG, ita rectangulum EF, GH ad ipsum EF, HM; rectangulum igitur EH, FG aequale est ipsi EF, HM. Quare ut MH ad HE, ita est GF ad FE; componendoque et permutando, ut ME ad EG, ita HE ad EF. Sed ut ME ad EG, ita LE ad EA; ut igitur LE ad EA, ita HE ad EF, et propterea AF parallela est ipsi LHK. Sed et CA eidem LK est parallela; igitur recta linea est quae per C, A, F transit. Quod oportebat demonstrare.

Notandum est Pappi Propositionem 142. Lib. 7. eandem esse cum hac 136. demonstrationem vero aliam in ea tradit. Utraque autem demonstratio figuris utriusque Propositionis convenit, ut ex sequenti demonstratione, quae est ea quâ Pappus utitur in Prop. 142. patebit. Notae autem alphabeticae sunt eae quae habentur in Prop. 142. rationem vero propter quam

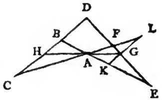
* Est enim DH ad HK, ut DC ad CA; ut vero HK ad HN, ita est CA ad CB, propter similia triangula KHN, ACB; igitur, ex aequali, ut DH ad HN, ita DC ad CB.

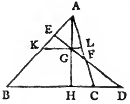
Pappus has Propoſitiones tanquam diverſas tradiderit non facile eſt divinare.

P R O P. XXVII.

Haec eſt ipſiſſima Pappi Prop. 142. et continet aliam demonſtrationem Prop. 136.

"IN duas rectas lineas AB, AC, ducantur ab eodem puncto
" D duae rectae lineae DB, DE, et in ipſis ſumantur puncta
" G, H; ſitque ut rectangulum EG, FD ad ipſum ED, GF,
" ita rectangulum BH, CD ad ipſum BD, HC. Dico rectam
" lineam eſſe quae per A, G, H puncta tranſit."





Ducatur per G ipſi BD parallela KL, occurratque ipſis AB, AC in K, L. Itaque quoniam eſt ut rectangulum EG, FD ad ipſum ED, GF, ita rectangulum BH, CD ad ipſum BD, CH; ratio autem rectanguli EG, FD ad ipſum ED, GF compoſita eſt ex ratione quam habet GE ad ED, hoc eſt ratione KG ad BD, et ex ratione quam habet DF ad FG, hoc eſt ratione CD ad GL; et ratio rectanguli BH, CD ad ipſum BD, CH compoſita eſt ex ratione HB ad BD, et ex ratione DC ad CH; erit ratio compoſita ex ratione KG ad BD, et ratione CD ad GL eadem ei quae compoſita eſt ex ratione HB ad BD, et ratione DC ad CH. Sed ratio KG ad BD compoſita eſt ex ratione KG ad HB, et ratione

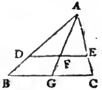
HB ad BD; ratio igitur composita ex ratione KG ad HB, et ratione HB ad BD, et insuper ex ratione CD ad GL eadem est ei quae composita est ex ratione HB ad BD, et ratione DC ad CH. Communis auferatur ratio HB ad BD, ergo reliqua ratio quae composita est ex ratione KG ad HB et ratione CD ad GL eadem est rationi DC ad CH, hoc est rationi compositae ex ratione DC ad GL, et ratione GL ad CH. Rursus communis auferatur ratio DC ad GL; reliqua igitur ratio KG ad HB eadem est rationi GL ad CH; igitur, permutando, ut KG ad GL, ita est BH ad HC. Sunt autem KL, BH inter se parallelae; ergo recta linea est quae per H, A, G puncta transit.*

PROP. XXVIII.

Quae est Prop. 137. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus undecimum in Porismata.

QUAE vero ad casus ipsius † pertinent similiter atque antedicta ostendemus quorum est conversum, videlicet, " Sit tri-

* Hoc ex sequenti Lemmate patebit, viz. Sit triangulum ABC, ipsique BC parallela ducatur DE, et sectae sint DE, BC in F, G in eadem ratione; erunt A, F, G puncta in recta linea.

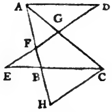


Quoniam est ut DF ad FE, ita BG ad GC, componendo, erit ut DE ad EF, ita BC ad CG; ut vero AE ad ED, ita AC ad CB; igitur ex aequali, ut AE ad EF, ita AC ad CG. Et parallelae sunt EF, CG; ergo in recta linea sunt A, F, G puncta.

† Prop. 137. Lib. 7. Pappi est casus Prop. 129. hoc est Prop. 17. hujus, in quo in tres rectas in eodem puncto convenientes, viz. AB, CA, AD ductae sunt duae ED, EC quarum una EC parallela est uni AD ex tribus; unde rect-

" angulum ABC, et ipſi BC parallela ducatur AD, et ducta " DE conveniat cum BC in puncto E, " et cum ipſis AB, AC " in F, G." Dico ut rectangulum ED, FG ad ipſum EF, GD, " ita eſſe CB ad BE."

Ducatur per C ipſi DE parallela CH, et AB ad H producatur; itaque quoniam eſt ut CA ad AG, ita CH ad GF, et ut CA ad AG, ita ED ad DG; erit ut ED ad DG, ita CH ad FG, ac propterea rectangulum CH, GD aequale eſt ipſi ED, FG. Sed aliud aliquod rectangulum eſt EF, GD; ergo ut rectangulum ED, FG ad ipſum EF, GD, ita rectangulum CH, GD ad ipſum EF, GD, hoc eſt ita CH ad EF, et ita CB ad BE. Ex quibus ſequitur ut rectangulum ED, FG ad rectangulum EF, GD, ita eſſe CB ad BE.



" Eadem ratione, et ſi ad alteras partes agatur parallela AD, atque" &c. uſque ad finem Propoſitionis apud Commandinum, ut ille textum Graecum reſtituendum et ſupplendum cenſet; haec omnino ſunt ſuperflua, ut et Commandini demonſtratio ad notam G in commentario ejus; etenim ſi in ejus figura 2da ponatur C ubi B, et B loco C, idem erit caſus, et eadem demonſtratio cum ea praecedentis; ut etiam ſi punctum E ſit inter B et C.

angulum contentum BC, et ſegmento inter E et occurſum ipſarum AD, EC eſt ad rectangulum contentum EB, et ſegmento inter C et eundem occurſum, ut recta CB ad ipſam BE.

PROP. XXIX.

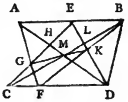
Quae eſt Prop. 138. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus duodecimum in Poriſmata.

HIS autem demonſtratis, nunc oſtendendum eſt, " Si parallelae ſint AB, CD, atque in ipſas incidant quaedam rectae " lineae AD, AF, BC, BF, " quarum AD, BC occurrant in " M," et EC, ED jungantur; rectam lineam eſſe quae per " G, M, K puncta tranſit."

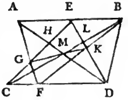
Hoc magis explicite enuntiatur ut ſequitur,

" SI inter duas parallelas AB, CD ducantur duae rectae lineae AD, BC, et a punctis A, B quae ſunt in una parallelarum inflectantur ad reliquam CD duae rectae AF, BF; et " a reliquis punctis C, D, ad AB inflectantur CE, DE; recta " linea GK quae tranſit per interſectiones G, K inflexarum " quae fiunt a rectis quae non inflectuntur a terminis ejuſdem ductae, verget ad punctum M interſectionem ſcilicet " ductarum AD, BC."

Quoniam enim triangulum eſt DAF, ipſique DF parallela eſt AE, et ducta eſt EC conveniens cum DF in C, et cum ipſis AF, AD in G, H, erit, per antecedens Lemma, ſc. Prop. 28. ut DF ad FC, ita rectangulum CE, GH ad ipſum CG, HE. Rurſus quoniam triangulum eſt CBF, et ipſi CD parallela eſt BE, ductaque eſt ED conveniens cum CF in D, et cum ipſis BC, BF in L, K; fiet ut CF ad FD, ita rectangulum DE, KL ad ipſum DK, LE,



et invertendo, ut DF ad FC, ita erit rectangulum DK, LE ad ipsum DE, KL. Sed ut DF ad FC, ita erat rectangulum CE, GH ad rectangulum CG, HE; ut igitur rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita est rectangulum DK, LE ad ipsum DE, KL. Itaque res deducta est ad decimum Lemma Pappi, sive Prop. 26. hujus, cum in duas rectas lineas CML, DMH, ductae sint duae rectae lineae EC, ED, et ut rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita sit rectangulum DK, LE ad ipsum DE, LK, erit recta linea quae per puncta G, M, K transit. Hoc enim demonstratum est.



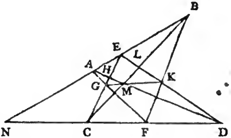
P R O P. XXX.

Quae est Prop. 139. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum tertium.

" SED non sint AB, CD parallelae, et in puncto N conveniant, reliquis ut in praecedente manentibus; Dico rursus rectam lineam esse, quae per G, M, K puncta transit."

Quoniam enim in tres rectas lineas AN, AF, AD, ab eodem puncto C ductae sint duae rectae lineae CE, CD, ut rect-
[a] Pr. 17. angulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita est [a] rectangulum NC, FD ad ipsum ND, CF. Rursus quoniam ab eodem puncto D in tres rectas lineas BN, BC, BF duae rectae lineae DF, DN ductae sunt, erit [a] ut rectangulum NC, FD ad ipsum ND, CF, ita rectangulum DK, LE ad ipsum DE, KL. Sed ut rect-

angulum NC, FD ad rectangulum ND, CF, ita demonstratum est rectangulum CE, GH ad ipsum CG,HE. Ut igitur rectangulum CE, GH ad ipsum CG, HE, ita est DK, LE ad rectangulum DE, KL. Et res deducta est ad idem quod in parallelis. Ergo ex jam dictis recta linea est quae per G, M, K transit.

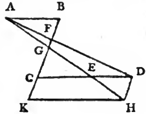


P R O P. XXXI.

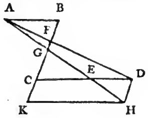
Quae est Prop. 140. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum quartum in Porismata. Est autem conversa Prop. 28. hujus.

" SIT AB parallela rectae CD, ducanturque AE, BC, et sit
" punctum F in recta linea BC, ita ut quam rationem habet
" DE ad EC, eandem habeat rectangulum CB, GF ad rect-
" angulum CG, FB. Dico rectam lineam esse quae per A, F,
" D puncta transit."

Ducatur per D quidem ipsi BC parallela DH, et producatur AE ad H; per H vero agatur HK ipsi CD parallela, et BC ad K producatur. Itaque quoniam ut DE ad EC, ita est rectangulum CB, GF ad ipsum CG, FB, ut autem DE ad EC, ita et DH ad CG et rectangulum DH, FB ad ipsum CG, FB; e-



rit rectangulum CB, GF aequale rectangulo DH, FB; ergo ut CB ad BF, ita DH, hoc eſt CK ad GF, et ob id tota KB ad totam BG eſt ut KC, hoc eſt DH ad GF. Sed ut KB ad BG, ita, in parallelis, eſt HA ad AG; quare HA ad AG eſt ut DH ad FG; et ſunt DH, FG parallelae; recta igitur linea eſt quae per A, F, D puncta tranſit.



P R O P. XXXII.

Quae eſt Prop. 141. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum quintum.

" HOC praemiſſo, ſit AB parallela rectae CD, et in ipſas in-
" cidant rectae lineae AF, FB; CE, ED; junganturque BC,
" GK " quae conveniant in M." Dico rectam lineam eſſe
" quae per A, M, D puncta tranſit."

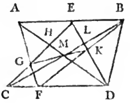
Hoc magis explicite ita enuntiatur.

" SIT AB parallela rectae CD, et a punctis A, B inflectantur
" ad CD rectae AF, BF; a punctis vero C, D ad AB inflec-
" tantur CE, DE, ſitque G interſectio ipſarum AF, CE, et K
" interſectio reliquarum BF, DE; et ducatur BC quae oc-
" currat junctae GK in M; erunt A, M, D puncta in recta
" linea."

Jungatur DM et ad H producatur; quoniam igitur a vertice B trianguli BCF ducta eſt BE parallela ipſi CD, et a puncto E in BE ducta eſt ED quae occurrat ipſi BC in L, ut CF ad

FD, ita eſt [a] rectangulum DE, KL ad ipſum DK, LE. Ut autem rectangulum DE, KL ad DK, LE, ita eſt [b] rectangulum CG, HE ad ipſum CE, GH, etenim in tres rectas lineas CL, DH, GK in eodem puncto M convenientes, ductae ſunt ab eodem puncto E duae rectae lineae EC, CD. Ergo, invertendo, ut DF ad FC, ita rectangulum CE, GH ad ipſum CG, HE. Quare ex praecedente, recta eſt linea quae per A, H, D puncta tranſit; eſt autem punctum M in recta DH, igitur et puncta A, M, D ſunt in recta linea.

[a] Pr. 28.
[b] Pr. 17.



Propoſitio 142. Lib. 7. Pappi, quae eſt Lemma ejus decimum ſextum, eadem omnino eſt cum Prop. ejus 136. aliam autem habet demonſtrationem, ut dictum fuit, quae jam tradita eſt in Prop. 27. hujus.

P R O P. XXXIII.

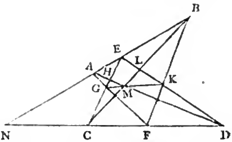
Quae eſt Prop. 143. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus decimum ſeptimum.

" SED non ſit AB parallela ipſi CD, conveniant autem in " puncto N; " caeteris ut in praecedente manentibus."

" Jungatur DM et ad H producatur;" quoniam igitur ab eodem puncto D in tres rectas lineas BN, BC, BF duae rectae lineae " DN, DE" ductae ſunt, ut rectangulum CF, DN ad rectangulum CN, FD, ita eſt [a] rectangulum DE, KL ad ipſum DK, LE. Sed ut rectangulum DE, KL ad DK, LE, ita [a]

[a] Pr. 17.

rectangulum CG, HE ad ipſum CE, GH; rurſus enim in tres rectas lineas CL, DH, GK in eodem puncto M convenientes, ductae ſunt duae rectae lineae EC, ED ab eodem puncto D. Ut igitur rectangulum CG, HE ad ipſum CE, GH, ita rectangulum CF, DN ad ipſum CN, DF. Igitur per Prop. 26. recta linea eſt quae per A, H, D, * et idcirco recta linea eſt quae per A, M, D puncta tranſit.



PROP. XXXIV.

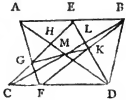
Quae eſt Poriſma, unum ſcilicet ex iis inter Poriſmata Lib. 1. Euclidis, quae Pappus tradit hiſce verbis, "Quod haec ad datum punctum vergit."

"SI tres rectae lineae in eodem puncto convenientes poſitione "datae ſint, et a duobus punctis datis in una earum, inflec-"tantur duae rectae ad aliam rectam poſitione datam, rec-"ta quae jungit duas interſectiones harum et duarum reli-"quarum ex tribus poſitione datis rectis, verget ad datum "punctum."

* Nam in duas rectas lineas AN, AF ductae ſunt ab eodem puncto C duae rectae CN, et CGE, et in ipſis ſumptae ſunt duo puncta D, H quae faciunt ultimo nominatam proportionem.

Positione datae sint tres rectae AF, BF, CFD in eodem puncto F convenientes, et in una earum data sint duo puncta C, D, a quibus ad quartam rectam AB positione datam inflectantur duae rectae CE, DE, et sint G, K duae ex intersectionibus ipsarum CE, DE, et rectarum AF, BF; juncta GK verget ad punctum datum.

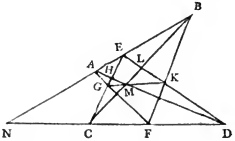
Primò, sit quarta recta AB parallela ipsi CD in qua data sunt duo puncta, et sint A, B intersectiones ipsius AB, et ipsarum FA, FB. Ad alteram ex ipsis, puta B, inflectantur a punctis C, D rectae CB, DB, et quoniam punctum B est intersectio ipsarum FB, DB, intersectio vero ipsarum FA, CB est in ipsa CB, erit CB recta quae jungit duas intersectiones inflexarum CB, DB et ipsarum FA, FB; igitur, ex hypothesi, CB vergit ad punctum datum. Rursus a punctis C, D ad AB inflectantur utcunque rectae CE,



DE, et sint G, K intersectiones ipsarum et rectarum FA, FB; ex hypothesi, igitur, juncta GK vergit ad punctum datum. Occurrat GK ipsi CB in M, igitur punctum M est illud quod Porisma datum esse affirmat, quod quidem patet ex Prop. 32. nam in ea ostensum est punctum M esse in recta AD, idem autem est in recta CB, et positione datae sunt AD, CB, data enim sunt puncta A, B, C, D; datum igitur est punctum M ad quod vergit recta GK.

Jungantur igitur AD, CB et conveniant in M, erit M punctum inveniendum; hoc est si ad AB inflectantur utcunque a punctis C, D rectae CE, DE, occurrantque ipsis FA, FB in G, K; erunt G, M, K puncta in recta linea, ut constat ex Prop. 29.

Sed non ſit AB parallela ipſi CD, reliquis ut in primo caſu manentibus, et ſit punctum M interſectio ipſarum CB, GK; erunt igitur A, M, D in recta linea per Prop. 33. et quoniam poſitione datae ſunt CB, AD rectae, datum erit punctum M. Si igitur utcunque inflectantur rectae CE, DE ad rectam AB a punctis C, D occurrantque ipſis FA, FB in G, K, verget juncta GK ad punctum M; puncta enim G, M, K ſunt in recta linea per Prop. 30.



Verum Poriſma hoc ope multo pauciorum Lemmatum ut ſequitur oſtendi poteſt.

PROP. XXXV.

" SI in duabus rectis parallelis AB, CD ſumantur duo puncta
" A, C, quorum A ſit in altera, et C in reliqua parallela, et
" ab ipſis ad quamvis rectam BD, quae parallelis occurrit,
" inflectantur duae rectae AE, CE; rectangulum GB, FD
" contentum ſegmentis parallelarum inter inflexas et rectam
" BD, aequale erit rectangulo AB, CD contentum earundem
" ſegmentis inter puncta A, C et eandem rectam."

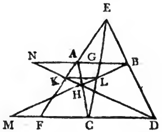
Ut enim AB ad BG, ita, propter parallelas, eſt FD ad DC. Rectangulum igitur GB, FD ipſi AB, CD eſt aequale.*

* Vide Fig. Prop. 36.

PROP. XXXVI.

" IISDEM manentibus, ſi praeterea a punctis B, D, in qui-
" bus recta BD parallelis occurrit inflectantur ad rectam quae
" per puncta A, C ducta eſt, aliae duae rectae BH, DH; ſit-
" que L interſectio alterius ipſarum BH quae inflexa eſt a
" puncto B in AB, et rectae CE quae inflexa eſt a puncto C in
" altera parallela CD, et ſit K interſectio reliquarum inflexa-
" rum DH, AE; juncta KL parallela erit rectis parallelis."

Occurrant inflexae BH, DH parallelis in M, N punctis; et quoniam a punctis B, D in rectis parallelis AB, CD inflexae ſunt ad rectam AC rectae BH, DH parallelis occurrentes in M, N, per Prop. 35. rectangulum AN, CM aequale erit rectangulo AB, CD, cui aequale oſtenſum fuit rectangulum GB, FD. Ut igitur FD ad NA, ita eſt MC ad GB, ergo, propter parallelas, ut DK ad KN, ita ML ad LB; et componendo, ut DN ad NK, ita MB ad BL; ut vero HN ad ND, ita eſt HB ad BM; igitur, ex aequali, ut HN ad NK, ita HB ad BL. Parallela igitur eſt KL rectae NB.



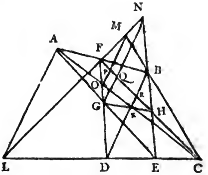
PROP. XXXVII.

" SI inter duas rectas lineas AB, CD ducantur duae rectae
" AC, BD, et a duobus harum terminis A, B, qui ſunt in al-
" tera rectarum AB, CD inflectantur ad reliquam CD duae

"rectae AE, BE; et a reliquis ductarum terminis C, D in-
"flectantur ad rectam AB duae aliae rectae CF, DF; recta li-
"nea quae transit per interfectiones duas inflexarum quae fi-
"unt a rectis quae non inflexae sunt a terminis ejusdem duc-
"tae, verget ad interfectionem ductarum."

Sit punctum G interſectio rectarum AE, DF, et H interſectio reliquarum inflexarum BE, CF, et ſit K interſectio ductarum AC, BD; recta erit linea quae per G, K, H puncta tranſit.

Jungatur BC, et per punctum A, terminum ſcilicet alterius ex ductis AC ducatur AL parallela reliquae ductae BD, occurratque ipſi CD in L; juncta vero LF conveniat cum CB in M et cum BE in N; ſit vero O interſectio rectarum AC, DF, et junctae OM, GN occurrant ipſi CF in P, Q punctis; denique eidem CF occurrat BD in R.



Quoniam igitur parallelae ſunt AL, BD, et a terminis ipſarum A, B inflexae ſunt AE, BE ad rectam CD, et a reliquis terminis L, D, ad rectam AB inflexae ſunt LF, DF, et ſunt G, N, ipſarum interſectiones, quae ſcilicet fiunt a rectis quae non inflexae ſunt a punctis in eadem parallela, erit, per praecedentem Propoſitionem, recta GN parallela ipſis AL, BD; et ſimiliter, quoniam a terminis A, B parallelarum inflexae ſunt ad

CD rectae AC, BC inflexis DF, LF occurrentes in O, M, erit recta OM parallela iisdem AL, BD, et propterea ipsi GN. Igitur, propter parallelas, est KR ad RB, ut (OP ad PM, hoc est ut) GQ ad QN; et permutando, ut KR ad GQ, ita (RB ad QN, et ita est) RH ad HQ. Et parallelae sunt KR, GQ; recta igitur est linea quae per H, K, G puncta transit.

Et ope hujus Propositionis praecedens 34ta ita ostenditur.

Positione datae sint tres rectae AE, BE, DEC in eodem puncto E convenientes, et in una earum data sint duo puncta C, D, a quibus ad quartam positione datam AB inflectantur duae rectae CF, DF, et sint G, H duae ex intersectionibus ipsarum CF, DF et rectarum AE, BE; juncta GH verget ad punctum datum.

Ad punctum enim B in quo conveniunt rectae AB, EB inflectantur rectae CB, DB, recta igitur DB quae transit per intersectiones rectarum DB, CB et ipsarum EA, EB, (nam intersectio ipsarum DB, EA est in recta DB, et intersectio ipsarum CB, EB est in puncto B,) vergit, ex hypothesi, ad punctum datum; rursus ad AB inflexis utcunque DF, CF, recta GH quae transit per intersectiones ipsarum et earundem EA, EB, vergit, ex hypothesi, ad idem datum punctum; occurrant DB, GH sibi mutuo in K, est igitur K punctum quod datum esse in Propositione dictum est; quod quidem verum est, quoniam enim inter rectas DG, HB ductae sunt GKH, DKB, et a terminis G, D ipsius DG inflexae sunt GE, DE ad ipsam HB; a terminis vero H, B ad DG inflexae sunt HF, BF, et est punctum A intersectio ipsarum GE, BF, et punctum C intersectio

[1] Pr. 37. reliquarum DE, HF; erit [1] recta linea quae tranſit per puncta A, K, C. Poſitione autem datae ſunt AC, DB, quare datum eſt punctum K ad quod vergit recta GH.

Jungantur igitur AC, BD et conveniant in K; erit K punctum inveniendum; hoc eſt ſi ad AB inflectantur utcunque a punctis C, D rectae CF, DF, occurrantque ipſis EA, EB in G, H; erunt G, K, H puncta in recta linea, ut conſtat ex Prop. 37.

Converſa Propoſitionis 34tae eſt haec quae ſequitur,

PROP. XXXVIII.

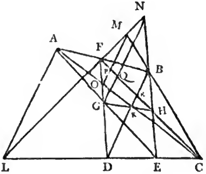
" POSITIONE datae ſint tres rectae lineae AE, BE, DEC in eo-
" dem puncto E convenientes, et in una earum data ſint duo
" puncta C, D, datumque extra ipſas ſit punctum K per quod
" ducta ſit utcunque recta linea GK quae ipſis EA, EB oc-
" currat in G, H; ſi jungantur CH, DG convenientes in F;
" tanget punctum F rectam poſitione datam."

Ut enuntiatio magis ſimilis ſit enuntiationi primae partis Propoſitionis Pappi de quatuor rectis, ita poteſt fieri, viz.

" SI quatuor rectae DC, GH, DF, CF ſibi mutuo occurrant,
" neque plures quam duae per idem punctum, et in una ea-
" rum data ſint duo puncta interſectionum D, C, et alia GH
" tranſeat per datum punctum K quod eſt extra rectam DC,
" hujus vero interſectiones G, H cum reliquis rectis DF, CF
" tangant rectas poſitione datas EA, EB quarum interſectio E
" eſt in recta DC; tanget punctum F rectam poſitione datam."

Jungatur DK quae ipſi EB occurat in B; et quoniam data ſunt puncta D, K, recta DB poſitione data eſt; et poſitione

data eſt EB, quare datum eſt punctum B. Per punctum K ducatur utcunque recta GH quae ipſis EA, EB occurrat in G, H, et junctae DG, CH occurrant in F, et juncta BF occurrat ipſi EA in A. Quoniam igitur inter rectas GD, HB ductae ſunt GKH, DKB, et a punctis G, D ad ipſam HB inflexae ſunt GE, DE; ab ipſis vero H, B ad rectam GD inflexae ſunt HF, BF, et ſunt puncta A, C interſectiones inflexarum quae non fiunt a rectis quae inflexae ſunt a terminis ejuſdem ductae, et eſt punctum K interſectio ductarum GH, DB; erunt A, K, C puncta in recta linea per Prop. 29. aut 30. Data autem ſunt K, C puncta, quare recta AC poſitione data eſt, et poſitione data eſt EA; datum igitur eſt punctum A, et datum eſt B; igitur recta AB quam tangit punctum F poſitione data eſt.



Jungatur igitur DK occurratque EB in B; et juncta CK ipſi EA occurrat in A; juncta AB erit recta quam tangit punctum F; hoc eſt ſi per punctum K ducatur quaevis GKH quae rectis EA, EB occurrat in G, H, et jungantur DG, CH convenientes in F, erit punctum F in recta AB. Quoniam enim inter duas rectas DC, GH ductae ſunt DG, CH, et a punctis D, C quae ſunt in una rectarum inflexae ſunt ad reliquam GH rectae DK, CK, et a punctis G, H in reliqua recta inflexae ſunt ad primam DC rectae GE, HE, et ſunt A, B in-

terſectiones inflexarum quae non fiunt a rectis quae inflexae ſunt a terminis ejuſdem ductae, verget juncta AB ad F interſectionem ductarum DG, CH, hoc eſt punctum F eſt in recta AB.

Et, manente eadem conſtructione, ſi a punctis C, D inflectantur ad AB rectae CF, DF quae ipſis EA, EB occurrant in G, H, recta erit linea quae tranſit per G, K, H puncta; quod quidem ex Prop. 37. manifeſtum eſt.

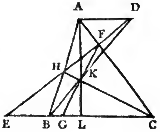
PROP. XXXIX.

Quae eſt Prop. 144. Lib. 7. Pappi, cujus enuntiatio magis diſtincta eſt reddita.

" SIT triangulum ABC, et ipſi BC parallela AD, et ducatur " utcunque DE quae occurrat ipſis AB, AC in F, H. Sit " autem in BC punctum G quod facit quadratum ex EB ad " rectangulum EC, CB, ut recta BG ad ipſam GC, et junga- " tur FG cui occurrat juncta BD in K; Dico rectam lineam " eſſe quae per puncta H, K, C tranſit."

Quoniam enim eſt ut quadratum ex EB ad rectangulum EC, CB, ita BG ad GC; communis addatur ratio CE ad EB, eadem ſcilicet quae eſt rectanguli EC, CB ad EB, BC rectangulum; erit " ratio compoſita ex ratione quadrati ex EB ad " rectangulum EC, CB, et ex ratione rectanguli EC, CB ad " ipſum EB, BC, hoc eſt" ratio quadrati ex EB ad rectangulum EB, BC, hoc eſt ratio rectae EB ad ipſam BC, eadem ei quae compoſita eſt ex rationibus BG ad GC et CE ad EB, quae eadem eſt rationi rectanguli BG, CE ad ipſum GC, EB. Ut

autem EB ad BC, ita eſt, per Prop. 26. hujus, rectangulum DF, HE ad ipſum DE, FH; ergo ut rectangulum BG, CE ad rectangulum GC, EB, ita eſt rectangulum DF, HE ad ipſum DE, FH. Igitur recta linea eſt quae per H, K, C puncta tranſit; hoc enim in iis quae ad converſum caſum pertinent demonſtratum eſt in Prop. 27. hujus. Nam in duas rectas lineas KB, KF ductae ſunt ab eodem puncto E duae rectae EBG, EFD et in ipſis ſumpta ſunt puncta H, C quae faciunt rectangulum BG, CE ad ipſum GC, EB, ut rectangulum DF, HE ad rectangulum DE, FH.



N. B. CONVERSA PROP. XXXIX. haec eſt.

" SIT triangulum ABC, et ſit AD parallela ipſi BC, ſi ducatur quaevis DFHE et jungantur BD, CH ſibi mutuo occurrentes in K, et juncta FK occurrat BC in G; erit quadratum ex EB ad rectangulum EC, CB, ut recta BG ad ipſam GC."

Nam quoniam AD parallela eſt rectae BC, et ducta eſt DFHE erit ut EB ad BC, ita rectangulum EH, FD ad rectangulum ED, HF per Prop. 28. Et quoniam in tres rectas lineas KB, KH, KF ab eodem puncto K ductas duae rectae lineae ED, EC ab eodem puncto ductae ſunt, erit rectangulum EC, BG ad rectangulum EB, GC, ut (rectangulum EH, FD ad ipſum ED, HF per Prop. 17. hoc eſt ut) recta EB ad ipſam

BC. Quoniam igitur recta EB eft ad rectam BC, ut rectangulum EC, BG ad ipfum EB, GC, communis addatur ratio EB ad EC, et ratio quadrati ex EB ad rectangulum EC, CB eadem erit (rationi compofitae ex ratione rectanguli EC, BG ad ipfum EB, GC et ex ratione rectae EB ad ipfam EC, hoc eft ratione rectanguli EB, GC ad ipfum EC, CG, hoc eft rationi) rectanguli EC, BG ad ipfum EC, CG, hoc eft rationi rectae BG ad rectam GC.

Demonftratio haec paulo magis explicita eft quam apud Pappum, addendo fcilicet quae habentur inter " commata inverfa; textus etiam Pappi apud Commandimum bis vitiofe habet rectangulum DE, FH, vice ipfius DF, HE, et contra, quae nunc correcta funt.

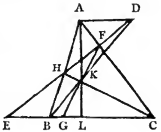
P R O P. XL.

Quae eft Porifma cui infervit praecedens Propofitio.

" SI fuerint quinque rectae AB, AC, AD, DE, EC quarum " primae tres in uno puncto A conveniunt, et duae ipfarum " AD, EC funt parallelae, in quarum una EC quae non tranfit " per punctum A data funt tria puncta interfectionum E, B, " C; reliquarum autem interfectionum A, D, F, H duae D, H " tangant rectas pofitione datas BK, CK quae tranfeunt per " duo ex datis punctis B, C; reliquae interfectiones A, F tan- " gent rectas pofitione datas."

Quoniam enim quatuor funt rectae EB, BA, AD, DE quarum duae EB, AD funt inter fe parallelae, et data funt duo puncta E, B in una parallelarum, reliquarum vero interfecti-

onum A, D, H, duae D, H tangunt rectas positione datas BK, CK, quarum una BK transit per unum ex punctis datis B; tanget reliqua intersectio A rectam positione datam, per casum 3. Prop. 8. hujus. Sit ea AK quae occurrat rectae EC in L. Igitur, ex ostensis in eo casu, erit EC ad CB, ut BC ad CL. Rursus quoniam quatuor sunt rectae EC, ED, DA, AC quarum duae EC, AD sunt inter se parallelae, et data sunt duo puncta E, C in una parallelarum, reliquarum vero intersectionum A, D, F, duae A, D tangunt rectas positione datas LK, BK; reliqua intersectio F tanget rectam positione datam per casum 4. sc. per art. ejus 3. Prop. 8. hujus. Sit ea FK, occurratque rectae EC in G. Et, ex ostensis in eo casu, erit EC ad BL, ut CG ad GL. Igitur puncta A, F tangunt rectas positione datas.

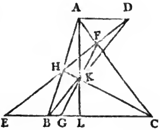


Componetur ita.

Fiat ut EC ad CB, ita BC ad CL, et jungatur LK, erit haec recta quam tangit punctum A, ut in casu 3. Prop. 8. ostensum est. Dein fiat ut EC ad BL, ita CG ad GL, et juncta GK erit recta quam tangit punctum F, ut ostensum est in art. 3. casus 4. Prop. 8. hujus.

Videtur autem Euclidem duas has constructiones in unam conjunxisse ad inveniendum punctum G, nimirum faciendo ut quadratum ex EB ad rectangulum EC, CB, ita recta BG ad ipsam GC. Hanc autem constructionem ex praedictis duabus derivari, ita ostendetur.

Quoniam eſt EC ad CB, ut BC ad CL, dividendo, erit EB ad BC, ut BL ad LC; et permutando, et per 1. 6. rurſusque permutando, ut quadratum ex EB ad rectangulum BC, CE, ita rectangulum EB, BL ad ipſum EC, CL. Et quoniam, in
[a] 19. 5. ſecunda conſtructione, fuit EC ad BL, ut CG ad GL, erit [a] EG ad GB, ut CG ad GL, et, dividendo, EB ad BG, ut CL ad LG. Rectangulum igitur EB, GL aequale eſt ipſi BG, LC. Et quoniam eſt EC ad BL, ut CG ad GL, invertendo, eſt BL ad EC, ut LG ad GC; quare permutando, et per 1. 6. rurſusque permutando, ut rectangulum EB, BL ad



rectangulum EC, CL, ita (rectangulum EB, LG ad ipſum LC, CG, hoc eſt ita rectangulum BG, LC ad ipſum LC, CG, et ita) eſt recta BG ad ipſam GC. Fuit autem quadratum ex EB ad rectangulum BC, CE, ut ipſum EB, BL ad EC, CL rectangulum; ut igitur quadratum ex EB ad rectangulum BC, CE, ita eſt recta BG ad ipſam GC.

Componetur ita.

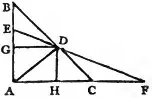
Invento igitur puncto G ex hac conſtructione, erit juncta GK recta quam tangit punctum F, hoc eſt ſi a punctis E, C inflectantur utcunque ad rectam GK rectae EF, CF, ſi a puncto D in quo recta EF ipſi BK occurrit, ducatur DA parallela ipſi EC, occurratque rectae CF in A, et juncta AB occurrat ipſi ED in H, erunt H, K, C puncta in recta linea per Prop. 39.

PROP. XLI.

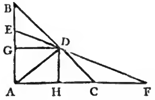
Quae eſt Poriſma, unum ſcilicet ex iis quae Pappus tradit inter Poriſmata Lib. 1. Euclidis, hiſce verbis "Quod recta ... aufert a poſitione datis ſegmenta datum rectangulum comprehendentia."

"DATIS poſitione duabus rectis, ſi a dato extra ipſas puncto ducatur utcunque recta linea, auferet ex poſitione datis ſegmenta datis in iis punctis adjacentia quae datum continent rectangulum."

Sint AB, AC rectae poſitione datae, et a dato puncto D ducatur utcunque recta BDC ipſis in B, C, occurrens; et puta Poriſma verum eſſe, ſcilicet ſegmenta BG, CH a recta BC abſciſſa datis punctis G, H adjacentia continere rectangulum BG, CH datum. Ducatur per punctum D quaevis alia recta EDF, et AD jungatur; igitur, ex hypotheſi, tum rectangulum EG, FH, tum rectangulum AG, AH aequalia ſunt eidem dato rectangulo, et propterea rectangulo BG, CH. Eſt igitur BG ad FH, ut EG ad CH, quare et BE ad FC, ut BG ad FH. Eſt etiam ut FH ad AG, ita AH ad EG, quare et FH ad AG, ut AF ad AE. Ratio vero BD ad DC, quoniam rectae AB, BC occurrunt ipſis AF, FE, eadem eſt, per Lemma ad finem Prop. 22. rationi compoſitae ex ratione BE ad EA, et ratione AF ad FC, hoc eſt rationi compoſitae ex ratione BE ad FC, et ratione AF ad EA, utraque enim ratio eadem eſt[a] ra- [a] 23. 6.



tioni rectanguli BE, AF ad rectangulum EA, FC; ratio igitur BD ad DC eadem eſt (rationi compoſitae ex ratione BE ad FC, et ratione AF ad AE, hoc eſt ex ratione BG ad FH, et FH ad AG, hoc eſt rationi) BG ad GA. Eſt igitur juncta GD parallela ipſi AF. Et quoniam rectangulum BG, HC aequale eſt ipſi AG, AH, eſt BG ad GA, hoc eſt BD ad DC, ut AH ad HC; parallela igitur eſt DH ipſi BA. Quoniam igitur



datum eſt punctum D, et eſt DG parallela poſitione datae AF, poſitione data eſt DG, et poſitione data eſt AB, datum igitur eſt punctum G. Similiter oſtendetur datum eſſe punctum H. Datum igitur eſt rectangulum GA, AH, et propterea ipſi aequale rectangulum BG, CH.

Componetur ita.

Per punctum D ducantur DG, DH parallelae ipſis AC, AB; erunt puncta G, H ea quae invenienda ſunt, et GA, AH erit rectangulum inveniendum. Ducatur enim per D quaevis recta BDC; et quoniam ut BG ad GD, ita DH ad HC, rectangulum BG, HC aequale eſt rectangulo GD, DH, hoc eſt ipſi HA, AG.

P R O P. XLII.

Quae eſt Prop. 148. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 22.

" SIT recta linea AB, et in ipſa ſumantur duo puncta C, D;
" ſitque quod bis AB, CD continetur aequale quadrato ex
" CB. Dico quadratum ex AD quadratis ex AC, DB aequale
" eſſe."

Quoniam enim quod bis continetur AB, CD eſt aequale quadrato ex CB; commune auferatur contentum bis BD, DC, erit reliquum, quod bis AD, DC continetur quadratis ex CD, DB aequale. Rurſus commune auferatur quadratum ex CD, reliquum igitur,



videlicet contentum bis AC, CD una cum quadrato ex CD aequale eſt ei quod fit ex DB quadrato. Commune addatur quadratum ex AC; ergo totum, quod ex AD quadratum, quadratis ex AC, DB aequale erit.

Et retrogradiendo oſtendetur Propoſitionis converſa.

PROP. XLIII.

Quae eſt Prop. 149. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 23.

" SIT rectangulum AB, BC aequale quadrato ex BD. Dico
" tria contingere, videlicet rectangulum quidem quod utra-
" que AD, DC, et BD continetur aequale eſſe rectangulo AD,
" DC; rectangulum vero contentum utraque AD, DC, et CB
" aequale eſſe quadrato ex DC; et rectangulum contentum
" utraque AD, DC, et AB, quadrato ex AD aequale."

Quoniam enim rectangulum AB, BC aequale eſt quadrato ex BD, erit, ob proportionem *, et tota ad totam †, et invertendo, componendoque, ut utraque CD, DA ad DA, ita CD ad DB. Rectangulum



igitur quod continetur utraque AD, DC et BD, rectangulo

* AB ad BD, ut DB ad BC. † AD ad DC, ut DB ad BC.

AD, DC eſt aequale. Rurſus quoniam tota AD ad totam DC, eſt ut DB ad BC, componendo, ut utraque AD, DC ad DC, ita erit DC ad CB. Quare rectangulum contentum utraque AD, DC, et CB aequale eſt quadrato ex DC. Rurſus quoniam tota AD ad totam DC, eſt ut AB ad BD, invertendo componendoque, erit ut utraque CD, DA ad DA, ita DA ad AB. Ergo rectangulum quod utraque AD, DC, et AB continetur aequale eſt quadrato ex AD.



P R O P. XLIV.

Quae eſt Prop. 150. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 24.

" SIT recta linea AB, et duo puncta C, D; ſitque quadratum " ex CD aequale ei quod bis AC, DB continetur. Dico et qua- " dratum ex AB quadratis ex AD, CB aequale eſſe."

Quoniam enim quadratum ex CD aequale eſt ei quod bis continetur AC, DB, erit contentum bis AC, CB aequale et quadrato ex CD, et ei quod bis AC, CD continetur. Commune addatur quadratum ex AC, ergo contentum bis AC, CB una cum quadrato ex AC aequale eſt quadrato ex AD. Rurſus commune addatur quadratum ex BC; totum igitur quadratum ex AB quadratis ex AD, CB aequale erit.



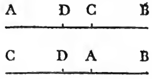
Et retrogradiendo oſtendetur converſa.

PROP. XLV.

Quae eſt Prop. 151. Lib 7. Pappi, et Lemma ejus 25.

" SIT rectangulum AB, BC aequale quadrato ex BD. Dico
" tria contingere, videlicet rectangulum quod exceſſu ipſa-
" rum AD, DC, et BD continetur aequale eſſe rectangulo AD,
" DC; rectangulum vero contentum exceſſu ipſarum AD, DC,
" et CB aequale eſſe quadrato ex DC; et rectangulum conten-
" tum exceſſu ipſarum AD, DC, et BA aequale eſſe quadrato
" ex AD."

Quoniam enim eſt ut AB ad BD, ita DB ad BC, erit reliqua ad reliquam, " viz. AD ad DC, ut AB ad BD," et dividendo, in fig. 1. vel dividendo inverſe in fig. 2. ut exceſſus ipſarum AD, DC ad DC, ita AD ad DB. Rectangulum igitur quod exceſſu ipſarum AD, DC et DB continetur eſt aequale rectangulo AD, DC. Rurſus



quoniam reliqua AD ad reliquam DC, eſt ut DB ad BC, dividendo, vel dividendo inverſe, erit ut exceſſus ipſarum AD, DC ad DC, ita DC ad CB. Ergo rectangulum contentum exceſſu ipſarum AD, DC et CB aequale eſt quadrato ex DC. Rurſus quoniam eſt ut AD ad DC, ita AB ad BD, erit, convertendo, ut AD ad exceſſum ipſarum AD, DC, ita AB ad AD. Quare rectangulum quod exceſſu ipſarum AD, DC et AB continetur, quadrato ex AD eſt aequale. Vel ſi BC major fuerit BA, ut in fig. 2. quoniam eſt AD ad DC, ut AB ad BD, idem ſequetur invertendo et dividendo.

Tertia haec demonſtrationis pars integra nunc tradita eſt; corrupta enim videtur eſſe in Graecis codicibus, ut eſt apud Commandinum, et inepte in ejus Commentario ad notam D explicata eſt.

P R O P. XLVI.

Quae non habetur apud Commandinum, ſed neceſſaria eſt Poriſmati ſequenti.

" SIT recta linea AB, et duo puncta C, D, quorum C eſt in " AB producta, D vero inter A, B puncta; ſitque quod bis AB, " DC continetur aequale quadrato ex AC, hoc eſt quadratis " ex AB, BC et rectangulo AB, BC bis; erit quadratum ex " DB aequale quadratis ex AD, BC."

Quoniam enim quod bis AB, DC continetur, hoc eſt quod bis AB, BD una cum eo quod bis AB, BC continetur aequale eſt quadrato ex AC, hoc eſt quadratis ex AB, BC et rectangulo AB, BC bis; auferatur commune quod bis AB, BC continetur, erit



reliquum, quod bis AB, BD continetur aequale quadratis ex AB, BC. Rurſus auferatur commune, rectangulum ſcilicet AD, DB bis una cum quadrato ex DB; erit reliquum quadratum ex DB aequale reliquo, quadratis ſcilicet ex AD, BC.

Et retrogradiendo oſtendetur converſa.

PROP. XLVII.

Quae eſt Poriſma cui utilis eſt Prop. 148. et Prop. 150. Lib. 7. Pappi.

" SI in recta linea AB ſumatur punctum C, vel inter A, B " puncta, vel in AB producta ad utraſvis partes; datum erit " in eadem recta quartum punctum D tale, ut in AB pro- " ducta ad partes B ſumpto quovis puncto E, quadratum ex " ſegmento inter ipſum et punctum inveniendum D, aequale " erit quadrato ex ſegmento inter idem punctum E et punc- " tum C, una cum quadrato ex ſegmento inter punctum in- " veniendum D et punctum A, et rectangulo a ſegmento in- " ter punctum E et punctum B, et data quadam recta."

CAS. 1. Quando punctum C eſt inter A, B puncta.

Puta verum eſſe Poriſma, ſitque D punctum, et F recta quae invenienda ſunt. Igitur ſi ſumatur utcunque punctum E in AB producta, erit, ex hypotheſi, quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, AD una cum rectangulo F, BE.



Rurſus ſumatur punctum B, vice puncti E, et, ex hypotheſi, quadratum ex DB aequale erit quadratis CB, AD. Igitur exceſſus quadrati ex DE ſupra quadratum ex DB aequalis erit exceſſui quadratorum ex CE, CB una cum rectangulo F, BE; hoc eſt, ſi fiat GD aequalis DB, et HC aequalis ipſi CB, erit [a] rectangulum GE, EB aequale rectangulo HE, EB una cum ipſo F, BE. Recta igitur GE aequalis eſt ipſis HE, F ſimul; et ablatâ communi HE, erit reliqua GH aequalis ipſi F. Quo-

[a] 6. 2.

niam vero GB dupla est DB, et HB dupla ipsius CB, erit et GH dupla ipsius DC, quare et recta F dupla est ejusdem DC. Et quoniam quadratum ex DB aequale est quadratis ex CB, AD, erit, per conversam Prop. 42. rectangulum AB, DC bis aequale quadrato ex AC. Datae autem sunt rectae AB, AC, data igitur est DC; et datum est punctum C, quare et punctum D datum est; est autem recta F dupla ipsius DC; data igitur est recta F. Quae erunt invenienda.

Componetur ita.

Fiat ut AB bis ad AC, ita AC ad CD quae ponatur a puncto C versus eas ipsius partes ad quas A est respectu puncti B; sumatur vero recta F dupla ipsius DC. Si in AB producta ad partes B sumatur utcunque punctum E, erit quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, AD una cum rectangulo F, BE. Est enim, ex constructione, rectangulum AB, DC bis aequale quadrato ex AC; igitur, per Prop. 42. quadratum ex DB aequale est quadratis ex CB, AD. Fiat GD aequalis DB, et HC aequalis ipsi CB; erit propterea GH aequalis ipsi DC bis, hoc est rectae F, quare GE aequalis erit ipsis HE, F simul; et rectangulum GE, EB hoc est ipsum DB, BE bis una cum quadrato ex BE aequale erit rectangulis HE, EB; F, EB
† † hoc est rectangulo CB, BE bis quadrato ex BE, et rectangulo F, BE. Est autem quadratum ex DB aequale quadratis
b 4. 2. ex CB, AD; additisque hisce aequalibus, erit [b] quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, AD et rectangulo F, EB.



Cor. Si autem sumatur punctum E non in AB producta versus partes B, sed vel inter A et B, vel in BA producta ad

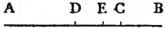
partes A, reliquis ut in Propoſitione manentibus; erit quadratum ex DE una cum rectangulo F, BE, ſive una cum ipſo DC, BE bis aequale quadratis ex CE, AD. Poteſt hoc eodem modo quo praecedens Poriſma inveſtigari; verum ex eo, ut ſequitur facile oſtenditur.

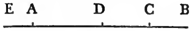
Cas. 1. Sit punctum E inter C, B puncta. Quoniam igitur in compoſitione praecedentis oſtenſum eſt quadratum ex DB aequale quadratis ex CB, AD, auferatur commune ex CB quadratum, erit quadratum ex DC una cum duplo rectangulo DC, CB aequale quadrato ex AD. Commune apponatur quadratum ex



CE, et totum, quadratum ſcilicet ex DC una cum rectangulo DC, CB bis et quadrato ex CE aequale erit toti, quadratis ſcilicet ex CE, AD; eſt autem [b] quadratum ex DC una cum rectangulo DC, CE bis et quadrato ex CE aequale quadrato ex DE. Quadratum igitur ex DE una cum rectangulo DC, EB bis aequale eſt quadratis ex CE, AD. [b] 4. 2.

Cas. 2. Sit punctum E inter puncta A, C, vel in CA producta ad partes A. Quoniam igitur in Caſ. 1. Cor. oſtenſum fuit quadratum ex DC una cum duplo rectangulo DC, CB et quadrato ex CE aequale quadratis ex CE, AD; eſt autem quadratum ex CD una cum quadrato ex CE aequale



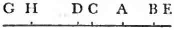


[a] quadrato ex DE una cum duplo rectangulo DC, CE; erit quadratum ex DE una cum rectangulis DC, CE; DC, CB bis [a] 7. 2.

ſumptis, hoc eſt una cum rectangulo DC, EB bis aequale quadratis ex CE, AD.

Cas. 2. Prop. 47. Quando punctum C eſt in BA producta ad partes A.

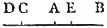
Oſtendetur prorſus ut in analyſi Caſ. 1. Propoſitionis, recta F dupla ipſius DC, et quadratum ex DB aequale quadratis ex DA, CB; quare per converſam Prop. 44. rectangulum DC, AB bis aequale erit quadrato ex CA; in recta enim DB ſumpta ſunt duo puncta C, A. Datae autem ſunt CA, AB, quare data eſt DC, et datum erit punctum D; data igitur eſt CD, et ipſius dupla recta F.



Componetur ita.

Fiat ut AB bis ad AC, ita AC ad CD quae ponatur a puncto C in AC producta ad partes C; ſumatur vero recta F aequalis ipſi DC bis. Si in AB producta ad partes B ſumatur utcunque punctum E, erit quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, DA una cum rectangulo F, BE. Eſt enim, ex conſtructione, rectangulum DC, AB bis aequale quadrato ex CA; ergo, per Prop. 44. quadratum ex DB aequale eſt quadratis ex DA, CB. Et reliqua compoſitio fiet iiſdem verbis quibus ea Caſ. 1. Propoſitionis.

Cor. Si autem ſumatur punctum E, vel inter C, B puncta, vel in recta BC producta ad partes C, reliquis manentibus; erit quadratum ex DE una cum rectangulo F, BE, ſive DC, BE bis, aequale quadratis ex DA, CE.



Cas. 1. Quando punctum E est inter C, B, iisdem verbis ostenditur quibus Cas. 1. praecedentis Corollarii.



Cas. 2. Quando punctum E est in BC producta ad partes C, iisdem verbis quibus Cas. 2. praecedentis Corollarii ostenditur.

Cas. 3. Prop. 47. Quando punctum C est in AB producta ad partes B.

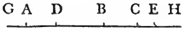
Primum, si recta CE major fuerit ipsâ CB, analysis fiet iisdem verbis quibus ea Cas. 1. hujus Propositionis; ut et compositio usque ad verba † " hoc est rectangulo CB, BE bis" &c. ad notam †.
vice quorum legatur, hoc est rectangulo CH, HE bis, quadrato ex HE, et rectangulo F, BE; est autem quadratum ex DB aequale quadratis ex BC, AD, sive ex CH, AD; totum igitur, quadratum scilicet ex DE aequale est toti, quadratis scilicet ex CE, AD et rectangulo F, BE. Idem autem ostendetur si fuerit CE aequalis ipsi CB.



Sed si recta CE minor fuerit ipsâ CB, quoniam, ex hypothesi, quadratum ex DE aequale est quadratis ex CE, AD et rectangulo F, BE; et, si punctum B sumatur vice ipsius E, est quadratum ex DB, ex hypothesi, aequale quadratis ex BC, AD, hoc est [a] si fiat CH aequalis ipsi CB, rectangulo BE, a 5. 2.
EH et quadratis ex EC, AD; igitur erit excessus quadratorum ex DE, DB aequale excessui rectanguli F, BE supra ip-



ſum BE, EH, hoc eſt, ſi fiat GD ipſi DB aequalis, erit rectangulum GE, EB aequale exceſſui rectanguli F, BE ſupra ipſum BE, EH. Eſt igitur rectangulum GH, BE aequale ipſi F, BE, quare recta GH aequalis eſt ipſi F. Et quoniam quadratum ex DB aequale eſt quadratis ex AD, BC, erit, per converſam Prop. 46. rectangulum AB, DC bis aequale quadrato ex AC. Datae autem ſunt AB, AC, data igitur eſt DC; et datum eſt punctum C, quare et D datum erit. Eſt autem recta F aequalis ipſi GH, hoc eſt (quoniam GB dupla eſt DB, et BH dupla ipſius BC) rectae DC bis. Igitur data eſt recta F.



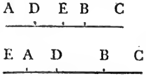
Componetur ita.

Fiat ut AB bis ad AC, ita AC ad CD quae ponatur a puncto C verſus A; ſumatur vero recta F dupla ipſius DC. Si in AB producta ſumatur punctum E, ita ut CE minor ſit ipſa CB, erit quadratum ex DE aequale quadratis ex CE, AD una cum rectangulo F, BE. Eſt enim, ex conſtructione, rectangulum AB, DC bis aequale quadrato ex AC; igitur, per Prop. 46. quadratum ex DB aequale eſt quadratis ex AD, BC. Fiat DG aequalis DB, et CH ipſi CB, eſt igitur GH aequalis ipſi DC bis, hoc eſt rectae F; quare rectangulum GH, BE hoc eſt rectangulum GE, EB una cum ipſo HE, EB, hoc eſt quadratum ex BE una cum rectangulo DB, BE bis et ipſo HE, EB aequale eſt rectangulo F, BE. Eſt autem quadratum ex DB aequale quadratis ex AD, BC; totum igitur, quadratum ſcilicet ex DE una cum rectangulo HE, EB aequale eſt toti, quadratis ſcilicet ex AD, BC una cum rectangulo F, BE. Aufe-

ratur commune rectangulum HE, EB, et quadratum ex DE aequale erit [a] quadratis ex AD, CE et rectangulo F, BE. [a] 5. 2.

Cor. Si autem ſumatur punctum E vel inter A, B puncta, vel in BA producta ad partes A; erit quadratum ex DE una cum rectangulo F, BE, hoc eſt una cum rectangulo DC, EB bis aequale quadratis ex AD, CE.

Quoniam enim oſtenſum eſt quadratum ex DB aequale quadratis ex AD, BC, commune apponatur quadratum ex EC, et quadrata ex DB, EC aequalia erunt quadratis ex AD, BC, EC; auferatur commune ex BC quadratum, et [b] quadrata ex [b] 4. 2. DB, EB una cum rectangulo EB, BC bis aequalia erunt quadratis ex AD, EC. Quadrata autem ex DB, EB aequalia ſunt [c] quadrato ex ED una [c] 7. 2. cum rectangulo EB, BD bis; igitur quadratum ex DE una cum rectangulis EB, BD et EB, BC bis, hoc eſt una cum rectangulo DC, EB bis aequale erit quadratis ex AD, EC.



P R O P. XLVIII.

Quae eſt Poriſma cui inſervit Prop. 149. et 151. Lib. 7. Pappi.

" DATIS in recta linea tribus punctis A, B, C quorum C eſt
" ad eaſdem partes puncti B ad quas eſt A; datum erit in ea-
" dem recta punctum quartum D quod faciet rectangulum
" AE, EC a ſegmentis inter punctum quodlibet E in AB pro-
" ducta ad partes B, et puncta A, C, vel a ſegmentis inter
" ipſum B, et eadem puncta A, C aequale quadrato ex ſeg-
" mento ED inter idem punctum E et punctum inveniendum

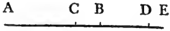
"D, una cum rectangulo a segmento EB inter punctum E et "reliquum datum punctum B, et datâ quâdam rectâ."

Hujus Porismatis duo sunt casus; duo enim sunt puncta D, duaeque rectae datae quae eidem satisfaciunt.

Cas. 1. Quando punctum inveniendum D est in AB producta ad partes B.

Puta Porisma verum esse, sitque D punctum inveniendum et F recta invenienda; et sumatur utcunque punctum E in AB producta ad partes B, vel in ipso B.

Primò, sit punctum E in AD producta ultra D; igitur, ex hypothesi, rectangulum AE, EC, hoc est rectangulum AE, CD una cum ipso AE, ED aequale erit quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE; et ablato communi ex DE quadrato, erit rectangulum AE, CD una cum ipso AD, DE aequale rectangulo F, BE. Rursus sumatur punctum B vice ipsius E, et, ex hypothesi, rectangulum AB, BC aequale erit quadrato ex BD; igitur, per primam partem Prop. 43. rectangulum AD, DC aequale erit contento utrâque AD, DC et ipsâ BD. Commune apponatur rectangulum CD, DE una cum ipso AD, DE, hoc est rectangulum quod utrâque AD, DC et DE continetur, erit totum, rectangulum scilicet AE, CD una cum ipso AD, DE aequale toti, rectangulo scilicet contento utrâque AD, DC et ipsâ BE. Ostensum autem fuit rectangulum AE, CD una cum ipso AD, DE aequale rectangulo F, BE, quod propterea aequale erit contento utrâque AD, DC et ipsâ BE. Est igitur recta F aequalis ipsis AD, DC simul. Et quoniam quadratum

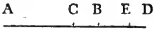


ex BD aequale est rectangulo dato AB, BC, datum erit punctum D; rectae igitur AD, DC datae sunt, quare data est recta F. Quae erant invenienda.

Componetur ita.

Inter AB, BC media proportionalis inveniatur BD, quae ponatur in AB producta ad partes B, et sumatur recta F aequalis ipsis AD, DC simul, sitque E punctum quodlibet in AD producta ultra D. Erit rectangulum AE, EC aequale quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE. Quoniam enim rectangulum AB, BC aequale est, ex constructione, quadrato ex BD, erit, per primam partem Prop. 43. rectangulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC et ipsâ BD. Igitur, ut in analysi ostensum, rectangulum AE, CD una cum ipso AD, DE aequale erit contento utrâque AD, DC et ipsâ BE. Commune addatur quadratum ex DE, et rectangulum AE, CD una cum ipso AE, ED, hoc est rectangulum AE, EC aequale erit quadrato ex DE una cum rectangulo contento utrâque AD, DC, hoc est rectâ F et ipsâ BE.

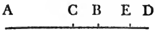
Secundò, sit punctum E inter puncta B, D; quoniam igitur, ex hypothesi, rectangulum AE, EC aequale est quadrato ex ED una cum rectangulo F, BE, commune apponatur rectangulum AE, ED, et rectangulum AE, CD aequale erit ipsi AD, DE una cum rectangulo F, BE. Ostendetur autem, ut in prima analysi, rectangulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC et ipsâ BD, igitur ablato communi rectangulo ED, DC, erit AE, CD rectangulum aequale rectangulo AD, DB una cum ipso CD, BE. Igitur, ex praemissis, rectangulum AD, DE una cum



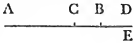
rectangulo F, BE aequale est rectangulo AD, DB una cum ipso CD, BE; commune auferatur rectangulum AD, DE, et reliquum rectangulum F, BE aequale erit reliquo, rectangulo scilicet AD, BE una cum ipso CD, BE. Igitur recta F aequalis est ipsis AD, DC. Punctum autem D et rectae AD, DC data ostendentur ut in prima analysi; data igitur est recta F.

Componetur ita.

Inveniantur rectae BD, F ut in priore compositione; et sumatur utcunque punctum E inter puncta B, D; igitur, ut in ea compositione ostensum, erit rectangulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC et ipsâ BD. Et quoniam in analysi hac secunda ostensum fuit rectangulum AE, CD aequale rectangulo AD, DB una cum ipso CD, BE, hoc est ipsis AD, BE; AD, DE et CD, BE; auferatur commune AE, ED, et reliquum AE, EC aequale erit reliquo, quadrato scilicet ex ED et rectangulo AD, BE una cum ipso CD, BE, hoc est quadrato ex ED et contento utrâque AD, DC et ipsâ BE, sive rectangulo F, BE.



Tertiò, cadat punctum E in ipsum D; igitur, ex hypothesi, rectangulum AD, DC, hoc est, ut in praemissis ostensum, rectangulum quod utrâque AD, DC et ipsâ BD sive BE continetur aequale est rectangulo F, BE; quare et in hoc casu recta F aequalis est ipsis AD, DC simul. Punctum autem D datum ostendetur ut in praemissis, et propterea data erit recta F.



Fiat autem eadem constructio quae prius facta fuit, et, ut in praecedentibus compositionibus ostensum fuit, erit rectan-

gulum AD, DC aequale contento utrâque AD, DC, et ipsâ BD, hoc eſt rectangulum AE, EC aequale erit rectangulo F, BE.

Cor. 1. Si punctum E ſumatur inter punctum D et illud punctorum C, A quod propius eſt ipſi B; vel in BA producta ultra AC, reliquis manentibus; erit rectangulum AE, EC una cum ipſo F, BE aequale quadrato ex ED.

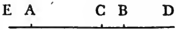
Cas. 1. Sit punctum E inter C, B puncta.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale eſt, ex conſtructione, quadrato ex BD, erit, per partem ſecundam Prop. 43. rectangulum contentum utrâque AD, DC et ipsâ CB aequale quadrato ex CD, hoc eſt erit rectangulum ab utrâque AD, DC et CE una cum eo ab utrâque AD, DC et EB aequale quadrato ex CD. Commune auferatur rectangulum DC, CE, erit reliquum, rectangulum ſcilicet AD, CE una cum eo ab utrâque AD, DC et EB aequale rectangulo CD, DE. Rurſus commune auferatur rectangulum CE, ED, reliquum, rectangulum ſcilicet AE, EC una cum eo ab utraque AD, DC et EB aequale erit quadrato ex ED; hoc eſt erit rectangulum AE, EC una cum ipſo F, BE aequale quadrato ex ED.

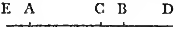


Cas. 2. Sit punctum E in BA producta ultra AC.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale eſt quadrato ex BD, erit, per tertiam partem Prop. 43. rectangulum ab utrâque AD, DC et AB aequale quadrato ex AD. Commune addatur rectangulum ab utrâque AD, DC et EA, erit totum rectan-

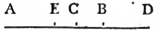


gulum ab utrâque AD, DC et EB aequale toti, rectangulo scilicet ED, DA et ipso EA, CD. Apponatur rursus commune rectangulum AE, EC, et totum, rectangulum scilicet AE, EC una cum eo ab utrâque AD, DC et EB aequale erit toti, rectangulo scilicet ED, DA una cum ipso DE, EA, hoc est quadrato ex ED. Rectangulum igitur AE, EC una cum ipso F, BE aequale est quadrato ex ED.



Cor. 2. Si punctum E sumatur inter puncta A, C, reliquis manentibus, erit rectangulum AE, EC una cum quadrato ex ED aequale rectangulo F, BE.

Quoniam, ut ostensum fuit in Cas. 1. praecedentis Corollarii, quadratum ex CD aequale est rectangulo ab utrâque AD, DC et CB, commune apponatur rectangulum ab utrâque AD, DC et EC, et totum, rectangulum scilicet AD, EC una cum ipso ED, DC, hoc est rectangulum AE, EC una cum DE, EC et ipso ED, DC, hoc est rectangulum AE, EC una cum quadrato ex ED aequale erit toti, rectangulo scilicet ab utrâque AD, DC et EB, hoc est rectangulo F, EB.



Et si punctum E cadat in A, erit quadratum ex AD sive ED aequale rectangulo F, AB sive F, EB. Quoniam enim quadratum ex CD aequale est rectangulo ab utrâque AD, DC et CB, commune apponatur rectangulum ab utrâque AD, DC et AC, et totum, rectangulum scilicet AD, AC una cum ipso AD, DC hoc est quadratum ex AD aequale erit



toti rectangulo ab utrâque AD, DC et AB, hoc est rectangulo F, AB.

Cas. 2. Prop. 48. Quando punctum inveniendum D est ad easdem partes puncti B ad quas est A.

Sit D punctum inveniendum, et F recta invenienda. Igitur sumpto utcunque puncto E in AB producta ad partes B, erit, ex hypothesi, rectangulum AE, EC aequale quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE. Sumatur rursus punctum B vice ipsius E, et, ex hypothesi, rectangulum AB, BC aequale erit quadrato ex DB. Igitur, per primam partem Prop. 45. rectangulum contentum excessu ipsarum AD, DC et ipsâ BD est aequale rectangulo AD, DC; et addito communi rectangulo BD, DC, erit rectangulum AD, DB aequale ipsi AB, DC. Quoniam vero rectangulum AE, EC aequale est quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE, hoc est rectangulo DE, EC una cum ED, DC et ipso F, BE; ablato communi rectangulo DE, EC, erit reliquum rectangulum AD, CE aequale reliquo, rectangulo scilicet ED, DC et ipsi F, BE. Commune apponatur rectangulum AD, DC, et totum rectangulum AD, DE aequale erit toti, rectangulo scilicet AE, DC et ipsi F, BE. Ostensum autem fuit rectangulum AD, DB aequale ipsi AB, DC; ablatis igitur hisce ex praecedentibus aequalibus, erit reliquum rectangulum AD, BE aequale reliquo, rectangulo scilicet DC, BE una cum ipso F, BE; quare recta AD aequalis est ipsis DC, F simul. Et quoniam quadratum ex DB aequale est dato rectangulo AB, BC, datum erit punctum D; quare rectae AD, DC et ipsa F datae erunt. Quae fuerunt invenienda.



Componetur ita.

Inter AB, BC media proportionalis inveniatur BD quae ponatur in AB ad partes A, et ſumatur recta F aequalis exceſſui ipſarum AD, DC; ſitque punctum E utcunque ſumptum in AB ultra B producta; erit rectangulum AE, EC aequale quadrato ex DE una cum rectangulo F, BE.

Quoniam exceſſus rectarum AD, DC aequalis eſt ipſi F, erit AD aequalis rectae DC una cum recta F, et rectangulum AD, DE aequale erit rectangulo CD, DE una cum ipſo F, DE. Eſt autem, ex conſtructione, rectangulum AB, BC aequale quadrato ex DB; igitur, per primam partem Prop. 45. rectangulum AD, DC aequale eſt (contento exceſſu ipſarum AD, DC et ipsâ DB, hoc eſt) rectangulo F, DB; et rectangulum AD, DE oſtenſum fuit aequale ipſi CD, DE una cum ipſo F, DE, ex quibus ablatis praecedentibus aequalibus, erit reliquum rectangulum AD, CE aequale reliquo, rectangulo ſcilicet CD, DE una cum ipſo F, BE. Commune apponatur rectangulum CE, ED, et totum rectangulum AE, EC aequale erit toti, quadrato ſcilicet ex DE una cum rectangulo F, BE.

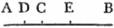


Cor. 1. Si inter puncta C, B ſumatur punctum E; vel ſi ſumatur E in BA producta ultra AC; reliquis manentibus. Erit rectangulum AE, EC una cum ipſo F, BE aequale quadrato ex DE.

Cas. 1. Quando punctum E eſt inter puncta C, B.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale eſt quadrato ex DB; erit, per partem ſecundam Prop. 45. rectangulum contentum exceſſu ipſarum AD, DC et ipſa CB, hoc eſt rectan-

gulum F, CB aequale quadrato ex DC; commune apponatur rectangulum ſcilicet DC, CE una cum ipſo AE, EC, erit totum, rectangulum ſcilicet F, CB una cum rectangulo DC, CE et ipſo AE, EC aequale toti, rectangulo ſcilicet ED, DC et ipſo AE, EC: eſt autem rectangulum F, CE una cum ipſo DC, CE aequale rectangulo AD, CE, quia



recta F una cum DC eſt aequalis rectae AD. Ablatis igitur aequalibus hiſce rectangulis ex praecedentibus, erit reliquum rectangulum F, EB una cum ipſo AE, EC aequale reliquo, rectangulo ſcilicet ED, DC et ipſo DE, EC, hoc eſt quadrato ex DE.

Cas. 2. Quando E eſt in BA producta ultra AC.

Quoniam rectangulum AB, BC aequale eſt quadrato ex DB, erit, per partem tertiam Prop. 45. rectangulum contentum exceſſu ipſarum AD, DC et ipsâ AB, hoc eſt rectangulum F, AB aequale quadrato ex AD. Commune apponatur rectangulum F, EA, erit F, EB rectangulum aequale quadrato ex AD una cum rect-

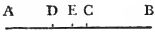


angulo ab exceſſu ipſarum AD, DC et EA. Rurſus commune addatur rectangulum EA, DC, erit EA, DC una cum F, EB rectangulo aequale quadrato ex AD una cum rectangulo EA, AD, hoc eſt rectangulo ED, DA. Addatur commune rectangulum DE, EA, erit rectangulum AE, EC una cum ipſo F, EB aequale quadrato ex ED.

Cor. 2. Si inter puncta A, C ſumatur punctum E, erit rectangulum AE, EC una cum quadrato ex DE aequale rectangulo F, EB.

Cas. 1. Quando E eſt inter C, D puncta.

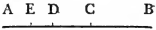
Quoniam oſtenſum fuit in Caſ. 1. Cor. 1. quadratum ex DC, hoc eſt rectangulum DC, CE una cum ipſo CD, DE aequale contento exceſſu ipſarum AD, DC, hoc eſt rectâ F et ipsâ CB; eſt autem rectangulum AD, EC aequale ipſi DC, CE una cum F, EC, quia recta AD aequalis eſt ipſis DC, F ſimul; aequalibus hiſce additis, erit rectangulum AC, CE una cum ipſo CD, DE



aequale rectangulo DC, CE una cum ipſo F, EB. Auferatur commune DC, CE, et reliquum, rectangulum ſcilicet AE, EC una cum quadrato ex DE aequale erit rectangulo F, EB.

Cas. 2. Quando punctum E eſt inter A, D puncta.

Quoniam in Caſu 1. Cor. 1. quadratum ex DC aequale oſtenſum fuit rectangulo F, CB, eſt autem rectangulum AD, EC aequale ipſi DC, CE una cum F, EC; aequalibus hiſce additis, erit quadratum ex DC una cum rectangulo AD, EC aequale ipſi DC, CE una cum rectangulo F, EB; auferatur commune, quadratum



ſcilicet ex DC una cum rectangulo ED, DC, hoc eſt rectangulum DC, CE; et reliquum rectangulum AE, EC una cum quadrato ex ED aequale erit rectangulo F, EB.

In praecedente Propoſitione et ejuſdem Corollariis punctum C poſitum eſt inter puncta A, B; ſi vero punctum A ponatur inter puncta C, B, eaedem demonſtrationes huic Caſui inſervient ſi ubique legatur A pro C, et C pro A in iiſdem.

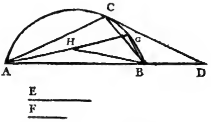
Poſſunt haec duo ultima Poriſmata ſolvi ſine ope Lemmatum Pappi, ſed minus eleganter.

PROP. XLIX.

Quae eſt Prop. 155. Lib. 7. Pappi.

" Circuli ſegmento dato in recta linea AB, inflectere ACB " in data ratione."

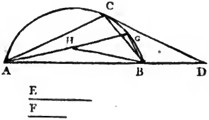
Factum jam ſit, et a puncto C ducatur recta linea contingens, quae ſit CD. " Eſt igitur AD ad DC, ut CD ad DB, " quare [a] quadratum ex AD eſt ad quadratum ex DC, ut AD [a] 2. cor. 20. 6. " ad DB. Quoniam vero angulus BCD aequalis eſt angulo " BAC in ſegmento oppoſito [b], aequiangula ſunt ADC, CDB [b] 32. 3. " triangula;" ut igitur quadratum ex AC ad quadratum CB, ita eſt (quaratum ex AD ad illud ex DC, et ita eſt) recta linea AD ad ipſam DB. Ratio autem quadrati ex AC ad illud ex CB eſt data, igitur et ratio rectae AD ad ipſam DB data erit; et data ſunt duo puncta A, B, ergo datum eſt D, " et contingens DC, punc- " tumque C data erunt; quare et ipſae AC, BC poſitione da- " tae ſunt."



Componetur autem Problema hoc modo.

Sit ACB quidem ſegmentum circuli datum, data autem ratio ſit ea quam habet E ad F. Fiat ut quadratum ex E ad quadratum ex F, ita AD ad DB, et ducatur contingens DC, et AC, CB jungantur. Dico rectas lineas AC, CB Problema efficere.

Quoniam enim ut quadratum ex E ad quadratum ex F, ita eſt AD ad DB; ut autem AD ad DB, ita quadratum ex AC ad quadratum ex CB, quia CD circulum contingit; erit ut quadratum ex E ad quadratum ex F, ita quadratum ex AC ad illud ex CB. Quare et ut E ad F, ita AC ad CB; ergo inflexa ACB Problema efficit.



Hanc Propoſitionem, quae in Graeco textu corrupta eſt, in loco uno et altero bene reſtituit Commandinus in commentario ad literas C, E in margine; in eo autem qui habetur ad literam D, ex Graecis καὶ ἔστι δύο δοθέν non recte delendum putat verbum δύο, hoc enim ſignificatur duo puncta A, B, data eſſe.

Problema autem facilius quam apud Pappum ſolvetur ut ſequitur.

[a] 92. Dat. in nova edit. Quoniam AB baſis ſegmenti data eſt, datus erit [a] angulus ACB, et, ex hypotheſi, data eſt ratio AC ad CB; triangulum igitur ACB ſpecie datum eſt [b], quare datus eſt angulus ABC, et recta BC poſitione data erit. Datum igitur eſt punctum C in quo BC circumferentiae poſitione datae occurrit.

[b] 44. Dat.

Componetur ita.

Ducantur AG, BG utcunque ad circumferentiam, et ut E ad F, ita fiat HG ad GB, et BH jungatur; angulo autem GBH aequalis fiat angulus ABC, et AC jungatur. Erit AC ad CB, ut E ad F. Quoniam enim angulus ABC aequalis eſt angulo GBH, et eſt ACB angulus ipſi AGB in eodem ſegmen-

to aequalis, triangulum ACB aequiangulum erit ipſi HGB; ut igitur AC ad CB, ita eſt (HG ad GB, et ita eſt) E ad F.

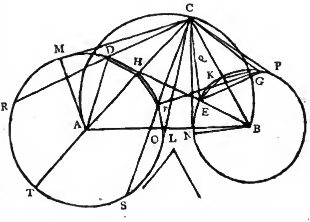
Problema hoc inſervit conſtructioni Poriſmatis ſequentis, quod quidem Poriſma videtur antepenultimum eſſe Lib. 3. Euclidis, et hiſce verbis nimis breviter apud Pappum deſcriptum eſt, viz.

"Ὅτι ἐστὶ τὶ δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνυμέναι ἐπὶ τόδε * δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον.

Deſcriptio haec mutila certe, et forſan corrupta, ita ſupplenda et explicanda videtur, ut in Propoſitione ſequente.

PROP. L.

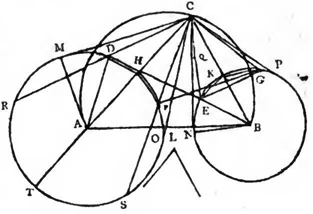
"DATIS poſitione duobus circulis, datum erit punctum a "quo ſi ad circumferentias circulorum ducantur duae rectae "angulum dato angulo aequalem comprehendentes, conti- "nebunt hae una cum recta ipſarum terminos jungente, tri- "angulum ſpecie datum."



Sint A, B centra circulorum, et puta C eſſe punctum inveniendum; igitur ſi ducantur CD, CE ad circumferentias, vel convexas, vel con-

* Forſan τόνδε ſc. κύκλον.

cavas, datum angulum comprehendentes, et jungatur DE, ſpecie datum erit triangulum DCE. Similiter, ſi ducantur aliae duae CF, CG angulum aequalem ipſi DCE comprehendentes, junctâ FG, ſpecie datum erit triangulum FCG. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula DCE, FCG, ut DC ad CE, ita eſt FC ad CG, et permutando; et quoniam aequales ſunt DCE, FCG anguli, aequales erunt et anguli DCF, ECG, et circa ipſos latera ſunt



a 6. 6. proportionalia. Aequiangulum igitur [a] eſt triangulum DCF ipſi ECG, et angulus CFD propterea aequalis eſt ipſi CGE. Jungatur AC, occurratque circumferentiae in H; ad circumferentiam vero circuli cujus centrum eſt B, ducatur CK faciens angulum HCK aequalem angulo DCE, et jungantur FH, GK, DH, EK; igitur, ut in praemiſſis, oſtendetur triangulum CHF ſimile ipſi CKG, ut et triangulum CDH ſimile ipſi CEK; quare aequales ſunt anguli CFH, CGK, et aequales oſtenſi ſunt CFD, CGE; igitur et anguli DFH, EGK. Jungantur AD, BE, BK, erunt anguli ad centra DAH, EBK, dupli ſcilicet aequalium DFH, EGK, inter ſe aequales. Anguli igitur AHD, BKE ad baſes triangulorum iſoſcelium ADH,

BEK aequales ſunt; et quoniam ſimilia ſunt CDH, CEK triangula, aequales ſunt anguli CHD, CKE; ergo anguli AHD, CHD ſimul aequales ſunt angulis BKE, CKE ſimul; eſt autem AHC recta linea, igitur [b] et recta eſt BKC. Et quoniam in triangulis ADC, BEC aequales ſunt anguli DAC, EBC, ut et DCA, ECB, erit ut AC ad AD, ita BC ad BE, et permutando; datae autem ſunt AD, BE, quare et ratio AC ad BC data eſt; et datus eſt angulus ACB, ſpecie igitur [c] datum eſt triangulum ABC. Et quoniam dati ſunt anguli BAC, ABC et data eſt recta AB poſitione, datae erunt AC, BC poſitione; datum igitur eſt punctum C. Quoniam vero eſt DC ad CE, ut AC ad CB, et aequales ſunt DCE, ACB anguli, erit triangulum DCE ſimile ipſi ACB quod datum eſſe ſpecie oſtenſum eſt. Quae fuerunt oſtendenda.

[b] 14. 1.

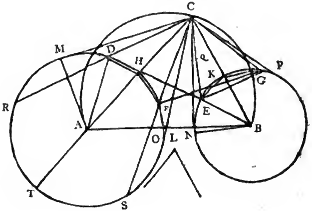
[c] 44. Dat.

Componetur ita.

Sint A, B centra circulorum qui poſitione dati ſunt, ſitque angulus ad L datus; jungatur AB et ſuper eâ deſcribatur ſegmentum circuli capiens angulum aequalem angulo ad L, et, per Problema praecedens, ducantur AC, BC ad ſegmenti circumferentiam quae habeant datam rationem quam habet ea quae eſt a centro circuli A ad eam quae eſt a centro B; erit C punctum inveniendum. Hoc eſt ſi a puncto C ducatur utcunque CD ad circumferentiam cujus centrum eſt A, et ab eodem ducatur alia recta CQ faciens cum CD angulum ipſi ACB, ſive dato angulo ad L, aequalem, occurret CQ circumferentiae cujus centrum eſt B in puncto quodam E quod faciet triangulum DCE ſimile triangulo ACB.

Ducantur enim a puncto C rectae CM, CN circulos contingentes ex una parte, et CO, CP ex altera, et jungantur AM,

BN. Quoniam igitur, ex constructione, est AC ad BC, ut AM
d 7. 6. quae est a centro A ad BN quae est a centro B, erunt [d] triangula rectangula AMC, BNC aequiangula; aequales igitur sunt anguli ACM, BCN, et propterea anguli MCN, ACB sunt aequales. Similiter aequales ostendentur OCP, ACB anguli; aequales igitur sunt anguli MCN, OCP. Quoniam igitur recta CD cadit intra angulum MCO, recta CQ quae facit angulum DCQ aequalem ipsi ACB, hoc est ipsi MCN, sive OCP ne-



cessario cadet intra angulum NCP, quare et circumferentiae necessario occurret. Occurrat in E quae sit ad eandem circumferentiae partem ad quam est D, convexam scilicet aut concavam, et jungantur AD, BE. Quoniam igitur aequales sunt ACB, DCE anguli, aequales erunt ACD, BCE, et, ex constructione, est AC ad CB, ut AD ad BE, et, permutando, AC ad AD, ut CB ad BE, et reliqui anguli ADC, BEC, propter circulum, sunt simul vel majores, vel non majores angulo recto, aequiangula igitur erunt [d] ADC, BEC triangula. Ut

igitur AC ad CD, ita BC ad CE, et permutando; et quoniam aequales ſunt anguli ACB, DCE, erit triangulum DCE ſimile ipſi ACB.

Cor. Et ope hujus ſolvetur Poriſma ſequens, quod mihi ut Problema propoſuit D. Gulielmus Trail, adoleſcens egregius, qui pro aetate multum in matheſi profecit.

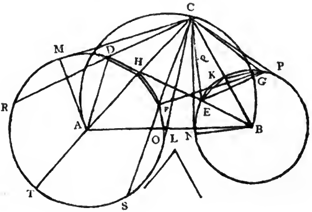
Porisma. "Datis poſitione duobus circulis DHF, EKG "quorum centra A, B; datum erit punctum a quo ſi ad circumferentias ducantur duae rectae angulum dato angulo "aequalem comprehendentes, continebunt hae una cum recta quae ipſorum terminos jungit, quorum unus ſit in concava, altera in convexa circumferentia, triangulum magnitudine datum."

Puta C eſſe punctum inveniendum; igitur ſi ducantur CR, CE ad circumferentias datum facientes angulum, et jungatur RE, magnitudine datum erit, ex hypotheſi, triangulum CRE. Et quoniam datus eſt angulus RCE trianguli CRE, rectangulum RC, CE datam habebit rationem ad triangulum CRE per Cor. Prop. 62. Dat. edit. Glaſg. et datum magnitudine eſt triangulum, quare rectangulum RC, CE datum eſt.

Similiter ſi ducantur aliae duae rectae CS, CG, datum oſtendetur rectangulum SC, CG, quod propterea aequale eſt ipſi RC, CE; eſt igitur SC ad CR, ut EC ad CG. Occurrat RC circumferentiae rurſus in D, et SC eidem in F, et propter circulum erit SC ad CR, ut CD ad CF; quare ut DC ad CF, ita eſt EC ad CG. Oſtendetur autem, ut in hac Propoſitione, eſſe AC ad CB, ut AD ad BE, et datum eſſe punctum C.

Componetur ita.

Inveniatur punctum C ut in hac Propositione, et occurrat AC circumferentiae concavae in T, et BC convexae in K; si a puncto C ducantur utcunque duae rectae CR, CE, una ad concavam, altera ad convexam circumferentiam, et jungatur RE, ut et TK, triangulum RCE aequale erit triangulo dato TCK. Occurrat TC circumferentiae rursus in H, et, per Propositionem hanc, similia erunt triangula DCE, HCK; ut igi-



tur DC ad CH, ita EC ad CK, sed ut DC ad CH, ita propter circulum est TC ad CR, est igitur TC ad CR, ut EC ad CK; quare rectangulum RC, CE aequale est ipsi TC, CK. Quoniam vero aequales sunt anguli RCE, TCK, erit ut rectangulum RC, CE ad triangulum RCE, ita rectangulum TCK ad triangulum TCK; aequalia autem ostensa sunt rectangula, igitur triangulum RCE est aequale dato triangulo TCK. Q. E. D.

5to Januarii, 1767.

PROP. LI.

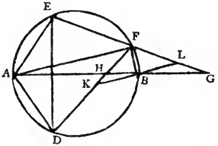
Quae est Prop. 156. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 30.

" SIT circulus cujus diameter AB, et a quovis puncto circumferentiae D ad ipsam perpendicularis agatur DE, ducaturque utcunque DF circumferentiae rursus occurrens in F, et ipsi AB in H; juncta vero EF producatur ut cum diametro in puncto G conveniat. Dico ut AG ad GB, ita esse AH ad HB.

Jungantur enim DA, AE, AF; et quoniam DE perpendicularis est ad diametrum, erit angulus DAB aequalis [a] angulo BAE; sed angulus quidem DAB aequalis est angulo HFB in eodem segmento, angulus vero BAE aequalis [b] angulo BFG exteriori scilicet quadrilateri AEFB in circulo. Angulus igitur HFB angulo BFG est aequalis; atque est angulus AFB in semicirculo rectus. Ergo, ex lemmate, ut AG ad GB, ita est AH ad HB.

[a] 3.3. et 4.1.

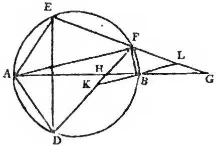
[b] 22. 3.



Lemma hoc non extat apud Pappum, est vero Propositio quae conversa est Prop. 52. Lib. 6. Pappi, et a Commandino in Commentario ad eam Propositionem demonstrata habetur ut sequitur, paucis mutatis.

Per punctum B ducatur KL parallela ipsi AF, occurratque rectis FH, FG in K, L; quoniam igitur rectus est angulus

AFB, recti erunt FBK, FBL, et aequales sunt anguli KFB, BFL, igitur recta KB aequalis [a] est ipsi BL. Est autem AG ad GB, ut (AF ad BL, sive KB, hoc est ut) AH ad HB. Et contra, si hoc fuerit, ostendetur KB aequalis BL, et propterea angulus KFB aequalis ipsi BFG.



a 26. 1.

Cor. Hinc si datum fuerit punctum H, reliquis ut in Propositione manentibus, datum erit G, et contra; circulo sc. positione dato.

PROP. LII.

" SI a puncto E ducantur ad circulum BCD rectae EFH, EKG
" abscindentes aequales circumferentias FH, KG, erunt ductae EH, EG, ut et EF, EK inter se aequales. Et si aequales
" fuerint EH, EG, vel EF, EK; abscindent aequales circumferentias FH, KG."

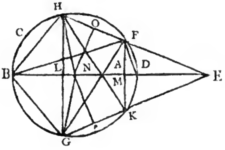
Primò, sint circumferentiae FH, KG aequales; erit igitur recta FH aequalis ipsi KG; quare perpendiculares NO, NP ductae a centro N ad ipsas aequales erunt [a]. Recta igitur EO aequalis erit [b] ipsi EP; et aequales sunt OH, PG; igitur et EH, EG, ut et EF, EK sunt inter se aequales.

a 14. 3.
b 47. 1.

Et si aequales fuerint EH, EG, abscindent aequales cir-

cumferentias FH, KG. Ductis enim a centro rectis NH, NG, erunt [c], in triangulis HNE, GNE, anguli NEH, NEG aequales; quare in triangulis rectangulis ENO, ENP aequales erunt [d] rectae NO, NP. Rectae igitur [a] FH, GK, et circumferentiae quas abscindunt aequales erunt.

[c] 8. 1.
[d] 26. 1.
[a] 14. 3.



Sunt duae hae Propositiones Lemmata ad Porisma penultimum Lib. 3. Porismatum Euclidis, quod in textu Graeco praefationis Pappi Alexandrini ad Librum ejus 7. quem praefixit clariss. Halleius editioni suae Apollonii de Sectione Rationis, Oxonii anno 1706. impressae, his verbis continetur, viz.

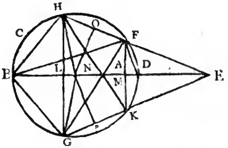
Ὅτι ἐστὶ τὶ δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας.

Porisma hisce verbis breviter et obscure nimis descriptum, non parva indagine, ita explicandum inveni, scilicet,

P R O P. LIII.

" DATO puncto intra vel extra circulum positione datum, si
" per illud ducatur utcunque recta linea circulo occurrens;
" datum erit aliud punctum a quo si ad puncta in quibus
" ducta circumferentiae occurrit, ducantur duae rectae li-
" neae, abscindent hae a circulo circumferentias aequales."

Puta verum eſſe Poriſma; et datum ſit punctum A intra vel extra circulum poſitione datum BCD; ſitque E punctum inveniendum, tale ſcilicet, ut per A ductâ ad circulum quâvis recta FAG, junctisque EF, EG circumferentiae rurſus in H, K occurrentibus, ſint inter ſe aequales circumferentiae FH, KG. Jungatur KA, et quoniam KA tranſit per datum punctum A, et ducta eſt EKG abſcindens circumferentiam KG, neceſſe eſt, ex hypotheſi, rectam ab E ductam ad punctum in quo KA circumferentiae rurſus occurrit abſcindere circumferentiam aequalem ipſi KG, hoc eſt circumferentiae FH. Patet vero ex 8, et 29, 3. nullam rectam praeter ipſam EFH poſſe abſcindere circumferentiam ad partes C circuli aequalem ipſi FH; tranſit igitur recta KA per punctum H. Quoniam vero circumferentiae FH, GK ſunt inter ſe aequales, junctis FK, HG, erit angulus HGF aequalis ipſi GFK; et ſunt alterni, quare parallelae ſunt FK, HG. Eſt igitur GA ad AF, ut (GH ad KF, hoc eſt ut) GE ad EK. Quoniam vero rectae EFH, EKG aequales abſcindunt circumferentias, erit, per Prop. 52. recta EK aequalis ipſi EF. Ut igitur GA ad AF, ita



[a] 3. 6. eſt GE ad EF; quare juncta EA bifariam [a] ſecat angulum FEK. Occurrat FK ipſi AE in M, et quoniam FE, EM aequales ſunt ipſis KE, EM, et aequales continent angulos, recta
[b] 4. 1 EM bifariam et ad rectos angulos ſecabit [b] ipſam FK, ut et

GH, quare et per centrum circuli tranſibit. Occurrat EA circumferentiae in B, D punctis; et quoniam HG perpendicularis eſt ad diametrum BD, et ductae ſunt rectae GAF, HFE, erit, per Prop. 51. ut BE ad ED, ita BA ad AD; datae autem ſunt BA, AD, quare data eſt ratio BE ad ED; et data eſt BD magnitudine, quare et DE magnitudine data eſt, ſed et poſitione, datum enim eſt centrum circuli, datumque eſt punctum A in recta BDE; datum igitur eſt punctum E. Quod fuit inveniendum.

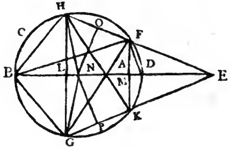
Componetur vero ita.

Per datum punctum A ducatur diameter BAD, et in ea ſumatur punctum E quod faciet BE ad ED, ut BA ad AD; erit E punctum inveniendum; hoc eſt ſi per A ducatur quaevis recta circumferentiae occurrens in F, G punctis, et jungantur EF, EG eidem in H, K rurſus occurrentes; erunt circumferentiae FH, GK inter ſe aequales.

Jungantur enim BF, FD; angulus igitur BFD in ſemicirculo rectus eſt; et quoniam ut BE ad ED, ita eſt BA ad AD, erunt, per converſam Lemmatis ad finem Prop. 51. anguli AFD, DFE inter ſe aequales; ſunt igitur anguli DFE, BFA ſimul aequales angulo recto BFD, et ſunt anguli DFE, BFH ſimul aequales angulo recto; aequales igitur ſunt anguli BFA, BFH; quare, ductis NH, NG a centro N, erunt anguli ad centrum BNH, BNG aequales, et propterea qui ipſis ſunt deinceps anguli HNE, GNE ſunt aequales inter ſe. In triangulis igitur HNE, GNE, baſis HE baſi GE aequalis eſt[b]; rectae igitur EH, EG aequales abſcindunt circumferentias FH, KG, per Prop. 52. b 4. 1.

Cor. 1. Si a puncto E ducantur duae rectae EFH, EKG ad circulum BCD, abscindentes aequales circumferentias FH, KG, et juncta FG, vel HK occurrat diametro BD quae per E transit in A; erit BE ad ED, ut BA ad AD. Et si datus fuerit circulus positione, datumque sit alterum ex punctis A, E, puta E; datum erit et reliquum A; et propterea FG verget ad punctum datum.

Jungatur enim GH, cui occurrat BE in L, sitque N centrum, et jungantur NG, NH. Quoniam igitur EH, EG aequales abscindunt circumferentias, erit EH aequalis ipsi EG, per Prop. 52. igitur in triangulis HEN, GEN aequales



a 8. 1. sunt [a] anguli NEH, NEG; quare in triangulis LEH, LEG aequales et recti sunt

b 4. 1. [b] anguli HLE, GLE. Quoniam igitur HG perpendicularis est ad diametrum BD, et ductae sunt GAF HFE, erit BE ad ED, ut BA ad AD, per Prop. 51. Et si datum fuerit punctum E, datum erit et A, et contra, circulo scilicet positione dato.

Cor. 2. Si in BD diametro circuli sumatur utcunque punctum A quod non sit centrum, et in eadem sumatur punctum E ita ut BA sit ad AD, ut BE ad ED; et a punctis A, E inflectantur utcunque AF, EF ad circumferentiam ei rursus

in G, H occurrentes; juncta GH perpendicularis erit ad diametrum BD.

Quoniam enim anguli LNH, LNG aequales ostensi sunt in compositione praecedente, erunt anguli ad L recti in triangulis NLH, NLG. Est igitur GH ad LN perpendicularis.

Cor. 3. Iisdem manentibus ut in Cor. 2. Si praeterea jungatur EG quae circumferentiae rursus occurat in K; erunt H, A, K puncta in recta linea.

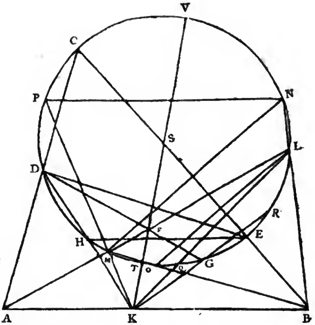
Jungatur enim FK; igitur quoniam aequales sunt circumferentiae FH, GK per Propositionis hujus compositionem, parallelae erunt rectae HG, FK, et est HG perpendicularis ad BD, quare et FK. Et quoniam LM bifariam secat rectas HG, FK, erunt triangula HAL, LAG aequalia, ut et FAM, MAK; aequalis igitur est angulus HAL (ipsi LAG, hoc est ipsi FAM, hoc est) ipsi MAK. Igitur in recta linea sunt H, A, K puncta.

PROP. LIV.

"SI a puncto K ad circulum DCE ducantur duae rectae "KMP, KQL abscindentes aequales circumferentias MP, "QL, et sumantur circumferentiae aequales PH, LG ex ipsis PM, LQ; junctae KH, KG abscindent circumferentias "aequales."

Ducantur enim a centro S rectae SP, SH, SL, SG; et quoniam KP, KL abscindunt circumferentias aequales, e-

[a] Pr. 52. runt [a] rectae KP, KL inter se aequales; igitur in triangulis
[b] 8. 1. KPS, KLS aequales sunt [b] anguli KSP, KSL; et aequales



[c] 27. 3. sunt [c] anguli HSP, GSL, reliqui igitur KSH, KSG sunt ae-
[d] 4. 1. quales; basis igitur [d] KH basi KG est aequalis; quare rectae KH, KG abscindunt [a] aequales circumferentias, viz. HD, GR.

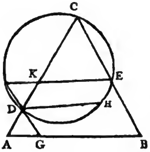
Vid. figg. 2. 3. Cas. 2. Prop. 57.

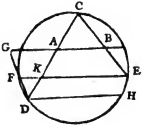
P R O P. LV.

" SI a duobus punctis A, B inflectantur ad circumferentiam
" circuli CDE rectae AC, BC eidem rursus in punctis D, E

" occurrentes, et ab alterutro eorum E ducatur recta EF pa-
" rallela junctae AB, occurratque circumferentiae rurſus in
" F, et juncta DF rectae AB occurrat in G; erit rectangulum
" BA, AG aequale rectangulo CA, AD. Et contra, ſi in recta
" AB ſumatur punctum G faciens rectangulum BA, AG ae-
" quale ipſi CA, AD, et juncta GD circumferentiae rurſus
" occurrat in F; juncta FE parallela erit rectae AB."

Quoniam, in prima parte, parallelae ſunt AB, FE angulus AGF aequalis eſt ipſi DFE, hoc eſt angulo DCE, in eodem ſegmento; et in triangulis ACB, AGD communis eſt angulus BAC, vel aequalis ipſi DAG. Eſt igitur [a] BA ad AC, ut AD ad AG, et propterea rectangulum BA, AG aequale ipſi CA, AD. [a] 4. 6.

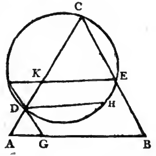




Et quoniam, in ſecunda parte, rectangulum BA, AG aequale ponitur ipſi CA, AD, erit BA ad AC, ut AD ad AG; angulus igitur [b] AGD aequalis eſt angulo ACB ſive DCE, hoc eſt ipſi DFE in eodem ſegmento. Quare recta FE parallela eſt ipſi AB. [b] 6. 6.

Cor. Et in casu in quo AB est extra circulum, si rectangulum BA, AG aequale fuerit ipsi CA, AD, et recta EF parallela sit ipsi AB; in recta linea erunt G, D, F.

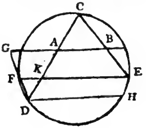
Ducatur enim DH parallela ipsi AB, erit igitur angulus AGD aequalis ipsi GDH. Quoniam vero rectangulum BA, AG est aequale ipsi CA, AD, erit angulus AGD aequalis angulo ACB sive DCE, hoc est angulo DFE. Angulus igitur GDH est aequalis ipsi DFE. Angulus autem DFE una cum ipso FDH aequalis est duobus rectis, quia parallelae sunt DH, FE; quare et angulus GDH una cum ipso FDH aequalis est duobus rectis, et propterea puncta G, D, F sunt in recta linea. 14. 1.



Potius ita, Occurrat AD rectae FE in K; est igitur angulus GAD aequalis ipsi DKF, et, ut prius, ostendetur angulus AGD aequalis angulo DFK; et propterea angulus ADG aequalis est ipsi FDK, et recta est ADK, igitur G, D, F puncta sunt in recta linea.

In casu in quo AB est intra circulum, idem ita ostendetur,

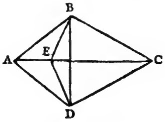
Occurrat DC rectae FE in K, et quoniam est BA ad AC, ut EK ad KC; ut vero BA ad AC, ita est AD ad AG ex hypothesi, et ut EK ad KC, ita, propter circulum, est KD ad KF; igitur ut AD ad AG, ita est KD ad KF, et parallelae sunt AG, KF, in recta linea igitur sunt puncta D,F,G.



PROP. LVI.

" SIT figura quadrilatera ABCD cujus duo latera adjacentia
" AB, AD ſunt inter ſe aequalia, ut et reliqua CB, CD inter ſe
" aequalia; ſi ducantur BE, DE facientes angulos CBE, CDE
" aequales, erunt puncta A, E, C in recta linea."

Jungantur enim AE, CE, BD, et quoniam aequales ſunt CB, CD aequales erunt anguli CBD, CDB, quare et EBD, EDB anguli ſunt aequales; eſt igitur recta BE aequalis ipſi ED. Et quoniam CE, EB ſunt aequales ipſis CE, ED et baſis CB baſi CD aequalis, erit angulus CEB aequalis angulo CED. Rurſus quoniam AE, EB aequales ſint ipſis AE, ED, et baſis AB baſi AD aequalis, erit angulus AEB angulo AED aequalis. Igitur AEB, BEC ſimul aequales ſunt angulis AED, DEC ſimul; et omnes quatuor conficiunt quatuor rectos, quare ipſorum dimidium, angulus ſcilicet AEB una cum ipſo BEC, aequalis eſt duobus rectis; puncta igitur A, E, C ſunt in recta linea.



Propoſitiones tres praecedentes Lemmata ſunt ad Poriſma ultimum Lib. 3. Poriſmatum Euclidis, quod in textu Graeco praefationis Pappi ad Librum ſuum 7. verbis ſequentibus enuntiatur.

"Ὅτι ἥδε ἤτοι ἐν παραθέσι ἔϛαι, ἢ μετά τινος εὐθείας ἐπὶ τὸ δοθὲν " σημεῖον" νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν.

Quod recta haec vel erit parallela positione datae, vel cum quadam recta ad datum "punctum" vergente datum continebit angulum.

Postquam Porisma in Prop. 49. Dom. Matthaeo Stewart ostendissem, rogavi ut explicationem hujus tentaret, quod de duabus rectis a punctis datis ad circumferentiam circuli positione dati inflexis intelligendum esse suspicari me dicebam. Post breve tempus scripsit mihi se hoc verum esse invenisse, et Porismatis constructionem indicavit. Magis autem explicite et generaliter Porisma ita ut sequitur enuntiari potest. Vid. figg. Pr. 57.

"SI a duobus punctis datis A, B ad circulum positione "datum CDE inflectantur utcunque duae rectae AC, BC cir-"cumferentiae rursus in D, E occurrentes; juncta DE vel "continebit datum angulum cum recta ad datum punctum "vergente; vel parallela erit rectae positione datae, vel ver-"get ad datum punctum."

Porisma autem hoc generale in alia tria dividitur, quorum investigationem ut sequitur in sequentibus Propositionibus 57. 58. 59. confeci.

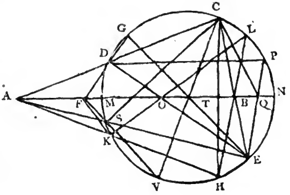
PROP. LVII.

Quae est Pars prima praecedentis,

"QUANDO scilicet recta quae jungit intersectiones inflexa-"rum et circumferentiae datum continet angulum cum recta "quae ad datum punctum vergit."

Cas. 1. Quando puncta A, B sunt in recta quae transit per centrum circuli.

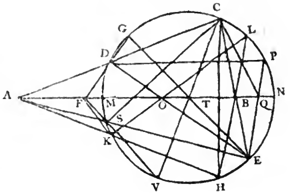
Data ſint puncta A, B, et ſit circulus CDE poſitione datus; et inflexis utcunque rectis AC, BC ad circumferentiam, ei rurſus in D, E occurrentibus, junctaque DE, puta Poriſma verum eſſe, rectam ſcilicet DE datum continere angulum cum recta quae ad datum punctum vergit, et hoc vel ad interſectionem ipſius DE et rectae AC, vel ad interſectionem rectae DE et ipſius BC; puta ad D interſectionem ipſarum ED, AC; et puta F punctum eſſe quod inveniendum eſt, junctaque DF producatur et circumferentiae rurſus occurrat in G; datus igitur, ex hypotheſi, eſt angulus EDF, ut et angulus qui ipſi deinceps eſt. A puncto C ad AB perpendicularis ducatur CH, et ad punctum H in quo rurſus circumferentiae occurrit, inflectantur AH, BH quae eidem rurſus occurrant in K, L, et jungantur LK, KF; igitur, rurſus ex hypotheſi, datus eſt angulus LKF qui propterea aequalis eſt ipſi EDF. Occurrat AB circumferentiae in M, N, et ED, LK ſibi mutuo occurrant in O; et quoniam CH perpendicularis eſt ad diametrum MN, erit [a] recta AC aequalis ipſi AH, igitur circumferentiae DC, KH quas abſcindunt ſunt inter ſe aequales [b], et aequales ſunt CM, MH, igitur et circumferen-



[a] 4. 1.

[b] Pr. 52.

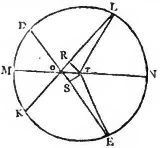
tiae DM, MK sunt aequales. Similiter quoniam aequales sunt rectae BC, BH, circumferentiae LN, NE aequales ostendentur; punctum igitur O intersectio ipsarum ED, LK est in diametro MN. * Et quoniam circumferentia DM aequalis est ipsi MK, erit recta OD aequalis ipsi OK, et est recta AD aequalis ipsi AK, et angulus EDF aequalis est angulo LKF, quare et ODF ipsi OKF; punctum igitur [c] F est in recta



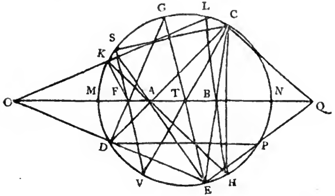
[c] Pr. 56

* Hoc ita ostenditur,

Quoniam circumferentiae MLN, MEN sunt aequales, additis aequalibus MK, MD, et aequalibus LN, EN ablatis, erit circumferentia KML aequalis ipsi DME, aequales igitur sunt rectae KL, DE; ducantur ad ipsas a centro T perpendiculares TR, TS, et, junctâ TO, quoniam aequales sunt TR, TS [14. 3.] erunt et OR, OS aequales [47. 1.] quare et OL, OE sunt aequales; et junctis TL, TE, erunt et anguli OTL, OTE aequales, et aequales sunt anguli LTN, ETN, igitur anguli OTL, LTN simul aequales sunt ipsis OTE, ETN; et omnes quatuor aequales sunt quatuor rectis angulis, igitur OTL, LTN ipsorum dimidium aequales sunt duobus rectis, et propterea O, T, N puncta sunt in recta linea, et punctum O erit in diametro TN.

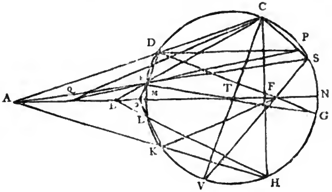


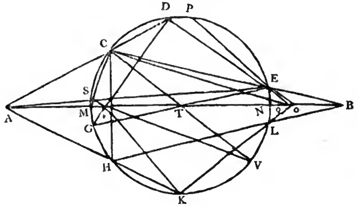
AO five AB. Ducatur DP parallela ipfi AB, occurratque circumferentiae rurfus in P, et juncta EP ipfi AB occurrat in Q; et quoniam inflexae funt AC, BC ad circumferentiam in C quae ei rurfus in D, E occurrunt, et ducta eft DP parallela ipfi AB, et juncta EP occurrit AB in Q, erit [d] rectangulum AB, [d] Pr. 55.
BQ aequale ipfi CB, BE; aequiangulum igitur eft triangulum BQE triangulo ACB, quare angulus BQE aequalis eft angulo ACB; datum autem eft punctum B, quare datum eft rectan-



gulum CB, BE, hoc eft AB, BQ, dataque eft recta AB, datum igitur eft punctum Q. Jungatur AE quae circumferentiae rurfus occurrat in S, juncta vero EG rectae AB occurrat in T, et juncta CT circumferentiae rurfus occurrat in V, et jungantur VF, QC, CS. Et quoniam angulus BQE, five in quibufdam cafibus TQE aequalis oftenfus eft (angulo ACB, five DCE, hoc eft) angulo DGE in eodem fegmento, et eft angulus ETQ aequalis ipfi FTG, erit triangulum QTE aequiangulum ipfi GTF; rectangulum igitur QT, TF aequale eft rect-

[e] 35. 3. angulo (GT, TE, hoc est [e] rectangulo) CT, TV; igitur angulus CQT aequalis est ipsi TVF. Quoniam vero rectangulum AB, BQ aequale ostensum est ipsi CB, BE, erit triangu-





lum QBC aequiangulum ipsi EBA, quare angulus BQC, vel CQT aequalis est ipsi BEA, vel CEA; ostensus autem est angulus CQT aequalis angulo TVF; aequalis igitur est angulus BEA, sive in quibusdam casibus CES, angulo TVF, quare ae-

qualibus insistunt circumferentiis; angulus autem BEA, sive CES insistit circumferentiae CS, et angulus TVF, sive CVF terminum communem C habet cum angulo CES; igitur angulus CVF insistit circumferentiae CS, hoc est recta VF transit per punctum S. Quoniam vero a punctis A, B inflexae sunt AE, BE quae circumferentiae rursus occurrunt in S, C, angulus CSF, sive CSV aequalis est, ex hypothesi, angulo EDF, sive EDG, et qui ipsis sunt deinceps sunt inter se aequales, recta igitur CV est aequalis rectae EG. Quoniam igitur aequales rectae CV, EG transeunt per idem punctum T in diametro, et inaequales faciunt cum ea angulos, nam CT, HT, non vero CT, ET, cum diametro aequales faciunt angulos; erit propterea T centrum circuli *. Et quoniam rectangulum QT, TF aequale est rectangulo GT, TE, hoc est quadrato ex semidiametro, datum erit rectangulum QT, TF, et data est QT, quare et TF; datumque est punctum T, quare datum est F; et quoniam EG diameter est circuli, transit enim per centrum T, erit angulus EDG, sive EDF rectus. Igitur recta ED datum continet angulum EDF cum recta DF quae vergit ad datum punctum F. Quod fuit ostendendum.

Componetur ita.

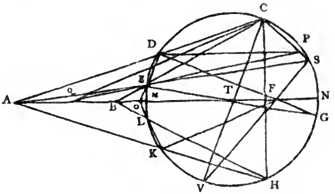
Sint A, B duo puncta data in diametro, et sit circulus CDE positione datus; occurrat AB circumferentiae in M, N, et rect-

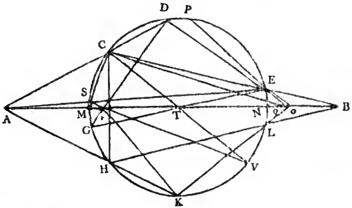
* Hoc ita ostenditur,

Si duae rectae aequales in circulo transeunt per idem punctum in diametro quod non est centrum, aequales facient cum diametro angulos, ut facile ostendi potest, ducendo a centro perpendiculares ad aequales rectas. Et propterea, si duae rectae aequales quae transeunt per idem punctum in diametro inaequales faciunt angulos cum ea, punctum per quod transeunt erit centrum circuli.

angulo NB, BM aequale fiat AB, BQ, et ponatur punctum Q ita ut puncta A, Q sint ad easdem vel contrarias partes puncti B, prout puncta M, N sunt ad easdem vel contrarias partes e-

Vide etiam figg. 1. 2. Cas. hujus.



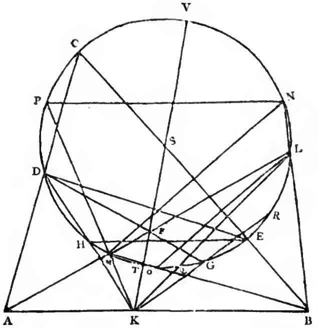


jusdem puncti B. Sit T centrum circuli quod, ex hypothesi, est in recta AB, et quadrato ex MT aequale fiat rectangulum QT, TF, et ponatur punctum F ad contrarias partes centri T ad quas est Q. Si a punctis A, B inflectantur utcunque ad

circumferentiam rectae AC, BC quae ei rursus in D, E occurrant, et jungantur ED, DF, rectus erit angulus EDF. Juncta enim ET occurrat circumferentiae rursus in G, et jungantur GF, QE. Et quoniam rectangulum QT, TF est aequale (quadrato ex MT, hoc est) rectangulo GT, TE, aequiangulum erit triangulum QTE triangulo GTF, quare angulus TQE, sive BQE, aequalis est angulo TGF. Et quoniam rectangulum AB, BQ aequale est (ipsi MB, BN, hoc est) rectangulo CB, BE, triangulum ABC aequiangulum est ipsi EBQ, quare angulus BCA, sive ECD aequalis est angulo BQE, sive, in quibusdam casibus, angulo TQE, hoc est, ut ostensum, angulo TGF, sive EGF. Aequales igitur anguli ECD, EGF aequalibus insistunt circumferentiis, angulus autem ECD insistit circumferentiae ED, et habent terminum communem E, igitur angulus EGF insistit eidem circumferentiae ED, hoc est recta GF transit per punctum D, sive in recta linea sunt puncta G, F, D. Quoniam igitur EG est diameter, angulus EDG, sive EDF in semicirculo rectus est. Q. E. D.

Cas. 2. Quando data puncta A, B non sunt in recta quae transit per centrum circuli, reliquis ut in praecedente manentibus.

Inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae AC,BC a datis punctis A, B, occurrantque ipsi rursus in D, E; sit F



punctum quod inveniendum est, et juncta DF circumferentiae occurrat rursus in G. Junctâ igitur ED, datus erit, ex hypothesi, angulus EDF, ut et angulus qui ipsi est deinceps. Per punctum E ducatur EH parallela ipsi AB, occurratque circumferentiae rursus in H, et juncta DH rectae AB occurrat

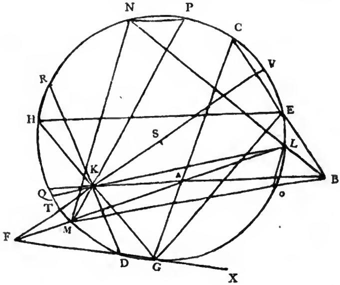
in K. Quoniam igitur inflexae ſunt AC, BC ad circumferentiam ei rurſus occurrentes in D, E, et ducta eſt EH parallela ipſi AB, et juncta DH occurrit eidem AB in K, crit rectangulum BA, AK aequale dato rectangulo CA, AD. Et data eſt AB poſitione et magnitudine, quare datum eſt punctum K. * Pr. 55.

Jungatur AF occurratque circumferentiae in punctis L, M, et juncta BL eidem rurſus occurrat in N, juncta vero BM ipſi rurſus occurrat in O; jungatur etiam KM quae circumferentiae rurſus occurrat in P, et PN jungatur. Quoniam igitur à punctis A, B inflexae ſunt AL, BL ad circumferentiam ei rurſus occurrentes in M, N, et eſt rectangulum BA, AK aequale (ipſi CA, AD, hoc eſt) rectangulo LA, AM, et juncta KM circumferentiae rurſus occurrit in P, recta PN parallela erit [a] ipſi AB, et propterea rectae HE; eſt igitur circumferentia HP ipſi EN aequalis. Jungantur MN, LO, et quoniam a punctis A, B inflexae ſunt AL, BL circumferentiae rurſus in M, N occurrentes, recta NM, ex hypotheſi, datos continebit angulos cum recta ML quae tranſit per datum punctum F; et ſimiliter quoniam ab iiſdem punctis A, B inflexae ſunt AM, BM circumferentiae rurſus in L, O occurrentes, recta OL datos continebit angulos cum recta LM quae per punctum F tranſit. Quoniam igitur datus eſt angulus EDF, et eidem dato angulo aequalis eſt angulus NMF, ut et angulus OLF, erunt tres circumferentiae GE, LN, MO, quibus inſiſtunt, inter ſe aequales.

In caſu autem in quo recta AB circulo occurrit, ſi punctum D, vel M, vel L fuerit in ſegmento minore a recta AB

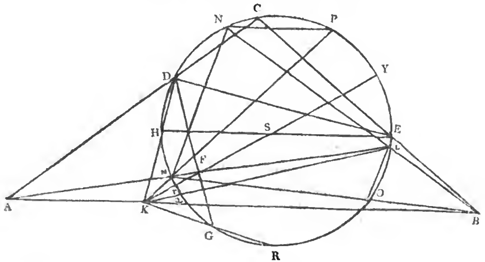
abſciſſo, vice anguli EDF, NMF, vel OLF, ſumendus eſt angulus qui ipſi deinceps eſt, productâ FD, vel FM; et in hiſce caſibus aequales etiam erunt circumferentiae GE, LN, MO, quibus ſcilicet inſiſtunt anguli aequales illis qui ſunt deinceps per 22. 3.

Praeterea quoniam rectangulum BA, AK aequale eſt ipſi LA, AM, erunt B, K, L, M puncta in circulo; jungatur KL



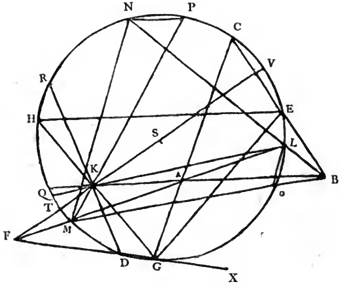
quae circumferentiae rurſus occurrat in Q, erit igitur angulus KMB aequalis ipſi KLB, ſi puncta M, L fuerint ad eaſdem partes rectae AB; ſi vero fuerint ad ejuſdem contrarias partes, erit angulus KMB aequalis ipſi QLN qui angulo KLB eſt deinceps; in utroque igitur caſu aequales ſunt anguli BMP, QLN. Aequalis igitur eſt circumferentia OMP in qua eſt an-

gulus BMP, five OMP circumferentiae QLN in qua eft angulus QLN. Et oftenfa eft circumferentia MO aequalis ipfi LN, igitur et MP aequalis eft circumferentiae QL. Occurrat juncta KG circumferentiae rurfus in R, et quoniam rectae KMP, KQL abfcindunt aequales circumferentias MP, QL, et eft HP aequalis (ipfi EN, hoc eft, quia aequales funt GE, LN) circumferentiae GL, rectae KHD, KGR aequales abfcindent[b] [b] Pr. 54.



circumferentias HD, GR; recta igitur GD vergit ad datum punctum in diametro quae per punctum K tranfit, per Cor. 1. Pr. 53. Vergit autem DG per datum punctum F, ex hypothefi; igitur punctum F eft in diametro quae per K tranfit, nam unicum tantum punctum poteft datum effe in recta DG; fi enim duo puncta in ea data effent, recta DG pofitione data effet, quod fieri non poteft, quoniam recta ADC inflexa eft

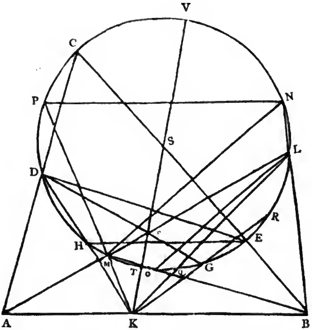
utcunque ad circumferentiam; juncta igitur KF tranſibit per centrum circuli, quod ſit S. Occurrat KS circumferentiae in punctis T, V, et quoniam data ſunt K, S puncta, recta KTV poſitione data eſt, quare rectae KT, KV datae ſunt. Et quoniam per Cor. 1. Prop. 53. eſt VK ad KT, ut VF ad FT, data erit ratio VF ad FT; et data eſt TV, punctum igitur F da-



tum eſt. Datum autem eſt punctum A, recta igitur AMFL poſitione data eſt, et data erunt puncta M, L; quare poſitione data eſt recta BLN, datum enim eſt punctum B; et propterea data poſitione eſt MN. Angulus igitur NML, et ipſi aequalis angulus EDG, vel huic deinceps, datus eſt. Recta igitur ED datum continet angulum EDF cum recta DF quae tranſit per datum punctum F. Quod fuit inveniendum.

Componetur ita.

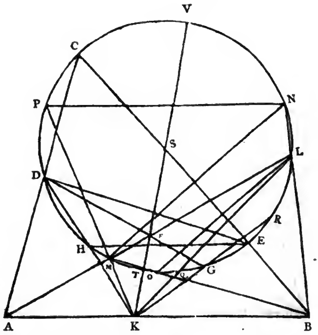
Sint A, B duo puncta data, et sit circulus CDE positione et magnitudine datus; a puncto A ad circulum ducatur utcunque recta ADC, fiatque rectangulum BA, AK aequale rectangulo CA, AD, et ponatur punctum K ita ut punctum A sit



extra vel inter puncta K, B, prout idem A est extra vel inter puncta C, D. Per centrum S ducatur KS quae circumferentiae occurrat in T, V punctis, et ut VK ad KT, ita fiat VF ad FT; jungatur AF, occurratque circumferentiae in L, M, et juncta BL eidem rursus occurrat in N, et MN jungatur;

erit F punctum inveniendum, et angulus NML is qui inveniendus fuit; hoc est si a punctis A, B ad circumferentiam utcunque inflectantur rectae AC, BC ipsi rursus occurrentes in D, E punctis, et jungantur ED, DF, erit angulus EDF, vel qui ipsi deinceps est, aequalis dato angulo NML.

Vide etiam figg. 2. 3. Cas. hujus.



Occurrat enim DF circumferentiae rursus in G, et ad circulum ducantur rectae KHD, KGR, KMP, KQL. Quoniam igitur rectangulum BA, AK aequale est ipsi CA, AD, et inflexae sunt ADC, BEC ad circumferentiam, juncta vero KD eidem rursus occurrit in H, juncta EH parallela erit[a] rectae

[a] Prop. 55.

AB. Similiter quoniam inflexae ſunt AML, BLN, et juncta KM circumferentiae rurſus occurrit in P, juncta NP parallela erit [a] rectae AB, et propterea ipſi HE; eſt igitur circumferentia HP aequalis ipſi EN. Et quoniam recta KV tranſit per centrum, et, ex conſtructione, eſt VK ad KT, ut VF ad FT, ductaque eſt per punctum F recta DFG, rectae KHD, KGR aequales abſcindent circumferentias HD, GR, ut in compoſitione Pr. 53. demonſtratum fuit; quare aequales ſunt [c] rectae KH, KG. Ductis igitur SH, SG, erunt, in triangulis KHS, KGS, anguli KSH, KSG aequales [d], quare et circumferentia TH aequalis eſt ipſi TG. Similiter quoniam recta ML tranſit per punctum F, oſtendetur recta KP aequalis ipſi KL, et propterea circumferentia TP aequalis eſt ipſi TL, quarum TH, TG ſunt aequales; igitur et HP aequalis eſt circumferentiae GL. Oſtenſa autem eſt circumferentia HP aequalis ipſi EN, quae propterea aequalis eſt circumferentiae GL, et eſt EL communis, aequalis igitur eſt circumferentia GE ipſi LN, quare et angulus EDG, vel qui ipſi deinceps eſt, aequalis eſt dato angulo NML. Q. E. D.

[a] Pr. 55.
[c] Pr. 52.
[d] 8. 1.

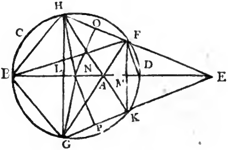
PROP. LVIII.

Quae eſt pars ſecunda Poriſmatis generalis praecedentis,

" QUANDO ſcilicet recta quae jungit interſectiones inflexa-
" rum et circumferentiae parallela eſt rectae poſitione datae."

Sint duo puncta A, E, et ab ipſis ad circumferentiam CHD poſitione datam utcunque inflexae AF, EF quae ei rurſus in G, H occurrunt, juncta GH parallela ſit rectae poſitione da-

tae. Jungatur AH quae circumferentiae rurſus occurrat in K. Quoniam igitur inflexae ſunt AH, EH a punctis A, E ad punctum H in circumferentia, et ei rurſus occurrunt in K, F, juncta KF parallela erit, ex hypotheſi, rectae poſitione datae, quare et ipſi GH erit parallela. Rurſus, junctâ EK quoniam a punctis A, E inflexae ſunt AK, EK ad punctum K quarum AK circumferentiae rurſus occurrit in H, recta quae jungit punctum H et reliquam interſectionem ipſius EK et circumferentiae parallela erit, ex hypotheſi, ipſi FK; eſt autem recta HG rectae FK parallela, ergo G eſt interſectio ipſius EK et circumferentiae, hoc eſt puncta E, K, G ſunt in recta linea. Quoniam igitur parallelae ſunt GH, KF, erunt triangula GFH,



a 37. 1. GKH inter ſe aequalia [a], et ablato communi GAH, erit triangulum HAF aequale ipſi GAK. Eſt autem, junctâ AE, tri-
b 1. 6. angulum HAF ad ipſum HAE, (ut [b] recta HF ad ipſam HE, hoc eſt, propter parallelas, ut GK ad GE, hoc eſt [b],) ut GAK triangulum ad triangulum GAE; et aequalia oſtenſa ſunt triangula HAF, GAK, igitur et HAE, GAE triangula ſunt aequalia. Occurrat recta EA circumferentiae in D, B, rectis vero HG, FK in L, M punctis. Eſt igitur ut recta EA ad AL, tum triangulum EAH ad HAL, tum triangulum EAG ad ipſum GAL; et aequalia ſunt EAH, EAG, igitur aequalia ſunt triangula HAL, GAL; quare et ipſorum baſes HL, LG ſunt

aequales, et propterea rectae FM, MK sunt etiam aequales. Quoniam igitur recta LM bifariam secat duas parallelas GH, FK in circulo, transibit LM per centrum, et ipsas GH, FK ad angulos rectos secabit. Et quoniam HG perpendicularis est ad BD diametrum circuli, et ductae sunt GAF, HFE quae diametro occurrunt in A, E punctis, erit [c] ut BE ad ED, ita BA ad AD. Ut igitur recta quae jungit intersectiones inflexarum a punctis A, E et circumferentiae, parallela sit positione datae, debent A, E puncta sita esse in diametro, ita ut BE sit ad ED, ita BA ad AD. Et si unum ex punctis A, E datum fuerit, datum erit et alterum.

[c] Pr. 51.

Componetur ita.

Datum igitur sit punctum A intra vel extra circulum positione datum BCD, et per A ducatur diameter BAD, in qua sumatur punctum E, ita ut BE sit ad ED, ut BA ad AD; si a punctis A, E inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae AF, EF ei rursus in G, H occurrentes, juncta GH perpendicularis erit ad diametrum BD.

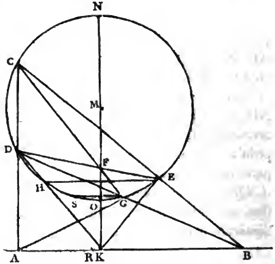
Jungatur enim EG; et quoniam ut BE ad ED, ita est BA ad AD, et per punctum A ducta est recta GAF, rectae EFH, EG aequales abscindent circumferentias, ut ostensum fuit in compositione Prop. 53. quare per Cor. 2. ejusdem Prop. GH perpendicularis est ad diametrum BD.

Quamvis compositio haec contineatur in Prop. 53. ejusque Cor. 2. visum fuit investigationem tradere hujus aeque ac reliquarum partium generalis Porismatis.

PROP. LIX.

" SI a duobus punctis A, B extra circulum inflectantur ad " circumferentiam rectae AC, BC ei rursus in D, E occurrentes, " fuerintque rectangula CA, AD; CB, BE simul aequalia " quadrato ex juncta AB; et a centro M ducatur ad AB per- " pendicularis MK; erit rectangulum BA, AK aequale ipsi " CA, AD. Et contra, si fuerint rectangula CA, AD; CB, BE " simul aequalia quadrato ex AB, et in AB sumatur punctum " K faciens rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; ducta " KM ad centrum perpendicularis erit ad AB."

Occurrat KM circumferentiae in punctis N, O; est igitur rectangulum CA, AD aequale quadrato ex AK et rectangulo OK, KN. Similiter est rectangulum EB, BC aequale quadrato ex BK et rectangulo OK, KN. Igitur rectangulum CA, AD una cum ipso EB, BC, hoc est, ex hypothesi, quadratum ex AB, aequale est quadratis ex AK, KB et duplo rectangulo OK, KN. Aufe-



[a] 4. 2. rantur quadrata ex AK, KB, et duplum rectangulum [a] AKB

aequale erit dupulo rectangulo OK, KN; quare AK, KB aequale est ipsi OK, KN rectangulo. Addatur commune quadratum ex AK, et rectangulum BA, AK aequale erit rectangulo OK, KN et quadrato ex AK, hoc est rectangulo CA, AD. Similiter ostendetur rectangulum AB, BK aequale ipsi CB, BE.

Et si fuerint rectangula CA, AD; CB, BE simul aequalia quadrato ex AB, et in AB sumatur punctum K faciens rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; ducta KM ad centrum perpendicularis erit ad AB.

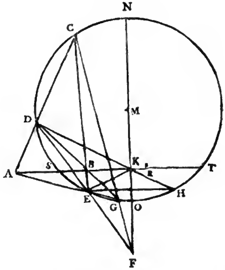
Si enim non sit, ducatur a centro recta MR perpendicularis ad AB, igitur, ex praemissis, rectangulum BA, AR aequale est ipsi CA, AD, hoc est rectangulo BA, AK; quod fieri non potest. Ergo MK est ad AB perpendicularis.

PROP. LX.

" SI a duobus punctis A, B, quorum A est extra, B vero intra circulum, inflectantur ad circumferentiam rectae AC, BC ei rursus in D, E occurrentes, fueritque rectangulum CA, AD aequale rectangulo CB, BE una cum quadrato ex juncta AB; et a centro M ducatur ad AB perpendicularis MK; erit rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD. Et contra, si fuerit rectangulum CA, AD aequale rectangulo CB, BE una cum quadrato ex AB, et in AB sumatur punctum K faciens rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; ducta KM ad centrum ad rectos angulos erit ipsi AB."

Occurrat AB circumferentiae in punctis S, T; et quoniam rectangulum CA, AD, hoc est TA, AS aequale est rectangulo

CB, BE, five SB, BT una cum quadrato ex AB, commune [a] 6. 2. apponatur quadratum ex SK; erit igitur [a] quadratum ex AK aequale rectangulo SB, BT una cum quadratis ex AB, SK. Commune auferatur quadratum [b] 4. 2. ex AB, et [b] rectangulum AB, BK bis una cum quadrato ex BK aequale erit rectangulo SB, BT una cum quadrato ex SK. Rurfus auferatur commune ex BK quadratum, et rectangulum AB, BK bis [c] 5. 2. aequale erit [c] rectangulo SB, BT bis; ipfum igitur AB, BK aequale eft rectangulo SB, BT. Cummune addatur quadratum ex AB, [d] 3. 2. et [d] rectangulum BA, AK aequale erit SB, BT, five CB, BE rectangulo una cum quadrato ex AB, hoc eft, ex hypothefi, rectangulo CA, AD.



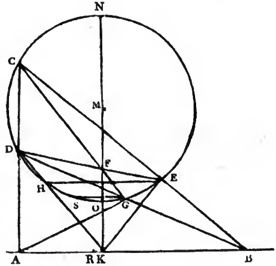
Secunda pars Propofitionis oftendetur eodem modo quo fecunda pars praecedentis. Propofitiones autem 59. 60. Lemmata funt ad fequentem.

PROP. LXI.

Quae eſt pars tertia Poriſmatis generalis,
" QUANDO ſcilicet recta quae jungit interſectiones inflexa-
" rum et circumferentiae vergit ad datum punctum."

Cas. 1. Quando recta quae per duo data puncta tranſit non occurrit circulo.

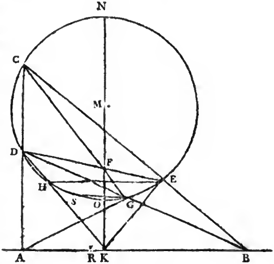
Sint A, B duo puncta data, et ab ipſis utcunque inflexis ad circumferentiam poſitione datam CDE duabus rectis AC, BC quae ei rurſus in D, E occurrunt, juncta DE, ex hypotheſi, vergit ad datum punctum. Sit punctum illud F, et jungatur BD quae circumferentiae rurſus occurrat in G; et quoniam a punctis A, B inflexae ſunt ad D rectae AD, BD quae circumferentiae rurſus occurrunt in C,G, juncta CG, ex hypotheſi, verget ad idem punctum F. Rurſus, ductâ AG, quoniam a punctis A, B inflexae ſunt ad G rectae AG, BG quarum BG circumferentiae rurſus occurrit in D, recta quae jungit punctum D et reliquam ipſius AG et circumferentiae interſectionem, ex hypotheſi,



tranſibit per punctum F; igitur recta DF tranſit per iſtam interſectionem; recta autem DF circumferentiae occurrit in E, quare punctum E eſt interſectio ipſius AG et circumferentiae, hoc eſt puncta A, G, E ſunt in recta linea.

Ducatur EH parallela rectae AB, occurratque rurſus circumferentiae in H, et juncta DH rectae AB in K occurrat. Quoniam igitur a punctis A, B inflexae ſunt AC, BC ad circumferentiam ei rurſus in D, E occurrentes, et ducta eſt EH parallela ipſi AB, junctaque DH ipſi AB occurrit in K, erit [e] rectangulum BA, AK aequale ipſi CA, AD; puncta igitur B, K, D, C ſunt in circulo, et propterea angulus AKD aequalis eſt angulo (DCE, hoc eſt angulo) AGD, quia ſcilicet puncta E, G, D, C ſunt etiam in circulo; ergo et puncta A, K, G, D ſunt in circulo, et propterea rectangulum AB, BK aequale eſt ipſi DB, BG, hoc eſt rectangulo CB, BE.

[e] Prop. 55.



Quoniam igitur oſtenſum eſt rectangulum BA, AK aequale ipſi CA, AD, et rectangulum AB, BK aequale ipſi CB, BE; erunt rectangula CA, AD; CB, BE ſimul aequalia rectangulis

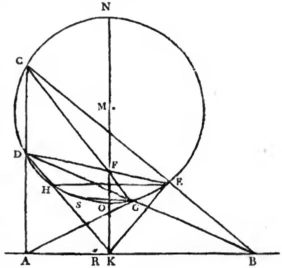
BA, AK; AB, BK, hoc est [f] quadrato ex AB. Sit M centrum [f] 2. 2
circuli, et jungatur MK quae circumferentiae in punctis N, O occurrat; igitur [g] est MK ad AB perpendicularis, et propterea ad HE. [g] Pr. 59. Quoniam igitur HE perpendicularis est ad diametrum NO, et ducta est HD ad circumferentiam, et diametro occurrit in K, recta ED transibit per datum punctum in diametro, quod scilicet dividit eam in ratione quam habet NK ad KO, ut constat ex Prop. 51. transit autem DE, ex hypothesi, per datum punctum F; est igitur F in diametro; non enim possunt duo puncta data esse in recta DE, nam si essent, positione data esset recta DE, quod fieri non potest; ductae enim sunt AC, BC utcunque ad circumferentiam. Vergit igitur DE per punctum datum. Invenietur autem [h] punctum F [h] Pr. 51. faciendo ut NK ad KO, ita NF ad FO. Ut igitur recta DE quae jungit intersectiones inflexarum a punctis A, B, et circumferentiae vergat ad datum punctum, debet quadratum ex AB aequale esse rectangulis CA, AD; CB, BE simul.

Componetur ita.

Data sint duo puncta A, B, et inflexa utcunque ad circumferentiam positione datam CDE rectis AC, BC ei rursus in D, E occurrentes, sit quadratum ex juncta AB aequale rectangulo CA, AD et ipsi CB, BE simul; verget juncta DE ad datum punctum F, quod invenitur ducendo per centrum M rectam MK perpendicularem ad AB, et circumferentiae occurrentem in N, O, et faciendo ut NK ad KO, ita NF ad FO.

Jungatur enim KD quae circumferentiae rursus occurrat in H, occurratque DE diametro in F, et HE jungatur. Quoniam igitur rectangulum CA, AD una cum ipso CD, DE aequale est quadrato ex AB, et ducta est MK perpendicularis ad

[g Pr. 59.] AB, erit[g] rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; igitur
[i Pr. 55.] HE parallela[i] est rectae AB, et propterea est perpendicularis ad diametrum NMO. Et quoniam HD diametro occurrit in K, et DE ipsi occurrit in F, e-
[k Pr. 51.] rit[k] ut NK ad KO, ita NF ad FO; datae autem sunt NK, KO, datum igitur est punctum F ad quod vergit DE. Q. E. D.

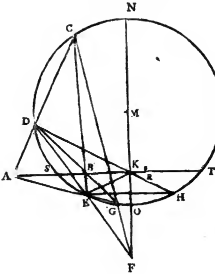


Cor. Et si datum fuerit punctum A, et recta AB positione, invenietur punctum B ducendo MK perpendicularem ad AB, et sumendo punctum B quod facit rectangulum AKB aequale ipsi OKN; ut patet ex Prop. 59.

Cas. 2. Quando recta quae transit per data puncta circulo occurrit.

Ostendetur, ut in Casu 1. et iisdem verbis, rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; et rectangulum AB, BK aequale ipsi CB, BE. Quoniam igitur rectangulum CA, AD aequale est (ipsi BA, AK, hoc est rectangulo AB, BK una cum quadrato ex AB, hoc est) rectangulo CB, BE una cum qua-

drato ex AB; si a centro M ducatur MK, erit [1] ea perpendicularis ad AB, et propterea ad HE. Quoniam igitur HE perpendicularis est ad diametrum NO, et ducta est HD ad circumferentiam, et diametro occurrit in K, recta ED transibit per datum punctum in diametro producta, ut constat ex Prop. 51. transit autem DE, ex hypothesi, per datum punctum F; est igitur F in diametro producta; non enim possunt duo puncta data esse in recta DE; nam si essent, positione data esset DE, quod fieri non potest. Vergit igitur DE per datum punctum F, quod scilicet facit NK ad KO, ut NF ad FO. Ut igitur recta DE quae jungit intersectiones inflexarum AC, BC et circumferentiae vergat ad punctum datum, debet rectangulum CA, AD, aequale esse rectangulo CB, BE una cum quadrato ex AB.



[1] Pr. 60.

Componetur ita.

Data sint duo puncta A, B, et inflexis utcunque ad circumferentiam positione datam CDE rectis AC, BC quae ei rursus in D, E occurrunt, sit rectangulum CA, AD aequale ipsi CB, BE una cum quadrato ex juncta AB; verget juncta

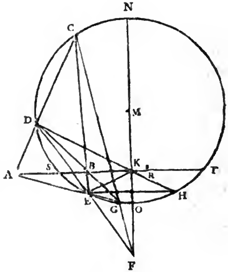
DE ad datum punctum F, quod invenitur ut in Casu 1.

Iisdem enim ut in Casu 1. constructis, quoniam rectangulum CA, AD aequale est ipsi CB, BE una cum quadrato ex AB, et ducta est MK perpendicularis ad AB, erit [a] rectangulum BA, AK aequale ipsi CA, AD; jungatur DK quae circumferentiae rursus occurrat in H, occurratque DE diametro in F, et juncta HE parallela erit [b] rectae AB, et propterea ad rectos angulos est diametro NMO. Et quoniam HD diametro occurrit in K, et DE ipsi occurrit in F, erit [c] ut NK ad KO, ita NF ad FO; datae autem sunt NK, KO, igitur datum est punctum F ad quod vergit recta DE.

[a] Pr. 60.

[b] Pr. 55.

[c] Pr. 51.



Cor. Et quoniam in Prop. 60. ostensum fuit rectangulum AB, BK aequale ipsi SB, BT, addito communi quadrato ex BK, erit rectangulum AK, KB aequale dato quadrato ex SK. Si igitur datum fuerit alterum ex punctis A, B, puta A, et recta AB positione, datum erit alterum punctum B faciendo rectangulum AK, KB aequale quadrato ex SK.

Cor. 2. ad utrumque casum; Et si a centro circuli M ducatur recta MK perpendicularis ad rectam AB, in qua sunt

duo puncta A, B quae faciunt rectangulum BA, AK aequale rectangulo CA, AD, ductâ scilicet quavis recta ADC ad circulum, et jungatur BC quae circumferentiae rursus occurrit in E, et DE jungatur quae occurrit diametro NMO quae per K transit in F, erit NK ad KO, ut NF ad FO. Vel, quod idem est, si fuerit NK ad KO, ut NF ad FO, DE occurret diametro NO in F.

Cas. 1. Quoniam enim rectangulum BA, AK aequale est ipsi CA, AD, hoc est quadrato ex AK una cum rectangulo OK, KN, ablato communi quadrato ex AK, et addito communi quadrato ex BK, erit rectangulum AB, BK aequale quadrato ex BK una cum rectangulo OK, KN, hoc est rectangulo CB, BE; additisque aequalibus, erit quadratum ex AB aequale rectangulo CA, AD una cum ipso CB, BE. Igitur, ex compositione hujus Casus, erit ut NK ad KO, ita NF ad FO.

Cas. 2. Quando scilicet recta AB circulo occurrit; quoniam rectangulum BA, AK aequale est ipsi CA, AD, hoc est rectangulo SA, AT, addito communi quadrato ex SK, erit rectangulum BA, AK una cum quadrato ex SK aequale [a] quadrato ex AK; commune auferatur rectangulum BA, AK, erit quadratum ex SK aequale [b] rectangulo AK, KB; et ablato quadrato ex BK, reliquum rectangulum AB, BK aequale [c] erit reliquo SB, BT, hoc est ipsi CB, BE, additoque quadrato ex AB, erit rectangulum BA, AK, hoc est CA, AD, aequale rectangulo CB, BE una cum quadrato ex AB. Igitur, ex compositione Casus 2. erit ut NK ad KO, ita NF ad FO.

[a] 6. 2.
[b] 2. 2.
[c] 35. 2.

PROP. LXII.

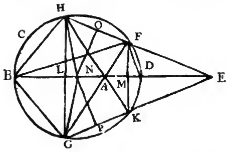
Est haec casus Porismatis generalis, ultimi scilicet Libri 3. Porismatum Euclidis.

" SI a dato puncto ad circulum positione datum ducatur ut-
" cunque recta linea, ab altero vero punctorum in quibus
" circumferentiae occurrit, ducatur recta parallela positione
" datae, et a puncto in quibus prima ducta circumferentiae
" rursus occurrit, ad punctum in quibus altera ducta eidem
" rursus occurrit ducatur recta linea; vel verget haec ad
" punctum datum, vel continebit datum angulum cum recta
" quae ad datum punctum vergit."

PARS I. Quando recta jungens intersectiones ductarum et circumferentiae vergit ad punctum datum.

Sit punctum E datum, et ab eo ad circulum positione datum BCD ducatur utcunque recta EFH, et ab altero punctorum in quibus circumferentiae occurrit, puta a puncto H, ducatur recta HG parallela positione datae, occurratque circumferentiae rursus in G, et jungatur FG; verget FG, ex hypothesi, ad datum punctum; sit punctum hoc A, et a puncto F ducatur FK parallela positione datae, et propterea ipsi HG, occurratque rursus circumferentiae in K. Quoniam igitur a puncto E ducta est ad circumferentiam recta EFH, et a puncto F ducta est FK parallela positione datae, juncta HK, ex hypothesi, transibit per punctum A. Rursus, quoniam a puncto E ducta est EK ad circumferentiam, et est KF parallela positione datae, recta quae jungit punctum F et reliquam intersectionem ipsius EK et circumferentiae transibit, ex hypothesi,

per punctum A; recta autem FA transit per punctum circumferentiae G; punctum igitur G est interfectio ipsius EK et circumferentiae, hoc est puncta F, K, G sunt in recta linea. Quoniam igitur parallelae sunt HG, FK, recta EA, per ea quae ostensa sunt in Prop. 58. bifariam et ad rectos



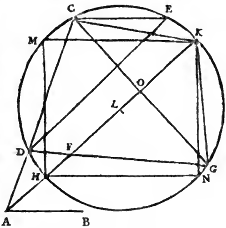
angulos secabit ipsas HG, FK, et per centrum circuli transibit. Occurrat EA circumferentiae in punctis B, D, et quoniam ducta est EFH ad circulum a puncto E, et est HG perpendicularis ad diametrum, et juncta GF diametro in A occurrit, erit [a] ut BE ad ED, ita BA ad AD. Datae autem sunt BE, ED, quare ratio BA ad AD data est; et data est BD, punctum igitur A datum est. Patet autem rectam positione datam cui HG parallela est ad rectos angulos esse diametro quae per E transit. [a] Pr. 51.

Componetur ita.

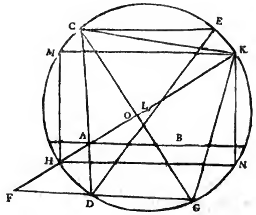
Ducatur per centrum a puncto E recta EDB, et fiat ut BE ad ED, ita BA ad AD; erit A punctum inveniendum. Si enim a puncto E ducatur utcunque EFH ad circulum, et HG perpendicularis ad diametrum BD, juncta GF transibit per punctum A, per Prop. 51.

Pars 2. Quando recta jungens intersectiones ductarum et circumferentiae datum continet angulum cum recta quae ad punctum datum vergit.

Datum fit punctum A, et recta AB positione data sit; ducatur vero utcunque a puncto A ad circulum positione datum CDE recta ADC, et ab altero punctorum in quibus circumferentiae occurrit, puta a puncto C, ducatur recta CE parallela rectae AB quae circumferentiae rursus occurrat in E, et DE jungatur; igitur, ex hypothesi, continet DE datum angulum cum recta quae ad datum punctum vergit; sit punctum illud F, et jungatur DF occurratque circumferentiae rursus in G; datus igitur est angulus EDG. Jungatur AF et circumferentiae occurrat in punctis H, K, et ducantur KM, HN parallelae ipsi AB, sive rectae CE, occurrantque rursus circumferentiae in M, N; et jungantur HM, KN. Quoniam igitur a puncto A ad circumferentiam ducta est AK, et est KM parallela positione datae AB, continebit MH datum angulum MHK cum recta HK quae vergit ad datum punctum F; angulus igitur MHK aequalis est dato angulo EDG. Similiter, quoniam ducta est HN parallela rectae AB, erit angulus NKH aequalis (eidem angulo EDG, hoc est) ipsi MHK. In casu autem in quo recta AB circulo occurrit, si punctum D, vel H, vel K fuerit in segmento minore a recta AB abscisso, vice anguli EDF, MHF, vel NKF, sumendus est angulus qui ipsi de-



inceps est, productâ FD, vel FH. Quoniam igitur aequales sunt anguli MHK, NKH in omni casu, parallelae sunt MH, NK; et sunt MK, HN parallelae, quare parallelogrammum est MHNK, et propterea anguli ejus oppositi HMK, KNH inter se sunt aequales; et est MHNK in circulo, anguli igitur HMK, KNH aequales sunt [a] duobus rectis; ergo uterque ipsorum rectus est, et propterea HK transit [b] per centrum circuli. Sit centrum L, recta igitur AL positione data est. Quoniam vero angulus EDG angulo MHK est aequalis, erit et EKG circumferentia circumferentiae MEK aequalis,



[a] 22. 3.

[b] 5. 4.

quarum EK aequalis est ipsi MC, quia parallelae sunt MK, CE, ergo et circumferentia KG aequalis est ipsi CK. Jungantur KG, KC et CG quae diametro HK occurrit in O; et quoniam aequales sunt circumferentiae CK, KG, aequales erunt et CH, HG; anguli igitur CKO, GKO sunt aequales, et duae CK, KO duabus GK, KO sunt aequales, altera alteri, quare aequales et recti sunt anguli COK, KOG. Quoniam igitur a puncto A ducta est ADC ad circulum, et CG perpendicularis ad diametrum HK, junctaque GD occurrit ipsi HK in F, erit [c] KA ad AH, ut KF ad FH; et data est ratio

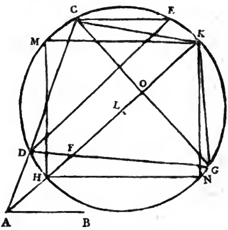
[c] Pr. 51.

KA ad AH, quare et ratio KF ad FH; et data eſt HK, punctum igitur F datum eſt; et eſt angulus EDF, ſive EDG aequalis dato angulo MHK. Quae fuerunt oſtendenda.

Componetur ita.

Sit punctum A datum, et recta AB poſitione data, et poſitione datus ſit circulus CDE, non autem ſit AB ad rectos angulos diametro quae tranſit per punctum A; per centrum L ducatur AHK, fiatque ut KA ad AH, ita KF ad FH, et ducatur KM parallela rectae AB, et HM jungatur. Si a puncto A ducatur ADC utcunque ad circulum, et ipſi AB parallela ducatur CE, et jungantur DE, DF quae circumferentiae rurſus occurrat in G, erit angulus EDF aequalis dato angulo MHF.

Vide etiam fig. 2. Part. hujus.



Quoniam enim eſt KA ad AH, ut KF ad FH, et a punctis A, F inflexae ſunt ad circumferentiam AD, FD ei rurſus in C, G occurrentes, erit [d] juncta CG perpendicularis ad diametrum HK. Junctae igitur CK, KG ſunt aequales, quare et circumferentiae CK, KG aequales ſunt; et quoniam parallelae ſunt CE, MK, aequales ſunt circumferentiae MC, EK; igitur et circumferentia MCK aequalis eſt ipſi EKG, et prop-

[d] 2. cor. Pr. 53.

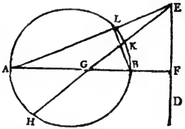
terea angulus huic insistens, viz. EDG aequalis est angulo MHK, vel EDF aequalis ipsi MHF.

PROP. LXIII.

Quae est Prop. 159. Lib. 7. Pappi.

" SIT circulus circa diametrum AB, et AB producatur, sit-" que ad quamlibet rectam lineam DE perpendicularis; rect-" angulo autem AF, FB aequale ponatur quadratum ex FG. " Dico si quodcunque sumatur punctum " in DE," ut E, at-" que ab eo ad punctum G recta linea ducta producatur, " et " circumferentiae occurrat in K, H punctis," rectangulum " etiam HE, EK quadrato ex EG aequale esse."

Jungatur AE " quae circumferentiae rursus occurrat in L," et BL jungatur, erit igitur angulus ALB rectus; sed et rectus AFE, " puncta igitur B, L, E, F sunt in circulo, quare rect-" angulum EA, AL aequale " est ipsi FA, AB. Rectangu-" lum autem EA, AL una " cum ipso AE, EL aequale [a] " est (quadrato ex AE, hoc " est [b]) quadratis ex AF, FE, " quorum EA, AL aequale est " rectangulo FA, AB;" reliquum igitur rectangulum AE, EL aequale est reliquo, rectangulo [a] scilicet AF, FB et quadrato ex FE. Rectangulum autem AE, EL aequale est rectangulo HE, EK, et rectangulum AF, FB aequale est, ex hypothesi, quadrato ex FG. Ergo rect-

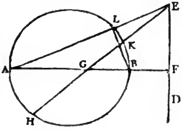


[a] 2. 2.

[b] 47. 1.

angulum HE, EK aequale est quadratis ex GF, FE, hoc est quadrato ex GE.

" Et si sumatur punctum G in AF producta ad partes F, reliquis manentibus, et punctum quodvis E sumatur in recta DE a quo ducatur utcunque ad circulum recta EKH, et jungatur EG; erit rectangulum HE, EK aequale quadrato ex EG. Demonstratur iisdem verbis cum praecedente."



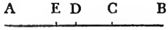
P R O P. LXIV.

Quae est Prop. 160. Lib. 7. Pappi.

" SIT ut AB ad BC, ita AD ad DC, et AC bifariam in punc-
" to E secetur. Dico tria contingere; videlicet rectangulum
" quidem BE, ED aequale esse quadrato ex EC; rectangulum
" vero BD, DE rectangulo AD, DC; et rectangulum AB, BC
" rectangulo EB, BD aequale esse."

Quoniam enim est ut AB ad BC, ita AD ad DC, erit, componendo, AB una cum BC ad BC, ut AC ad CD; et dimidiando antecedentes, EB ad BC, ut EC ad CD; et convertendo, ut BE ad EC, ita CE ad ED; rectangulum igitur BE, ED quadrato ex EC est aequale. Commune auferatur quadratum
[a] 3. 2. ex ED, ergo rectangulum BD, DE quod relinquitur [a], aequale
[b] 5. 2. est rectangulo [b] AD, DC. Rursus cum rectangulum BE, ED

aequale ſit quadrato ex EC, utrumque auferatur a quadrato ex EB; reliquum igitur rectangulum [c] EB, BD aequale eſt rectangulo [d] AB, BC. [c] 2. 2. [d] 6. 2.



Sed ſit nunc rectangulum BD, DE aequale rectangulo AD, DC; et bifariam ſecetur AC in E. Dico ut AB ad BC, ita eſſe AD ad DC.

Quoniam enim rectangulum BD, DE eſt aequale rectangulo AD, DC, commune apponatur quadratum ex DE, erit totum rectangulum [a] BE, ED quadrato [b] ex EC aequale. Eſt igitur BE ad EC, ut EC ad ED. Ergo, convertendo, et duplicando antecedentes, dividendoque, ut AB ad BC, ita AD ad DC. [a] 3. 2. [b] 5. 2.

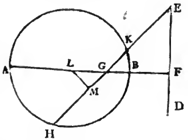
P R O P. LXV.

Quae eſt Prop. 161. Lib. 7. Pappi.

HIS ita ſe habentibus, " Sit circulus circa diametrum AB, et " producatur AB ut ad quamlibet rectam DE ſit perpendicu- " laris in puncto F; et fiat ut AF ad FB, ita AG ad GB. Dico " rurſus, ſi quodcunque punctum ſumatur " in DE," ut E, " et juncta EG circumferentiae occurrat in H, K, eſſe HE ad " EK, ut HG ad GK."

Sumatur centrum circuli, quod ſit L, et ab eo ad EH perpendicularis ducatur LM; erit [a] KM aequalis ipſi MH. Quo- [a] 3. 3. niam autem rectus eſt uterque angulorum qui ad M, F, erunt puncta E, F, L, M in circulo; " rectangulum igitur FG, GL " rectangulo EG, GM eſt aequale." Rectangulum autem

b Pr. 64. FG, GL aequale eſt [b] rectangulo AG, GB, quoniam ut AF ad FB, ita AG ad GB, et ſecta eſt AB bifariam in puncto L. Igitur et rectangulum EG, GM eſt aequale rectangulo c 35. 3. AG, GB, hoc eſt [c] rectangulo HG, GK, quia AB, HK ſe mutuo ſecant in circulo; et HK bifariam ſecta eſt in M, igitur ex eo quod proxime demonſtratum eſt [b], ut HE ad EK, ita erit HG ad GK.



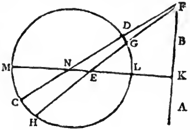
Propoſitiones tres proxime praecedentes inſerviunt duabus ſequentibus, quae ſunt Poriſmata.

PROP. LXVI.

" DATA poſitione rectâ AB, et circulo CD poſitione dato;
" datum erit punctum per quod ſi ducatur utcunque recta
" linea quae rectae poſitione datae AB et circulo occurrit,
" rectangulum contentum ſegmentis ductae inter rectam AB
" et puncta quibus circumferentiae occurrit, aequale erit qua-
" drato ex ſegmento ejuſdem ductae inter rectam AB et punc-
" tum illud quod datum oſtendendum eſt."

Sit E punctum inveniendum, per quod ductâ utcunque recta EF quae ipſi AB in F, et circumferentiae in punctis G, H occurrit, rectangulum GF, FH aequale erit quadrato ex EF. Ducatur EK perpendicularis ad AB, occurratque circumferentiae in L, M; rurſus igitur, ex hypotheſi, rectangulum

LK, KM aequale erit quadrato ex EK. Bifariam fecetur ML in N, et juncta FN producatur, occurratque circumferentiae in C, D. Quoniam igitur rectangulum GF, FH, hoc eft ipfum DF, FC aequale eft (quadrato ex EF, hoc eft quadratis ex EK, KF, hoc eft) rectangulo LK, KM et quadrato ex KF; eft autem [a] rectangulum CN, ND aequale ipfi MN, NL, five quadrato ex NL; erit totum, rectangulum DF, FC una cum ipfo CN, ND aequale (toti, rectangulo LK, KM et quadratis ex KF, NL, hoc eft [b] quadratis ex NK, KF, hoc eft) quadrato ex NF. Commune auferatur rectangulum NF, FD, erit reliquum, rectangulum fcilicet CN, DF una cum ipfo CN, ND, hoc eft rectangulum CN, NF aequale reliquo rectangulo DN, NF. recta igitur CN aequalis eft ipfi ND; et quoniam rectae ML, CD in circulo fe mutuo bifariam fecant in puncto N, erit [c] N centrum circuli, quod quidem datum eft. Pofitione autem data eft recta AB, et rectus eft angulus NKB, igitur pofitione data eft NK, quare data funt puncta K, L, M. Datum igitur eft rectangulum LK, KM, hoc eft quadratum ex EK, ipfaque KE pofitione et magnitudine data erit; et datum eft punctum K, igitur et punctum E. Quod erat oftendendum.

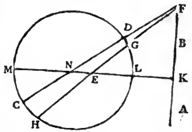


[a] 35. 3.
[b] 6. 2.
[c] 4. 3.

Componetur ita.

Sumatur circuli centrum N, et ab ipfo ad AB ducatur perpendicularis NK quae circumferentiae in L, M occurrat; inter MK vero et KL inveniatur media proportionalis KE, quae po-

natur a puncto K versus N; erit E punctum inveniendum. Si enim ab ipso ducatur quaevis recta EF ad rectam AB quae circumferentiae in G, H occurrat, erit rectangulum GF, FH aequale quadrato ex EF, quod quidem in Prop. 63. ostensum est.



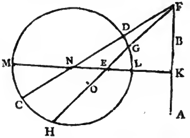
Et si ponatur recta KE ad partes contrarias iis ad quas posita fuit in praecedente Compositione, et a puncto E ducatur utcunque recta EF ad ipsam AB, a puncto vero F ducatur utcunque ad circulum recta FGH; erit rectangulum GF, FH aequale quadrato ex EF; nam recta EF in hoc casu aequalis est ipsi EF in priore.

PROP. LXVII.

" DATA positione recta AB, et circulo CD positione dato; " datum erit punctum per quod si ducatur utcunque recta li- " nea quae ipsi AB et circulo occurrit, rectangulum a seg- " mentis ductae inter AB et circumferentiam aequale erit " quadrato ex segmento ejusdem ductae inter rectam AB et " punctum quod datum ostendendum est, una cum rectan- " gulo a segmentis ejusdem ductae inter punctum illud et cir- " cumferentiam."

Sit E punctum inveniendum, per quod ductâ utcunque recta EF quae ipsi AB in F, et circumferentiae in punctis G, H occurrit, rectangulum GF, FH aequale erit quadrato ex

EF una cum rectangulo GE, EH. Ad AB ducatur perpendicularis EK quae circumferentiae occurrat in L, M; rursus igitur, ex hypothesi, rectangulum LK, KM aequale erit quadrato ex EK una cum rectangulo ME, EL. Bifariam secetur ML in N, et juncta FN circumferentiae occurrat in C, D; est igitur rectangulum CF, FD ipsi GF, FH aequale, hoc est quadrato EF una cum rectangulo GE, EH; et rectangulum CN, ND aequale est [a] ipsi MN, NL, hoc est quadrato ex NL; totum igitur, rectangulum CF, FD una cum ipso CN, ND aequale est toti, quadrato scilicet ex EF, rectangulo GE, EH et quadrato ex NL, hoc est quadratis ex FK, KE, NL et rectangulo GE, EH, sive rectangulo ME, EL; hoc est quadratis ex FK, NL et rectangulo LK, KM quod quadrato ex EK et rectangulo ME, EL est aequale. Rectangulum igitur CF, FD una cum ipso CN, ND aequale est (quadratis ex FK, NL, et rectangulo MK, KL, hoc est [b] quadratis ex FK, KN, hoc est) quadrato ex NF. Commune auferatur rectangulum NF, FD, erit reliquum, rectangulum scilicet CN, DF una cum ipso CN, ND, hoc est rectangulum CN, NF aequale erit reliquo rectangulo DN, NF; recta igitur CN aequalis est ipsi ND. Et quoniam rectae ML, CD in circulo se mutuo bifariam secant in puncto N, erit [c] N centrum circuli, quod quidem datum est. Data igitur est recta NK positione. Quoniam vero rectangulum LK, KM aequale est quadrato ex EK una cum rectangulo ME, EL, commune



[a] 35. 3.

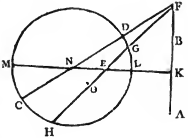
[b] 6. 2.

[c] 4. 3.

addatur quadratum ex NL, et totum, quadratum ex NK erit aequale (toti quadratis ſcilicet ex EK, NL et rectangulo ME,
[d] 5. 2. EL, hoc eſt [d]) quadratis ex EK, NE et rectangulo ME, EL bis. Auferatur commune, quadratum ex EK una cum quadrato ex
[e] 4. 2. NE, et reliquum, rectangulum [e] ſcilicet NE, EK bis aequale erit rectangulo ME, EL bis; quare et ipſum NE, EK aequale eſt rectangulo ME, EL. Commune addatur ex NE quadratum, et rectangulum KN, NE aequale erit dato quadrato ex NL. Data autem eſt KN, quare punctum E datum eſt.

Componetur ita.

A centro N ducatur ad AB perpendicularis NK occurratque circumferentiae in L, M; et ipſis KN, NL tertia proportionalis inveniatur NE; erit E punctum inveniendum. Ducatur enim ad AB utcunque recta EF, occurratque circumferentiae in G, H; erit rectangulum GF, FH aequale quadrato ex EF una cum rectangulo GE, EH. Quoniam enim rectangulum KN, NE aequale eſt quadrato ex NL, et ablato communi quadrato ex NE, eſt rectangulum NE, EK aequale rectangulo ME, EL, quare erit, per Prop. 64. ad finem demonſtrationis, ut MK ad KL, ita ME ad EL; igitur, per Prop. 65. ut HF ad FG, ita HE ad EG; et bifariam ſectâ HG in O, rectangulum OE, EF aequale erit, per Prop. 64. rectangulo HE, EG, et, per eandem, rectangulum HF, FG erit aequale ipſi OF, FE, hoc



eſt quadrato ex EF et rectangulo OE, EF, hoc eſt quadrato ex EF et rectangulo HE, EG. Q. E. D.

Atque haec ſunt Loca et Poriſmata, ea ſcilicet quae habentur inter Propoſitiones praecedentes a ſeptima uſque ad hanc, quae Euclidis eſſe dignoſcere valebam ex imperfecta admodum et mutila Pappi deſcriptione, et ope Lemmatum quae in ea conſcripſit peritiſſimus Geometra, cui totum fere debetur quod de Analyſi Veterum jam notum eſt; ſolus enim Pappus nomina et argumenta librorum quos de ea ſcripſerunt Veteres ſervavit. Deſcriptio autem quam tradit Poriſmatum adeo brevis eſt et obſcura, et injuriâ temporis aut aliter vitiata, ut niſi Deus benigne animum et vires dederat in ea pertinaciter inquirere, in perpetuum forſan Geometras latuiſſent.

Ut vero omnia quae de hac materia ſervavit Pappus ſimul exhibeantur, reliqua ejus Lemmata in Poriſmata hic ſubjungemus, in eorum praeſertim gratiam qui ulterius haec ſcrutari cupiunt.

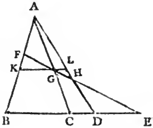
PROP. LXVIII.

Quae eſt Pappi Prop. 145. Lib. 7.

" IN tres rectas lineas AB, AC, AD ab aliquo puncto E ducantur duae rectae lineae EF, EB; ſitque ut EF ad FG, ita EH ad HG. Dico ut EB ad BC, ita eſſe ED ad DC."

Ducatur per G ipſi BE parallela KL; itaque quoniam ut EF ad FG, ſic eſt EH ad HG; ut autem EF ad FG, ſic EB ad GK; et ut EH ad HG, ſic DE ad GL; erit ut EB ad GK,

ſic DE ad GL; et permutando, ut BE ad ED, ita KG ad GL. Sed ut KG ad GL, ita BC ad CD; ut igitur BE ad ED, ita BC ad CD; permutandoque, ut EB ad BC, ita ED ad DC. Quae vero ad caſus pertinent, ſimiliter explicabuntur.



Serenus Antiſſenſis hanc Propoſitionem demonſtrat in Prop. 33. de Sect. Cylindri, verum multo minus eleganter.

Cor. Ex hac Propoſitione Pappi, Locus ſequens facile deducitur, viz.

Si in duas rectas lineas poſitione datas AB, AD ducatur a dato puncto E recta EHF, et ſecetur in G ita ut EF ſit ad FG, ut EH ad HG; punctum G tanget rectam poſitione datam.

Sumatur enim in altera ex poſitione datis punctum B datum, et EB jungatur, cui occurrat juncta AG in C, et AD in D. Quoniam igitur eſt EF ad FG, ut EH ad HG, erit, per hanc Propoſitionem, EB ad BC, ut ED ad DC; et permutando, ut BE ad ED, ita BC ad CD. Data autem eſt ratio BE ad ED, quia ipſae rectae datae ſunt, quare data eſt ratio BC ad CD; et data eſt BD, punctum igitur C datum eſt. Et datum eſt punctum A, recta igitur AC quam tangit punctum G poſitione data eſt.

Compoſitio.

Ducatur EB ad punctum datum B in AB, occurratque ipſi AD in D; et ut BE ad ED, ita fiat BC ad CD; juncta AC erit recta quam tangit punctum G. Ducatur enim utcunque recta EHF, et ipſi AC occurrat in G. Quoniam eſt BE ad ED, ut

BC ad CD, et permutando, ut EB ad BC, ita ED ad DC, erit, per hanc Prop. ut EF ad FG, ita EH ad HG.

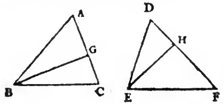
Et Loci converſa eſt haec; Si ducantur ad AB, AD rectae EDB, EHF, et ſecentur BD, FH in C, G ita ut EB ſit ad BC, ut ED ad DC; et EF ad FG, ut EH ad HG; in recta linea erunt C, G, A puncta. Ducatur enim per G recta KL parallela ipſi BE; eſt igitur EF ad FG, ut EB ad KG; et EH ad HG, ut DE ad GL; quare ut EB ad KG, ita DE ad GL, et permutando, ut BE ad ED, ita KG ad GL; ſed ut BE ad ED, ita BC ad CD, quia eſt EB ad BC, ut ED ad DC. Ut igitur KG ad GL, ita BC ad CD. Puncta igitur C, G, A in recta ſunt linea, per Lemma ad notam [b] in Prop. 23. hujus.

PROP. LXIX.

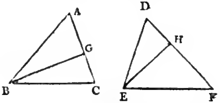
Quae eſt Prop. 146. Lib. 7. Pappi.

"SINT duo triangula ABC, DEF quae aequales habent angulos ad A, D. Dico ut rectangulum BA, AC ad rectangulum ED, DF, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum DEF."

Ducantur enim BG, EH perpendiculares "ad AC, DF," et quoniam angulus ad A eſt aequalis angulo ad D, et anguli ad G, H recti; erit ut AB ad BG, ſic DE ad EH. Sed ut AB ad BG, ſic eſt rectangulum BA, AC ad ipſum BG, AC. Et ut DE ad EH, ſic rectangulum ED, DF ad ip-



ſum EH, DF. Igitur ut rectangulum BA, AC ad ipſum BG, AC, ita eſt rectangulum ED, DF ad ipſum EH, DF, et permutando. Sed ut rectangulum BG, AC ad rectangulum EH, DF, ita eſt ABC triangulum ad triangulum DEF, "utrumque "enim utriusque eſt duplum;" et ut igitur rectangulum BA, AC ad ipſum ED, DF, ita eſt ABC triangulum ad triangulum EDF.



Brevius ita; Compleri intelligantur parallelogrammata quorum latera AB, AC; DE, DF; haec, et propterea ipſorum dimidia triangula ABC, DEF rationem habent compoſitam ex rationibus laterum per 23. 6. et rectangula BA, AC; ED, DF eandem habent rationem; eſt igitur ut rectangulum ad rectangulum, ita triangulum ad triangulum.

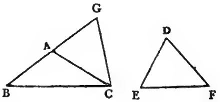
PROP. LXX.

Quae eſt Prop. 147. Lib. 7. Pappi.

" SINT anguli ad A et D duobus rectis aequales. Dico rur-
" ſus ut rectangulum BA, AC ad rectangulum ED, DF, ita
" eſſe triangulum ABC ad DEF triangulum."

Producatur BA, et ipſi BA ponatur aequalis AG, et CG jungatur. Itaque quoniam anguli ad A et D ſunt duobus rectis aequales, anguli vero BAC, CAG ſunt itidem aequales duobus rectis, erit CAG angulus angulo ad D aequalis. Ut

igitur rectangulum GA, AC ad rectangulum ED, DF, ita ACG triangulum ad triangulum DEF. Aequalis autem est GA ipsi AB, et triangulum AGC triangulo ABC aequale. Igitur ut rectangulum BA, AC ad rectangulum ED, DF, ita ABC triangulum ad triangulum EDF.



P R O P. LXXI.

Quae est Prop. 152. Lib. 7. Pappi.

" SIT ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex " DC. Dico rectangulum AB, BC quadrato ex BD aequale " esse."

Ponatur enim ipsi CD aequalis DE; ergo rectangulum EA, AC una cum quadrato ex CD, hoc est una cum rectangulo CD, DE est aequale [a] quadrato ex AD. Itaque quoniam est [a] 6. 2.
ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC, erit, dividendo, ut AC ad CB, videlicet ut rectangulum EA, AC ad rectangulum EA, BC, ita rectangulum EA, AC ad rectangulum CD, DE. Rectangulum igitur EA, BC rectangulo CD, DE est aequale. Ergo, ob proportionem * et dividendo, ut AD ad DE, hoc est ad DC, ita DB ad BC, et ideo



* AE ad ED, ut DC ad CB.

reliqua AB ad reliquam BD eſt ut DB ad BC. Rectangulum igitur AB, BC quadrato ex BD aequale erit.

PROP. LXXII.

Quae eſt Prop. 153. Lib. 7. Pappi.

"SIT rurſus ut AB ad BC, ita quadratum ex AD ad quadratum ex DC. Dico rectangulum AB, BC aequale eſſe quadrato ex BD."

[a] 6. 2. Ponatur nimirum ſimiliter DE aequalis ipſi DC, erit [a] rectangulum CA, AE una cum quadrato ex CD, hoc eſt una cum rectangulo ED, DC aequale quadrato ex AD. Atque erit, dividendo, ut AC ad CB, hoc eſt ut rectangulum EA, AC ad rectangulum EA, CB, ita rectangulum EA, AC ad rectangulum ED, DC. Aequale igitur eſt rectangulum AE, CB rectangulo ED, DC; et, ob proportionem † et componendo, ut AD ad DE, ſive DC, ita DB ad BC; quare et tota AB ad totam DB, eſt ut DB ad BC. Rectangulum igitur AB, BC quadrato ex DB eſt aequale.



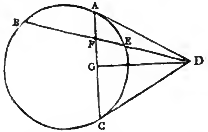
PROP. LXXIII.

Quae eſt Prop. 154. Lib. 7. Pappi.

"CIRCULUM ABC contingant rectae AD, DC, et AC jungatur; "ſi ducatur utcunque ad circulum recta DB, occurratque circumferentiae in B, E et rectae AC in F." Dico ut BD ad DE, ita BF ad FE."

† AE ad ED, ut DC ad CB.

Quoniam enim AD eſt aequalis ipſi DC, erit * rectangulum AF, FC una cum quadrato ex FD aequale quadrato ex DA. Sed rectangulum AF, FC eſt aequale rectangulo BF, FE; et quadratum ex DA rectangulo BD, DE aequale. Rectangulum igitur BF, FE una



cum quadrato ex FD eſt aequale rectangulo BD, DE. Quod cum ita ſit, fiet † ut BD ad DE, ita BF ad FE.

PROP. LXXIV.

Quae eſt Prop. 157. Lib. 7. Pappi.

" SIT ſemicirculus in recta linea AB, atque a punctis A, B
" ipſi ACB ad rectos angulos ducantur rectae lineae BD, AE,
" et ducatur utcunque DE quae circumferentiae occurrat in
" F; a puncto autem F, ipſi DE ad rectos angulos ducatur

* erit] Ducatur DG perpendicularis ad AC; quoniam igitur AD eſt aequalis ipſi DC, erit AG aequalis GC. Igitur rectangulum AF, FC una cum quadrato ex FG aequale eſt [a] quadrato ex AG; commune apponatur quadratum ex GD, erit rectangulum AF, FC una cum quadratis ex FG, GD, hoc eſt una cum quadrato ex FD aequale quadratis ex AG, GD, hoc eſt quadrato ex DA. [a] 5. 2.

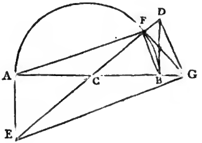
† fiet] Quoniam enim rectangulum BF, FE una cum quadrato ex FD eſt aequale rectangulo BD, DE; auferantur aequalia haec ex rectangulo BD, DF, erit reliquum rectangulum BF, DE aequale reliquo rectangulo BD, FE. Ut igitur BD ad DE, ita BF ad FE.

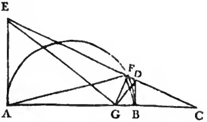
Commandini figura et commentarius ponunt rectam DB ductam eſſe per centrum. Conſtat autem ex Pappi demonſtratione rectam DB ducendam eſſe utcunque ad circulum.

" FG, quae cum AB in puncto G conveniat. Dico rectangu-
" lum AE, BD rectangulo AG, GB aequale esse."

" Analysis."

" Sit ita;" erit igitur ut EA ad AG, sic GB ad BD, hoc
*6. 6. est circa aequales angulos latera sunt proportionalia; quare [a],
" junctis GE, GD," angulus AGE est aequalis angulo BDG. Sed angulus quidem AGE aequalis est angulo AFE, qui in eodem segmento consistit, " sunt enim puncta E, A, F, G in circulo propter rectos angulos EAG, EFG;" angulus vero BDG aequalis ipsi BFG, qui est in eodem segmento, "rursus enim puncta B, G, D, F sunt in circulo, propter rectos angulos GBD, GFD." Igitur angulus AFE aequalis est angulo BFG. Quod quidem ita se habet, cum uterque angulorum AFB, EFG sit rectus.





Compositio.

Quoniam uterque angulorum AFB, EFG est rectus, dempto communi angulo EFB, erit angulus AFE aequalis angulo BFG. Sed angulo quidem AFE aequalis est angulus AGE, qui in eodem segmento consistit; angulo autem BFG, eadem ratione, aequalis est angulus BDG. Angulus igitur AGE an-

gulo BDG eſt aequalis; atque eſt EAG rectus aequalis recto GBD; quare et reliquus aequalis reliquo, et triangulum triangulo ſimile erit. Ut igitur EA ad AG, ſic GB ad BD, et propterea rectangulum AE, BD rectangulo AG, GB eſt aequale.

" Ex hac Propoſitione ſequentia tria Corollaria ſequuntur.

" Cor. 1. Si a dato puncto G ad duas parallelas rectas poſitione datas AE, BD ducatur recta GBA perpendicularis, et inter ipſas ducatur recta DE abſcindens ſegmenta AE, BD quae continent rectangulum dato rectangulo AG, GB aequale; a puncto autem G ducatur GF perpendicularis ad DE; tanget punctum F circumferentiam poſitione datam.

Jungantur enim AF, DG, GE, FB; et quoniam rectangulum AE, BD aequale eſt ipſi AG, GB, erit ut EA ad AG, ita GB ad BD, et ſunt circa aequales angulos rectos, aequiangula igitur ſunt triangula EAG, GBD, quare angulus AGE aequalis eſt ipſi BDG. Et quoniam recti ſunt anguli EAG, EFG, puncta E, A, F, G ſunt in circulo; aequalis igitur eſt AFE angulo AGE in eodem ſegmento. Similiter quoniam recti ſunt anguli GBD, GFD, erit angulus BFG aequalis ipſi BDG. Angulus igitur AFE eſt aequalis angulo BFG, et propterea angulus AFB ipſi EFG, angulo ſcilicet recto, aequalis eſt. Quoniam igitur data eſt recta AB poſitione et magnitudine, tanget punctum F circumferentiam ſuper diametrum AB deſcriptum.

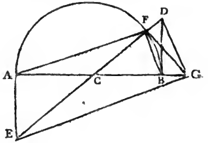
Cor. 2. Et ſi rectae AE, BD contingant circulum AFB in verticibus diametri AB poſitione et magnitudine datae, et ducatur EFD abſcindens ſegmenta AE, BD quae continent rectangulum dato ſpatio aequale, et a puncto F in quo ED circumferentiae occurrit ducatur FG ad rectos angulos ipſi

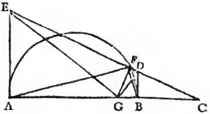
ED, occurratque ipſi AB in G; datum erit punctum G, hoc eſt FG verget ad punctum datum.

Eſt enim, per hanc Propoſitionem, rectangulum AG, GB aequale dato rectangulo AE, BD; datum igitur eſt AG, GB rectangulum, et data eſt AB, data igitur [b] eſt AG, quare et punctum G datum eſt.

[b] 85. vel 86. Dat.

Cor. 3. Data poſitione et magnitudine recta AB, ſi ducantur AE, BD circulum ſuper diametrum AB contingentes, datum erit punctum a quo ſi ducatur utcunque recta ad punctum in circumferentia, et a puncto hoc ducatur recta ductae ad angulos rectos, abſcindet haec a contingentibus ſegmenta verticibus diametri adjacentia quae continebunt rectangulum dato rectangulo aequale.





Punctum igitur inveniendum vel erit in diametro AB vel extra eam. Primò, ponatur illud eſſe extra diametrum; ſi igitur ab eo ducatur recta ad alterutrum verticem diametri, a quo vertice ducatur recta ductae ad angulos rectos, haec nullum abſcindet ſegmentum a contingente quae per verticem hunc ducta eſt, abſcindet autem ſegmentum a reliqua contingente, unde nullum erit rectangulum abſciſſis

contentum; contra hypothesim; non igitur punctum inveniendum est extra diametrum.

Sit igitur punctum inveniendum in diametro AB, sitque illud G, et ductâ utcunque GF ad circumferentiam ducatur per punctum F recta EFD ad rectos angulos ipsi GF et contingentibus occurrat in E, D; ex hypothesi igitur rectangulum AE, BD contentum aequale erit dato rectangulo; idem autem, per hanc Propositionem, aequale est rectangulo AG, GB, quod propterea datum erit; et data est AB, quare datum erit [b] punctum G. [b] 85. vel 86. Dat.

Sumatur igitur in diametro AB punctum G quod faciet rectangulum AG, GB dato rectangulo aequale, erit G punctum inveniendum; nam ductis GF, EFD, ut dictum fuit, erit rectangulum AE, BD aequale ipsi AG, GB, hoc est, ex constructione, dato rectangulo.

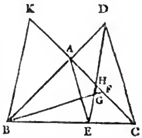
PROP. LXXV.

Quae est Prop. 158. Lib. 7. Pappi.

" SIT triangulum ABC, habens latus AB aequale ipsi AC, †
" producaturque AB ad D, et a puncto D ducatur DE faci-
" ens triangulum BDE aequale triangulo ABC. Dico si unum
" ex aequalibus lateribus, quod est ad triangulum aequale,
" bifariam secetur per " rectam" lineam BF " quae occurrat
" ipsi DE in G," ut utraque FB, BG ad FG, sic esse quadra-
" tum ex AF ad quadratum ex FH."

† Nihil est in demonstratione quod pendet ex aequalitate laterum AB, BC, tenet enim in quocunque triangulo; Propositio igitur sine dubio est corrupta.

"Sit ita, et" ducatur per B ipsi DE parallela BK, et CA ad
A K producatur; ergo ut utraque FK, KH ad FH, hoc est ut rectangulum contentum utraque FK, KH et FH ad quadratum ex FH, ita est quadratum ex AF ad quadratum ex FH. Quod igitur utraque FK, KH et FH
B continetur, hoc est excessus quadratorum ex FK, KH aequale est quadrato ex AF. Excessus igitur quadratorum ex KF, FA est quadratum ex KH. Sed quadratorum ex KF, FA
a 6. 2. excessus est [a] rectangulum CK, KA, "bifariam enim secta est AC in F;" ergo rectangulum CK, KA quadrato ex KH est aequale; ac propterea ut CK ad KH, hoc est ut CB ad BE, ita est HK ad KA, hoc est ut DB ad BA. Quod
C quidem ita se habet, "quoniam enim triangula DBE, ABC
b 15. 6. "sunt aequalia, et communem habent angulum DBC, est [b] ut "CB ad BE, ita DB ad BA."



Componetur autem hoc modo.

Quoniam triangulum DBE est aequale triangulo ABC, et sunt circa communem angulum DBC, erit [b] ut CB ad BE, hoc est ut CK ad KH, ita DB ad BA, hoc est ut HK ad KA; ut igitur CK ad KH, ita HK ad KA. Quare CK, KA rectangu-

A. Ergo ut utraque FK, KH ad FH, &c.] parallelae enim sunt BK, GH, ergo utraque FK, KH est ad FH, ut utraque FB, BG est ad FG, hoc est, ex hypothesi, ut quadratum ex AF ad illud ex FH.

B. Hoc est excessus quadratorum ex FK, KH] Si enim producatur HK ut pars producta aequalis sit ipsi HK, res patebit ex 6. 2.

C. Quae inversis commatibus notantur breviora sunt iis apud Pappum quorum loco ponuntur. Eadem mutantur in compositione.

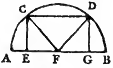
lum quadrato ex KH eſt aequale. Sed rectangulum CK, KA eſt exceſſus quadratorum ex KF, FA, ergo et quadratorum ex KF, FA exceſſus eſt quadratum ex KH, et ob id quadratum ex FA eſt exceſſus quadratorum ex FK, KH. Quadratorum autem ex FK, KH exceſſus eſt id quod utraque FK, KH et FH continetur; quod igitur FK, KH et FH continetur aequale eſt quadrato ex FA. Igitur ut rectangulum contentum utraque FK, KH et FH ad quadratum ex FH, hoc eſt ut utraque FK, KH ad FH, ita eſt quadratum ex AF ad quadratum ex FH. Sed ut utraque FK, KH ad FH, ita utraque FB, BG ad FG; ut igitur utraque FB, BG ad FG, ita eſt quadratum ex AF ad quadratum ex FH. Q. E. D.

P R O P. LXXVI.

Quae eſt Prop. 162. Lib. 7. Pappi.

" SIT ſemicirculus in recta linea AB, et ipſi AB parallela ſit " CD, ducanturque CE, DG perpendiculares " ad AB." Dico " AE ipſi GB aeqnalem eſſe."

Sumatur centrum circuli, quod ſit F, et CF, FD jungantur. Ergo CF eſt aequalis FD, ac propterea quadratum ex CF quadrato ex FD aequale erit. Sed quadrato quidem ex CF aequalia ſunt quadrata ex CE, EF; quadrato autem ex FD aequalia quadrata ex DG, GF. Ergo quadrata ex CE, EF quadratis ex DG, GF aequalia ſunt; quorum quadratum ex CE eſt aequale quadrato ex DG, reliquum igitur quadratum ex EF reliquo ex FG quadrato eſt aequale, ideoque recta linea EF aequalis rectae FG; eſt autem et tota



AF aequalis toti FB. Ergo et reliqua AE reliquae GB aequalis erit. Q. E. D.

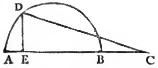
" Obſervare licet inſignem differentiam inter demonſtrationes hujus et praecedentis Propoſitionis 73. Praecedens enim nimis videtur eſſe brevis, et quaedam in ea ſupplenda ſunt; haec autem inſtar Elementorum admodum eſt explicita. Idem autem in multis aliis Pappi obſervandum eſt."

P R O P. LXXVII.

Quae eſt Prop. 163. Lib. 7. Pappi.

" SIT ſemicirculus in recta linea AB, atque a quolibet puncto " C " in ea producta" ducatur CD, et perpendicularis agatur " DE. Dico quadratum ex AC ſuperare quadratum ex CD eo " quod utraque AC, CB et AE continetur."

" Sit ita;" erit igitur quadratum ex AC aequale quadrato ex CD, hoc eſt aequale quadratis ex DE, EC, et ei quod utraque AC, CB et AE continetur. Quare, ablato communi rectangulo CA, AE, reliquum rectangulum AC, CE eſt aequale quadrato ex DE, hoc eſt rectangulo AE, EB et quadrato ex CE, et ei quod AE, CB continetur. Rurſusque ablato communi quadrato ex CE, rectangulum AE, EC quod relinquitur eſt aequale rectangulo AE, EB, et contento AE,



[a] 1. 2. BC; quod quidem ita ſe habet [a].

Compoſitio, ut Commandinus obſervat, manifeſta eſt.

Et ſi punctum C ſumatur inter A, B puncta, non abſimiliter

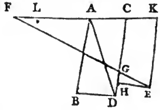
oſtendetur quadratum ex AC ſuperare quadratum ex CD eo quod exceſſu ipſarum AC, CB et AE continetur, ſcilicet ſi AC major fuerit quam CB. Sed ſi CB major fuerit quam AC, quadratum ex CD ſuperabit quadratum ex AC eo quod exceſſu ipſarum CB, AC et AE continetur.

PROP. LXXVIII.

Quae neceſſaria eſt Problemati in Propoſitione ſequente.

" DATIS poſitione duabus rectis AC, CD, et dato puncto E in " angulo qui deinceps eſt angulo ACD, ducenda eſt recta EGF " a puncto E quae ex ipſis CA, CD abſcindat ſegmenta CF, " CG, puncto C adjacentia, quae continent rectangulum dato " ſpatio aequale." Eſt Caſ. 1. Loci 3. Lib. 1. Apollonii de Sectione Spatii a clariſſimo Halleio reſtituti.

Factum ſit; et a puncto E ducantur EH, EK parallelae ipſis AC, CD; et quoniam datum eſt punctum E, datae erunt EH, EK. Rectangulum igitur HE, EK datam habet rationem ad rectangulum FC, CG, utrumque enim ipſorum datum eſt. Ut igitur [a] latus primi HC ad latus ſecundi GC, ita erit latus reliquum ſecundi CF ad eam ad quam reliquum primi latus CK datam habet rationem, quam ſc. habet rectangulum HE, EK ad FC, CG. Sit



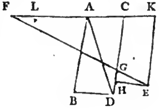
[a] 63. Dat.

ea CL; ut igitur HC ad CG, ita FC ad CL, et convertendo, ut CH ad HG, ita CF ad FL; aequiangula autem ſunt tri-

angula EKF, GHE, ut igitur EK, hoc eſt CH ad HG, ita eſt KF ad EH, hoc eſt KC; quare ut FK ad KC, ita eſt CF ad FL, et dividendo, ut FC ad CK, ita CL ad LF. Rectangulum igitur CF, FL aequale eſt ipſi KC, CL; datum autem eſt KC, CL, quoniam data eſt KC, ut etiam CL ad quam datam habet rationem. Quare datum eſt rectangulum CF, FL, et data
[b] 85. Dat. eſt CL, datum igitur [b] eſt punctum F, datumque eſt punctum E; igitur recta EGF poſitione data eſt.

Componetur ita.

Ducantur EH, EK parallelae ipſis AC, CD, et ſit rectangulum HC, CL datum ſpatium cui aequale rectangulum auferendum eſt rectâ ductâ a puncto E. Ad rectam autem CL applicetur rectangulum CFL excedens quadrato aequale rectangulo KC, CL, et ducatur recta EF quae occurrat ipſi CD in G; erit rectangulum FC, CG aequale rectangulo HC, CL, hoc eſt ſpatio dato. Quoniam enim, ex conſtructione, rectangulum CF, FL aequale eſt



ipſi KC, CL, ut FC ad CK, ita eſt CL ad LF, et componendo, ut FK ad KC, ita CF ad FL; eſt autem, propter aequiangula triangula EKF, GHE, FK ad EH, hoc eſt KC, ut EK, hoc eſt CH ad HG; ut igitur CH ad HG, ita eſt CF ad FL, et convertendo, ut HC ad CG, ita FC ad CL; et propterea rectangulum FC, CG aequale eſt ipſi HC, CL, hoc eſt ſpatio dato. Et patet ſolam rectam EF Problema efficere; ſi enim ſumptum fuiſſet alterum applicationis punctum quod eſt in recta LC producta ad partes C, recta a puncto E ad hoc punctum

ducta auferret quidem segmenta quae continent rectangulum dato spatio aequale, non quidem a rectis CA, CD, sed ab iis qui ipsis sunt in directum.

PROP. LXXIX.

Quae est Prop. 163. Lib. 7. Pappi, et Lemma ejus 38. et ultimum in Porismata Euclidis.

" PARALLELOGRAMMO AD positione dato, a dato puncto E " ducere rectam lineam EF, et facere triangulum FCG paral- " lelogrammo AD aequale."

Factum jam sit; quoniam igitur FCG triangulum aequale est parallelogrammo AD, parallelogrammum vero AD duplum est trianguli ADC; et triangulum FCG trianguli ADC duplum erit. Sed ut triangulum ad triangulum, quod circa eundem angulum ad C consistunt, ita rectangulum FC, CG ad rectangulum AC, CD [a]. Datum autem est rectangulum AC, CD; igitur et ipsum FC, CG datum. Et a dato puncto E ad rectas lineas AC, CD datas positione ducta est EF abscindens " rectas FC, CG quae continent" spatium aequale dato spatio, videlicet duplo ipsius AC, CD. Positione igitur " data" est ipsa EF, per Prop. praecedentem.

Vide fig. in Prop. praecedente.

[a] 69. hujus.

Componetur autem sic.

Sit parallelogrammum quidem AD positione datum, datum autem punctum E; et a puncto E ad FC, CD positione datas ducatur recta linea EF abscindens " rectas FC, CG quae continent" spatium FC, CG aequale dato spatio, videlicet duplo ipsius AC, CD; et ex iisdem quae in resolutione dicta

sunt, ostendemus triangulum FCG parallelogrammo AD aequale. Recta igitur EF Problema efficit. Constat autem ipsam solam hoc efficere, quoniam et illa sola est.

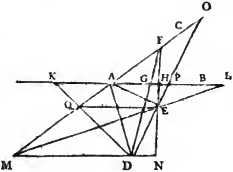
Inter varia Opera Mathematica peritissimi Geometrae Petri Fermatii, quae post mortem ejus impressa fuerunt Tolosae anno 1679, habentur in pagg. 117, 118 quinque Propositiones quas Porismata vocat; earum secunda est de Parabolae affectione quadam, quam in Prop. 19. Lib. 5. de Sectionibus Conicis edit. 2. demonstravimus; haec autem, ut et prima, tertia et quinta, ut eas Fermatius enuntiat, sunt mera Theoremata, et quarta est Datum. Dicit quidem nihil vetare quominus in Problemata transformentur, et exemplum data in Propositione quinta, quam, suppressis quibusdam in enuntiatione, in Problema vertit quod revera est Porisma; et addit, "nec latet ex supradicto Theoremate," in Propositione sc. ejus 5ta, "constructio, si enim ponatur recta AZ esse ad quartam "partem ZD in ratione data, omnia constabunt." Unde liquet Fermatium Porismatis hujus solutionem minime investigavisse, sed constructionem ejus ex Theoremate in quod inciderat deduxisse. Et idem de reliquis ejus Propositionibus intelligendum est. Quoniam vero nullus, quantum scio, Propositiones has ut Theoremata, nedum ut Porismata, hactenus demonstravit, eas, in formam Porismatum redactas, ut sequitur investigavimus.

PROP. LXXX.

Quae eſt Fermatii prima.

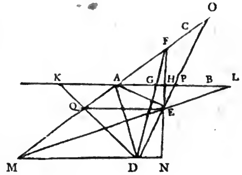
" DATIS poſitione duabus rectis AB, AC, datisque extra ip-
" ſas duobus punctis D, E; ſi ab ipſis ad alteram rectarum
" AC utcunque inflectantur rectae DF, EF reliquae poſitione
" datae AB occurrentes in G, H; abſcindent inflexae ex ipſa
" AB duo ſegmenta, datis punctis adjacentia, quae quidem
" invenienda ſunt, quae datum continebunt rectangulum,
" quod etiam inveniendum eſt."

Puta Poriſma verum eſſe, atque puncta K, L ea eſſe quibus adjacent ſegmenta rectis DF, EF abſciſſa; puncta autem K, L data eſſe oſtendendum eſt, ut et datum eſſe rectangulum contentum ſegmentis abſciſſis quae punctis hiſce adjacent. Igitur, ex hypotheſi, rectangulum KG, HL datum eſt. Rurſus inflectantur rectae DA, EA ab iiſdem D, E punctis ad punctum A in quo rectae poſitione datae AB, AC ſibi mutuo occurrunt; rectangulum igitur KA,



AL, ex hypotheſi, datum erit, quare idem eſt aequale rectangulo KG, HL. Ut igitur GK ad KA, ita eſt AL ad LH, dividendoque, ut GA ad AK, ita AH ad HL; et permutando,

ut GA ad AH, ita KA ad HL. Ad AC ducatur DM parallela ipsi AB, datum igitur est punctum M; occurrat autem FE ipsi MD in N; ut igitur DM ad MN, ita est GA ad AH, et ita est KA ad HL. Jungatur DE et producta occurrat ipsis AC, AB in O, P; et quoniam a punctis D, E inflexae sunt ad AC rectae DO, EO quae occurrunt ipsi AB in P, erit rectangulum KP, PL aequale, ex hypothesi, rectangulo KA, AL. Ut igitur PK ad KA, ita est AL ad LP, et dividendo, ut PA ad AK, ita AP ad PL; aequales igitur sunt KA, PL. Ostensum autem fuit esse DM ad MN, ut KA, hoc est PL ad HL, quare permutando, ut MD ad PL, ita MN ad
19. 5. HL, et [a] MD ad PL, ut (DN ad HP, hoc est ut) DE ad EP. Et aequales sunt anguli MDE, EPL, junctis igitur ME, EL, aequiangula sunt MDE, EPL triangula, quare angulus DEM angulo PEL est aequalis; puncta igitur M, E, L sunt in recta linea. Data autem sunt puncta M, E, quare recta MEL et punctum L positione data sunt. Jungatur DK occurratque rectae AM in Q; est igitur KQ ad QD, ut (KA, sive PL ad MD, hoc est ut) PE ad ED; quare juncta EQ est ipsi MD parallela; datumque est punctum E, et recta MD positione est data; positione igitur data est EQ, et punctum Q datum erit, sed et punctum D datum est; punctum igitur K, in quo positione



datae DQ, AB ſibi mutuo occurrunt, datum eſt; et datum oſtenſum eſt punctum L. Rectangulum igitur KA, AL, et propterea ipſum KG, HL datum eſt. Quae fuerunt oſtendenda.

Componetur ita.

A datis punctis D, E ad rectam AC ducantur DM, EQ parallelae ipſi AB, et producantur junctae DQ, ME ad AB in punctis K, L; erunt K, L puncta invenienda, et rectangulum inveniendum erit ipſum KA, AL. Inflectantur enim a punctis D, E ad rectam AC, utcunque DF, EF quae ipſi AB occurrant in G, H; erit rectangulum KG, HL aequale rectangulo KA, AL. Eſt enim KA ad MD, ut (AQ ad QM, hoc eſt ut HE ad EN, hoc eſt ut) HL ad MN; et permutando, ut KA ad HL, ita MD ad MN, et ita eſt AG ad AH; igitur [b] ut KA ad HL, ita KG ad AL. Quare rectangulum KG, HL rectangulo KA, AL eſt aequale. Notandum autem eſt rectam DE non debere parallelam eſſe rectae AC. [b] 12. 5.

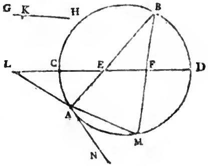
P R O P. LXXXI.

Quae eſt Fermatii tertia, ſed magis generalis reddita.

"SI a dato puncto A in circumferentia poſitione data, ducatur utcunque recta AB quae occurrat rectae CD poſitione datae et circulo inſcriptae in E, et circumferentiae rurſus in B; datum erit punctum ad quod ſi ducatur recta a puncto B quae rectae CD occurrat in F, erit ratio rectanguli CF, ED ad rectangulum CE, FD eadem rationi datae quam habet recta GH ad ipſam GK."

Puta Poriſma verum eſſe; quoniam igitur, ex hypotheſi, eſt rectangulum CF, ED ad ipſum CE, FD, ut recta HG ad

ipsam GK, dividendo, erit rectangulum EF, CD ad ipsum CE, FD, ut recta HK ad ipsam KG. Sit ut HK ad KG, ita DC ad CL, et ita erit rectangulum EF, CD ad ipsum EF, LC; ut igitur rectangulum EF, CD ad ipsum CE, FD, ita est rectangulum EF, CD ad rectangulum EF, LC, et propterea rectangulum CE, FD aequale est ipsi EF, LC. Commune addatur rectangulum CE, EF, totum igitur rectangulum CE, ED, hoc est ipsum AE, EB aequale est toti rectangulo LE, EF; quare in circulo sunt A, L, B, F puncta, et propterea, junctâ AL, angulus ALE aequalis est angulo ABF. Quoniam vero data est ratio DC ad CL, data erit recta CL, data enim est DC, et punctum L erit datum; et datum est punctum A, quare recta AL positione data est, datusque erit angulus ALE, ut et ipsi aequalis angulus ABF.



a 93. Dat. Quoniam igitur datum est punctum A, verget [a] recta BF ad punctum in circumferentia datum; sit hoc punctum M. Datum igitur est punctum M, quod erat ostendendum.

Componetur ita.

Fiat ut HK ad KG, ita DC ad CL, jungatur AL, et ducatur AN circulum contingens in puncto A, et fiat angulus NAM aequalis ipsi ALC, occurratque AM circumferentiae rursus in M; erit M punctum inveniendum; hoc est, si a puncto A ducatur utcunque AEB circumferentiae rursus oc-

currens in B, et diametro CD in E, junctâ BM quae occurrat CD in F, erit rectangulum CF, ED ad ipsum CE, FD, ut recta GH ad ipsam GK.

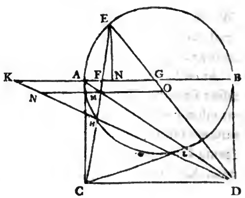
Quoniam enim circulum contingit AN, AM vero secat, erit [b] angulus ABM aequalis angulo NAM, hoc est angulo [b] 32. 3. ALC; in circulo igitur sunt puncta A, L, B, F. Ergo rectangulum LE, EF rectangulo (AE, EB, hoc est ipsi) CE, ED est aequale; commune addatur rectangulum FE, ED, totum igitur rectangulum EF, LD toti CF, ED est aequale; et ex iisdem LE, EF et CE, ED rectangulis ablato communi CE, EF, erit reliquum LC, EF aequale reliquo rectangulo CE, FD. Ut igitur rectangulum CF, ED ad ipsum CE, FD, ita est (rectangulum EF, LD ad ipsum LC, EF, et ita est recta DL ad ipsam LC, et ita est) GH ad ipsam GK, quia DC facta fuit ad CL, ut HK ad KG. Compositio etiam fieri potuisset retrogradiendo per analysin, hanc autem paulo breviorem, varietatis gratia dedimus.

Et ex hoc apparet Fermatium Theorema, quod vocat Porisma suum tertium, non satis generaliter proposuisse; requirit enim rectam AM parallelam esse diametro CD; quamvis autem positionem habere potest AM, ut et CD. Ita autem, in forma Dati, proponendum fuit; Si in circulo inscripta fuerit recta AM positione data, et ad circumferentiam utcunque inflectantur rectae AB, MB quae rectae CD positione datae et circulo inscriptae occurrant in E, F punctis; data erit ratio rectanguli CF, ED ad rectangulum CE, FD. Cujus demonstratio, ductâ scilicet ad CD rectâ AL faciente angulum ALC aequalem dato angulo ABM, ex praecedente compositione liquet.

PROP. LXXXII.

" SI recta CE harmonice secetur in punctis H, M, hoc est si
" fuerit CE ad EM, ut CH ad HM, et a puncto quovis D du-
" cantur DE, DM, DH, DC quae vulgo harmonicales vocan-
" tur; recta quaevis KAG uni ipsarum CD parallela, bifa-
" riam secabitur a reliquis, hoc est erit KA aequalis ipsi AG.
" Et contra, si ducatur recta KAG quae bifariam secta est a
" tribus harmonicalium DH, DM, DE, erit KG parallela
" quartae CD."

Primò, sit KG parallela ipsi CD; per punctum M ducatur NMO parallela rectae CD; et quoniam ut CE ad EM, ita est CH ad HM, propter parallelas erit CD ad MO, ut CD ad NM. Aequalis igitur est NM ipsi MO, quare et KA est aequalis AG.



Secundò, bifariam secta sit KG in A; erit KG parallela ipsi CD. Ducatur enim per M recta NMO parallela ipsi CD; est igitur NM aequalis ipsi MO per Cas. 1. et est KA ipsi AG aequalis; igitur, per Lemma ad notam [b] in Prop. 23. est KG parallela ipsi NO, hoc est rectae CD.

PROP. LXXXIII.

Quae est Fermatii quarta.

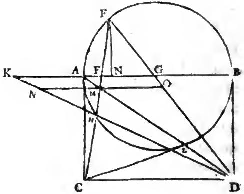
" SIT circulus cujus diameter AB positione et magnitudine " data est, et in AB data sint duo puncta aequaliter a centro " distantia; data erunt alia duo puncta a quibus si ad cir- " cumferentiam utcunque inflectantur duae rectae, abscin- " dent hae duo segmenta diametri datis punctis adjacentia, " quorum summa quadratorum data erit."

Cas. 1. Quando duo puncta data sunt ipsius diametri termini.

Puta Porisma verum esse, atque puncta C, D ea esse quae invenienda sunt. Igitur inflexis utcunque CE, DE ad circumferentiam in E, quae diametro AB in F, G punctis occurrant, summa quadratorum ex AG, FB, ex hypothesi Porismatis, aequalis erit spatio dato. Inflexis autem CA, DA ad terminum diametri, CA aufert nullum segmentum, DA vero aufert ipsum diametrum; quare quadratum ex diametro est spatium illud datum cui summa quadratorum ex segmentis ab ipsis CE, DE, aliisve inflexis abscissis, debet esse aequalis. Occurrat altera inflexarum CE circumferentiae rursus in H, jungatur DH et producta occurrat ipsi AB in K. Quoniam igitur a punctis C, D inflexae sunt CH, DH ad circumferentiam, quae diametro AB in F, K occurrunt, erit, ex hypothesi, summa quadratorum ex segmentis KA, FB aequalis spatio dato, quadrato scilicet ex AB, cui etiam summa quadratorum ex AG, FB est aequalis. Quadratum igitur ex AK aequale est quadrato ex AG, et recta AK aequalis ipsi AG. Manifestum

Vide fig. in Prop. praecedente.

igitur eſt ſi ab altero punctorum C, D, puta a C, ducatur recta CHE utcunque ad circumferentiam, et junctae DH, DE occurrant ipſi AB in K, G, aequales fore KA, AG. Unde patet rectam CA circulum contingere, ſi enim rurſus ei occurreret, recta a puncto D ad hunc occurſum ducta, auferret aliquod ſegmentum diametri adjacens puncto A, recta autem DA nullum aufert, quod fieri non poteſt. Occurrat DA circumferentiae rurſus in L, et eodem modo oſtendetur junctam CL circulum contingere.



Et ſimiliter oſtendetur junctam DB contingere circulum. Quoniam igitur CA, CL circulum contingunt, et ducta eſt CHE ad circulum, quae occurrat ipſi AL
[a] Pr. 73. in M, erit [a] EC ad CH, ut EM ad MH; quatuor igitur rectae DE, DM, DH, DC ſunt quae harmonicales dicuntur. Et quoniam recta KAG inter tres ipſarum ducta bifariam ſecta eſt in
[b] Pr. 82. A, erit [b] quarta DC ipſi KG parallela, eſt igitur ABDC parallelogrammum. Ducatur ad AB perpendicularis EN; et quoniam eſt NF ad FA, ut EN ad AC, hoc eſt EN ad BD, hoc eſt ut NG ad GB; erit NF ad FA, ut NG ad GB, et componendo, ut NA ad AF, ita eſt NB ad BG; ſimilia igitur ſunt rect-
[c] 22. 6. angula AN, NB et AF, GB. Quare [c] ut quadratum ex AN ad quadratum ex AF, ita eſt rectangulum AN, NB ad rectangu-

lum AF, GB, et ita eſt AN, NB bis ad ipſum AF, GB bis. Eſt autem rectangulum AF, GB bis aequale [d] quadrato ex FG, quia ſcilicet quadrata ex AG, FB ſimul aequalia ſunt quadrato ex AB; et, propter circulum, rectangulum AN, NB aequale eſt quadrato ex EN. Ut igitur quadratum ex AN ad quadratum ex AF, ita eſt quadratum ex EN bis ad quadratum ex FG; ut vero quadratum ex AF ad illud ex FN, ita eſt quadratum ex AC bis ad illud ex EN bis; igitur ex aequali in proportione perturbata, ut quadratum ex AN ad illud ex NF, ita eſt quadratum ex AC bis ad quadratum ex FG. Eſt vero quadratum ex CD, ſive AB ad illud ex FG, ut quadratum ex CE ad illud ex EF, hoc eſt ut quadratum ex AN ad illud ex NF; igitur ut quadratum ex AB ad illud ex FG, ita eſt quadratum ex AC bis ad quadratum ex FG. Aequale igitur eſt quadratum ex AB quadrato ex AC bis, hoc eſt AC aequalis eſt lateri quadrati circulo inſcripti. Data igitur eſt AC magnitudine, ſed et poſitione, quare punctum C datum eſt, et propterea punctum D. Q. F. oſtendenda.

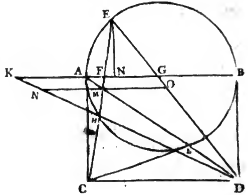
[d] conv. Pr. 44.

Componetur ita.

Sit AB diameter circuli poſitione et magnitudine data, et ipſi ad rectos angulos ducantur AC, BD, quarum utraque aequalis ſit lateri quadrati circulo inſcripti; erunt C, D puncta invenienda, hoc eſt ſi ab ipſis ad circumferentiam ſuper diametrum AB deſcriptam, inflectantur utcunque CE, DE rectae, quae diametro in punctis F, G occurrant; erunt quadrata ex ſegmentis AG, FB ſimul aequalia quadrato ex diametro AB.

Ducatur enim EN perpendicularis ad diametrum, et quoniam quadratum ex AB aequale eſt quadrato ex AC bis, erit quadratum ex AB ad illud ex FG, ut quadratum ex AC bis

ad idem ex FG quadratum. Eſt vero quadratum ex AB, ſive ex juncta CD ad quadratum ex FG, ut quadratum ex CE ad illud ex EF, hoc eſt ut quadratum ex AN ad illud ex NF. Igitur eſt quadratum ex AN ad illud ex NF, ut quadratum ex AC bis ad quadratum ex FG; ut vero quadratum ex NF ad illud ex FA, ita eſt quadratum ex EN bis ad illud ex AC bis; igitur, ex aequali in proportione perturbata, ut quadratum ex AN ad illud ex AF, ita eſt quadratum ex EN bis ad quadratum ex



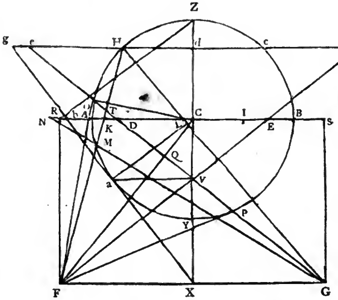
FG. Eſt vero, ut in analyſi oſtenſum, quadratum ex AN ad illud ex AF, ut rectangulum AN, NB bis, hoc eſt quadratum ex EN bis ad rectangulum AF, GB bis. Ergo quadratum ex EN bis eſt ad quadratum ex FG, ut idem quadratum ex EN bis eſt ad rectangulum AF, GB bis. Quadratum igitur ex FG rectangulo AF, GB bis eſt aequale, et propterea [d] quadrata ex AG, FB ſimul ſunt aequalia quadrato ex AB. Q. E. D.

[d] Pr. 44.

Hanc demonſtrationem quae in Compoſitione habetur aliter tradit clariſſ. Eulerus in Actis Petropolitanis novis anno 1750. tom. 1. pag. 49. minime autem inveſtigat Conſtructionem, ſed ut Fermatius eam dederat aſſumit. Et quidem Propoſitionem Fermatii in hoc Caſu primo anno 1715 demonſtravi, priuſquam aliquid de natura Poriſmatum cognoveram.

Cas. 2. Quando duo puncta data sunt intra vel extra circulum.

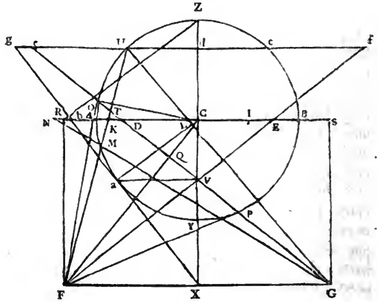
Sit circulus cujus diameter AB positione et magnitudine data est, centrumque sit C; et data sint in diametro, intra, vel extra circulum duo puncta D, E, aequaliter a centro distantia. Data erunt alia duo puncta a quibus si ad circumferentiam



inflectantur utcunque duae rectae, abscindent hae duo segmenta diametri datis punctis D, E adjacentia, quorum summa quadratorum data erit.

Puta Porisma verum esse; sintque F, G duo puncta invenienda. Igitur inflexis utcunque ab ipsis ad circumferentiam rectis FH, GH, quae diametro AB in K, L punctis occurrant,

data erit, ex hypothesi, summa quadratorum ex abscissis KE, LD. Occurrat FH circumferentiae rursus in M, et jungatur GM quae diametro occurrat in N; rursus igitur, quoniam a punctis F, G inflexae sunt FM, GM ad circumferentiam quae abscindunt segmenta KE, ND punctis E, D adjacentia, summa quadratorum ex KE, ND erit data, et propterea aequalis



summae quadratorum ex KE, LD. Quadratum igitur ex ND aequale erit quadrato ex DL, et recta ND aequalis ipsi DL. Constat igitur puncta F, G hanc habere affectionem, ut si ab altero ipsorum F ducatur quaevis recta quae circumferentiae occurrit in H, M, ductae a reliquo GH, GM abscindent a diametro segmenta aequalia LD, DN dato puncto D adjacentia.

Jungatur GD et circumferentiae in O, P occurrat; junganturque FO, FP; quoniam igitur ducta est FO ad circumferentiam in O, et recta GO quae transit per punctum D nullum aufert segmentum eidem puncto adjacens, recta FO nullibi praeter in O circumferentiae occurret, hoc est circulum continget; similiter ostendetur rectam FP contingere circulum. Jungatur FC occurratque rectae OP in Q, et quoniam circulum contingunt FO, FP, erit FQ perpendicularis ad OP. Ad AB ducatur perpendicularis FR, et quoniam recti sunt anguli FRD, FQD, erunt F, R, D, Q puncta in circulo, rectangulum igitur RC, CD est aequale (rectangulo FC, CQ, hoc est) quadrato ex juncta CO, sive ex CA. Proportionales igitur sunt CD, CA, CR, et datae sunt CD, CA, quare et CR data est; datumque est punctum C, quare et punctum R, rectaque RF positione data erit. Similiter si jungatur FE, et ducatur GS perpendicularis ad AB, proportionales ostendentur rectae CE, CB, CS. Aequales igitur sunt inter se rectae CR, CS; datumque propterea est punctum S.

Occurrat recta FH ipsi OP in T, et quoniam FO, FP circulum contingunt, erit [a] FH ad FM, ut HT ad TM; juncta igitur FG, erunt rectae GF, GM, GT, GH harmonicales, et recta NDL a tribus ipsarum GN, GD, GL bifariam secta est in D, quare eadem NL parallela est [b] quartae FG; parallelogrammum igitur est FRSG.

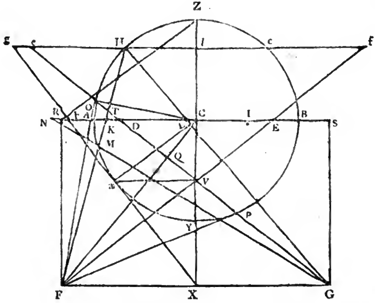
[a] Pr. 73.

[b] Pr. 82.

Occurrant FE, GD sibi mutuo in V, et jungatur CV quae occurrat ipsi FG in X. Quoniam igitur aequales sunt DC, CE, et sunt DE, FG parallelae, erunt et FX, XG inter se aequales; est igitur FX aequalis ipsi RC, quoniam dimidia sunt aequalium FG, RS, et sunt parallelae, quare CX est ipsi RF

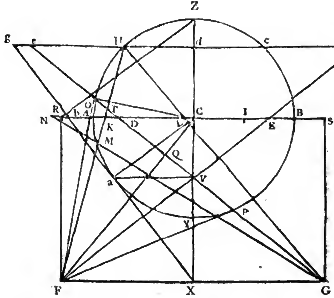
parallela, rectusque propterea est angulus FXC. Occurrat CV circumferentiae in Y, Z; et quoniam puncta F, Q, V, X sunt in circulo, recti enim sunt anguli FQV, FXV, erit rectangulum XC, CV aequale ipsi FC, CQ, hoc est quadrato ex CO, sive CY; proportionales igitur sunt CV, CY, CX. Et quoniam aequales sunt anguli FCX, VGX, erunt triangula rectangula FXC, VXG inter se aequiangula; ut igitur FX ad XC, ita est VX ad XG, quare rectangulum FX, XG, hoc est quadratum ex FX, aequale est rectangulo CXV; et est quadratum ex CY, sive CA, aequale rectangulo XCV, ergo quadrata ex datis rectis FX, CA, sive ex RC, CA aequalia sunt rectangulis CXV, XCV, hoc est quadrato ex CX, quod propterea datum est. Data igitur est recta CX, quare punctum X, ut et F, G puncta data sunt. Per punctum V ducatur recta aV ipsi AB parallela, et circumferentiae occurrat in a, jungatur Ca, ut et Xa quae circulum continget in a, quia proportionales sunt CV, CY, CX; rectus igitur est angulus CaX, quare quadratum ex aX aequale est rectangulo CX, XV, hoc est quadrato ex FX. Aequalis igitur est recta aX ipsi FX. Occurrat Xa rectae AB in b, et quoniam, propter parallelas, est FX ad CE, ut (XV ad VC, hoc est ut) Xa ad ab, et est FX aequalis ipsi Xa, erit CE aequalis rectae ab. Per H ducatur Hd parallela ipsi FG, occurratque circumferentiae rursus in c, et rectis XZ, GD, FE Xa in punctis d, e, f, g. Et quoniam est FX ad df, ut (XV ad Vd, hoc est ut) Xa ad ag, et aequales ostensae sunt FX, Xa, erit df aequalis ipsi ag. Quoniam autem contingit circulum ag, erit quadratum ex ag, hoc est df aequale rectangulo Hgc. Commune addatur quadratum ex Hd, et quadrata ex Hd, df simul aequalia erunt quadrato ex gd. Bifa-

riam autem secta est ef in d, quia FG bifariam secta est in X, quare quadrata ex eH, Hf dupla sunt quadratorum ex Hd, df, hoc est quadrati ex gd. Est autem, propter parallelas, CH ad DL, ut (HG ad GL, hoc est ut HF ad FK, hoc est ut) Hf ad KE; et quadrata ex ipsis sunt proportionalia; ut igitur summa quadratorum ex eH, Hf ad summam quadratorum ex



DL, KE, ita est (quadratum ex eH ad quadratum ex DL, et ita est quadratum ex HG ad illud ex GL, et ita est quadratum ex dX ad quadratum ex CX, et ita est) quadratum ex gd ad quadratum ex bc. Summa autem quadratorum ex eH, Hf dupla ostensa est quadrati ex gd, ergo summa quadratorum ex DL, KE dupla est quadrati ex bC, hoc est dupla quadratorum ex

Ca, ab, five ex CA, CE, five CA, CD. Datae autem funt rectae CA, CD, data igitur eft fumma quadratorum ex DL, KE. Data igitur oftenfa funt duo puncta F, G a quibus inflexae FH, GH utcunque ad circumferentiam, abfcindunt fegmenta KE,



LD datis punctis D, E adjacentia, quae faciunt fummam quadratorum ex ipfis datam. Quae fuerunt invenienda.

Componetur vero ita.

Sit AB diameter circuli pofitione et magnitudine data, et in ea data fint duo puncta D, E intra vel extra circulum aequaliter diftantia a centro C. Rectis CD, CA inveniatur tertia proportionalis CR, cui aequalis ad contrarias centri partes ponatur CS in diametro. Ducatur ad circumferentiam recta CZ

ipſi RC ad rectos angulos, et jungatur RZ, cui aequalis ducatur RF parallela ipſi ZC, et compleatur parallelogrammum FRSG; puncta F, G erunt ea quae invenienda fuerunt, hoc eſt, ſi ab ipſis ad circumferentiam utcunque inflectantur rectae FH, GH diametro AB occurrentes in K, L, erunt quadrata ex KE, LD ſegmentis punctis E, D adjacentibus ſimul aequalia ſpatio dato, duplo ſcilicet quadratorum ex CA, CD, ſive quadratis ex AD, DB. Atque haec eadem eſt conſtructio cum ea quam tradit Fermatius in pag. 118. operum.

Occurrat enim ZC rectae FG in X et circumferentiae rurſus in Y, et ducatur Xa circulum contingens in a, occurratque diametro AB in b; per H vero ducatur recta ipſi AB parallela, quae circumferentiae rurſus occurrat in c, et rectis XZ, Xa in d, g. Juncta autem GD occurrat ipſi XC in V, et quoniam eſt XV ad VC, ut (XG ad DC, hoc eſt ut) FX ad CE, in recta linea erunt puncta F, V, E; ducatur, occurratque rectae Hc in f, GD vero eidem Hc occurrat in e. Denique jungantur aC, aV.

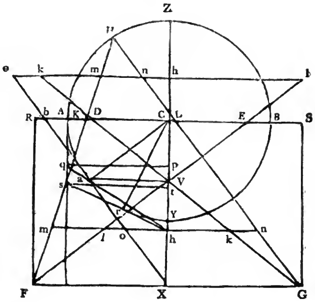
Quoniam igitur Xa circulum contingit, rectus erit angulus XaC; quadrata propterea ex Ca, aX ſimul aequalia erunt (quadrato ex CX, ſive RF, hoc eſt quadrato ex RZ, hoc eſt) quadratis ex ZC, CR, quorum aequalia ſunt quadrata ex Ca, CZ; reliquum igitur quadratum ex aX aequale eſt reliquo quadrato ex CR; aequalis igitur eſt recta aX ipſi CR, hoc eſt rectae FX. Et quoniam eſt CR ad CA, ut CA ad CD, hoc eſt Xa ad aC, ut aC ad CE; et eſt Xa ad aC, ut aC ad ab; erit ab aequalis ipſi CE. Et quoniam eſt XV ad VC, ut (FX ad CE, hoc eſt ut) Xa ad ab, erit aV parallela ipſi Cb. Eſt autem FX ad df, ut (XV ad VD, hoc eſt ut) Xa ad ag, et aequales oſtenſae ſunt

FX, Xa, quare aequales ſunt df, ag. Quadratum igitur ex df aequale eſt quadrato ex ag, hoc eſt rectangulo Hgc, quia ag circulum contingit; commune apponatur quadratum ex Hd, et quadrata ex Hd, df ſimul aequalia erunt quadrato ex gd. Sunt autem quadrata ex eH, Hf ſimul dupla quadratorum ex Hd, df, quia bifariam ſecta eſt ef in d, nam bifariam ſecta eſt FG in X, ergo eadem dupla ſunt quadrati ex gd. Eſt vero, propter parallelas, quadratum ex eH ad quadratum ex DL, ut quadratum ex Hf ad quadratum ex KE; igitur ut quadrata ex eH, Hf ſimul ad quadrata ex DL, KE ſimul, ita eſt (quadratum ex eH ad quadratum ex DL, et ita eſt quadratum ex eG ad illud ex GD, et ita quadratum ex dX ad illud ex XC, et ita eſt) quadratum ex gd ad quadratum ex bC; et quadrata ex eH, Hf dupla oſtenſa fuerunt quadrati ex gd, igitur quadrata ex DL, KE ſimul dupla ſunt quadrati ex bC, hoc eſt quadratorum ex Ca, ab, ſive ex CA, CD; hoc eſt quadrata ex DL, KE ſimul aequalia ſunt quadratis ex AD, DB. Q. E. D.

Cor. Et ſi ducatur recta kl parallela ipſi AB, quae poſitione data ſit, et ipſis XZ, GD, FE occurrat in h, k, l, rectis vero FH, GH in m, n; data erit ſumma quadratorum ex kn, ml.

Occurrat enim Xa ipſi kl in o; et quoniam datae ſunt Xa, kl poſitione, datum erit punctum o, et datum eſt h, recta igitur oh magnitudine data eſt. Eſt autem, propter parallelas, quadratum ex kn ad quadratum ex DL, ut quadratum ex ml ad illud ex KE, igitur ſumma quadratorum ex kn, ml eſt ad ſummam eorum ex DL, KE, ut (quadratum ex Kn ad illud ex DL, hoc eſt ut quadratum ex nG ad illud ex GL, hoc eſt

ut quadratum ex hX ad quadratum ex CX, hoc eſt ut) quadratum ex ho ad quadratum ex Cb. Et ſumma quadratorum ex DL, KE aequalis eſt duplo quadrati ex bC, igitur ſumma



quadratorum ex kn, ml aequalis eſt duplo quadrati ex oh. Data autem eſt oh, quare et ſumma quadratorum ex kn, ml data eſt.

P R O P. LXXXIV.

Quâ praecedens magis generalis redditur.

" DATO poſitione circulo AZB cujus centrum eſt C, dataque " poſitione recta kl ad quam recta Ch a centro eſt perpendi-

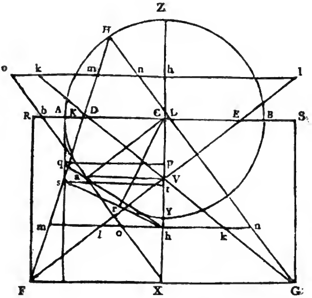
" cularis, et in kl datis duobus punctis k, l aequaliter a puncto h distantia; data erunt alia duo puncta a quibus ad circumferentiam utcunque inflexis duabus rectis, abscindent eae segmenta rectae kl punctis k, l adjacentia ex quibus summa quadratorum data erit."

Ducatur diameter AB parallela ipsi kl; si igitur inveniantur duo puncta F, G, et data esse ostendantur duo puncta D, E in diametro AB aequaliter a centro distantia, ita ut a punctis F, G inflexae utcunque ad circumferentiam abscindent segmenta diametri AB punctis D, E adjacentia ex quibus summa quadratorum data erit, et ita ut juncta GD transeat per datum punctum k, et juncta FE per datum punctum l; patet ex Corollario praecedentis, easdem inflexas abscindere duo segmenta rectae kl punctis k, l adjacentia ex quibus summa quadratorum data erit.

Occurrat Ch circumferentiae in Y, Z; constat igitur, ex praecedente, ducendam esse a dato puncto k rectam kD occurrentem ipsis AB, YZ in D, V, ita ut sumptâ ipsis CV, CY tertia proportionali CX, et per X ducta FX parallela ipsi AB, quae occurrat ipsi kd in G, sint etiam GX, AC, CD proportionales.

Factum sit; est igitur, propter parallelas, ut kh ad DC, ita hV ad VC, quare et rectangulum kh, XG est ad rectangulum DC, XG, hoc est, ex hypothesi, ad quadratum ex AC, ut hV ad VC, hoc est ut rectangulum hV, VC ad quadratum ex VC. Ad circumferentiam ducatur Va ipsi AB parallela, et quoniam rectus est angulus CVa, et proportionales sunt XC, CY, sive Ca et CV, erit quadratum ex Va aequale rectangulo XV, VC. Et quoniam est XV ad VC, ut (XG ad DC, hoc est ut)

quadratum ex XG ad rectangulum XG, DC, hoc est ad quadratum ex AC; et est XV ad VC, ut quadratum ex aV ad quadratum ex VC, quia proportionales sunt XV, Va, VC; erit quadratum ex XG ad quadratum ex AC, ut quadratum ex aV ad illud ex VC, quare et recta XG est ad ipsam AC, ut aV ad VC, et invertendo, AC ad XG, ut CV ad Va. Ut igitur rect-



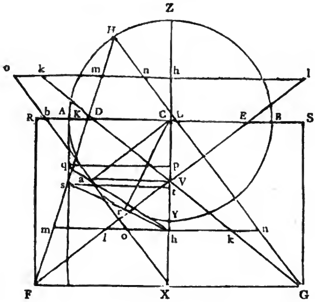
angulum kh, AC ad ipsum kh, XG, ita quadratum ex CV ad rectangulum aV, VC; ostensum autem fuit rectangulum kh, XG ad quadratum ex AC, ut rectangulum hV, VC ad quadratum ex VC; igitur, ex aequali in proportione perturbata, est kh, AC rectangulum ad quadratum ex AC, ut rectangulum hV, VC ad ipsum aV, VC; quare ut recta kh ad ipsam

AC, ita eſt recta hV ad Va. Et datae ſunt kh, AC, quare data eſt ratio rectae hV ad Va; et rectus eſt angulus hVa, juncta igitur ha, triangulum hVa ſpecie datum eſt. Quoniam igitur data eſt recta hV poſitione, et datum punctum h, datusque angulus Vha, recta ha poſitione data eſt. Eſt autem et circumferentia poſitione data; datum igitur eſt punctum a, quare et punctum V, et datum eſt k punctum; recta igitur kV poſitione data eſt. Et propter datas CV, CY data erit recta CX, quare et punctum X, et recta XG poſitione et punctum G data ſunt. Quod erat oſtendendum.

Vide rectam lk quae eſt extra circulum.

Quoniam vero ad compoſitionem requiritur ut ponatur in hc recta hp aequalis ipſi hk, et ducatur pq parallela ipſi AC et eidem aequalis, et ut juncta hq circumferentiae occurrat in quodam puncto a, ita enim ſi ducatur ad hc recta aV parallela ipſi qp, habebit hV ad Va eandem rationem quam habet hp ad pq, hoc eſt quàm kh habet ad CA; manifeſtum eſt ſi hq non occurrat circumferentiae non poſſe ſolvi Problema. In caſu autem in quo punctum h eſt intra circulum, ſemper occurret hq circumferentiae; ſi autem h fuerit extra circulum, ducatur ab eo recta hr circulum contingens in r, igitur omnis recta quae cadit intra contingentem hr circulo occurret, quae extra cadit ei non occurret. Ut vero intra cadat neceſſe eſt rectam kh majorem eſſe contingente hr; quod ita oſtenditur. Ducatur As parallela ipſi hC, occurratque ei contingens hr in s, et ducatur ad hC recta st parallela ipſi AC, ſive ipſi qp, et jungatur Cr. Quoniam igitur in triangulis sth, Crh recti ſunt anguli sth, Crh, communis autem ths cui aequalia latera st, Cr ſunt oppoſita, erit et th aequalis ipſi hr. Quaevis

autem recta a puncto h ducta, quae circulo occurrit, necessariò rectae sA occurret supra punctum s, recta autem hq, quae, ex hypothesi, circumferentiae occurrit, secat rectam sA in q, et propterea recta qp parallela ipsi st cadet supra eam;



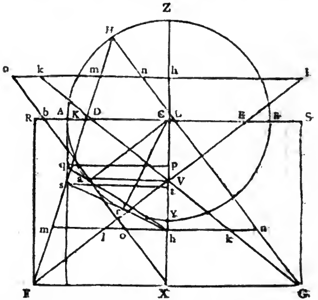
est igitur hp major ipsa ht, hoc est kh major est contingente hr. Hisce praemissis,

Componetur Problema ita.

Vide rectam kl quae est extra circulum.

Sit kl recta positione data, et data sint puncta k, l; ducatur a centro recta Ch ad kl perpendicularis, igitur, ex hypothesi, aequales sunt lh, hk, et, in casu quo kl circulo non occurrit, sit kh major recta hr quae circulum in r contingit.

Ponatur autem in hC recta hp aequalis ipsi kh, et ducatur pq parallela et aequalis ipsi AC, igitur, ut ostensum, juncta hq circumferentiae occurret. Sit a alterum ex punctis occursus, et ad hC ducatur aV parallela ipsi AC, et ipsis CV, CY tertia



proportionalis inveniatur CX, et per X ducatur recta FX parallela ipsi AB, eique occurrat juncta Vk in G, eademque ipsi AB occurrat in D; erunt rectae GX, AC, CD proportionales.

Jungatur enim Ca, et quoniam proportionalēs sunt XC, CY, CV, erit rectangulum XC, CV aequale quadrato ex CY, sive Ca; et, ablato communi quadrato ex CV, erit rectangulum XV, VC aequale quadrato ex Va. Et quoniam est hp ad pq, hoc est hk ad AC, ut hV ad Va, erit, permutando, kh

ad hV, ut AC ad aV; eſt autem ut kh ad hV, ita DC ad CV; igitur ut AC ad aV, ita eſt DC ad CV, et quoniam rectangula XG, DC et XV, VC ſuper ipſas DC, CV ſunt ſimilia, erit[a] quadratum ex AC ad quadratum ex aV, ut rectangulum XG, DC ad ipſum XV, VC. Eſt autem quadratum ex aV aequale rectangulo XV, VC, quadratum igitur ex AC aequale eſt rectangulo XG, DC, et propterea proportionales ſunt rectae XG, AC, CD. Q. E. D. [a] 22. 6.

Praeterea quoniam oſtenſum fuit in analyſi quadratum ex GX eſſe ad quadratum ex AC, ut quadratum ex aV ad illud ex VC; componendo, erit quadratum ex GX una cum eo ex AC ad quadratum ex AC, ut quadrata ex aV, VC ſimul, hoc eſt quadratum ex AC ad quadratum ex VC. Et eſt quadratum ex CX ad quadratum ex CY, ſive AC, ut quadratum ex AC ad illud ex VC; igitur quadrata ex XG, AC ſimul ſunt aequalia quadrato ex CX. Si igitur fiat CR aequalis ipſi XG, et ducatur ad XG recta RF parallela ipſi CX, erit quadratum ex RF, hoc eſt ex CX aequale quadratis RC, CA, et propterea, factâ CE aequali ipſi DC, F, G ſunt, per Caſ. 2. Prop. 83. puncta a quibus ſi inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae FH, GH abſcindentes ſegmenta KE, DL diametri punctis D, E adjacentia, quadrata ex KE, DL ſimul aequalia erunt ſpatio dato, quadratis ſcilicet ex AD, DB; et per Cor. Prop. 83. eaedem rectae FH, GH abſcindent ſegmenta ml, kn rectae kl, datis punctis k, l adjacentia, quorum quadrata ſimul aequalia erunt dato ſpatio, duplo ſcilicet quadrati ex oh. Quod erat oſtendendum.

Dom. Matthaeus Stewart eandem Fermatii Propoſitionem quae in Caſ. 2. Prop. 83. habetur, adhuc magis generalem

reddidit Propositione sequente, quam multis abhinc annis mihi communicavit, viz. [Vid. fig. Cas. 2. Prop. 83.]

Data positione et magnitudine diametro AB circuli, cujus centrum est C; datisque in AB duobus punctis D, I quae inaequaliter a centro distant ad contrarias ejus partes; data erunt alia duo puncta a quibus si inflectantur utcunque ad circumferentiam duae rectae, quarum altera diametro occurrit in K, reliqua vero ipsi in L, datum erit quadratum ex KI una cum spatio ad quod quadratum ex DL eandem habet rationem quam habet recta DC ad ipsam CI. Propositio autem haec investigari et ostendi potest modo non multum dissimili ei qui in Cas. 2. Prop. 83. adhibitus fuit.

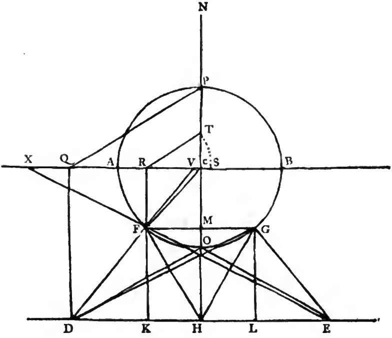
PROP. LXXXV.

Ex qua quinta Fermatii Propositio immediate sequitur.

" DATO positione et magnitudine circulo, et rectâ linea datâ " positione; data erunt, in recta huic parallela, duo puncta " a quibus si ad circumferentiam utcunque inflectantur duae " rectae summa quadratorum ex inflexis habebit ad triangu- " lum inflexis et rectâ quae duo puncta conjungit conten- " tum, rationem datae rationi eandem."

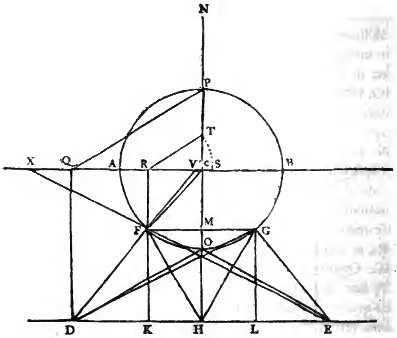
Sit circulus positione datus cujus diameter positione data sit AB et centrum C. Et puta Porisma verum esse, data scilicet esse duo puncta D, F in recta ipsi AB parallela a quibus utcunque inflexis DF, EF ad circumferentiam, summa quadratorum ex DF, EF habebit ad triangulum ipsis DF, FE et junctâ DE contentum rationem eandem datae rationi quam

habet a ad b. Per punctum F ducatur FG parallela ipsi DE, occurratque circumferentiae rursus in G; bifariam autem secetur DE in H, et ad DE ducantur perpendiculares FK, GL. Quoniam igitur, ex hypothesi, summa quadratorum ex DF, FE habet ad DFE triangulum rationem quam habet a ad b;



et quoniam similiter eandem habet rationem summa quadratorum ex junctis DG, GE ad triangulum DGE; est autem triangulum DFE aequale [a] triangulo DGE, igitur erit summa quadratorum ex DF, FE aequalis summae quadratorum ex ipsis DG, GE. Est vero summa quadratorum ex DF, FE aequa- [a] 37. 1.

b 47. 1. lis [b] quadratis ex DK, KE et duplo quadrati ex FK, hoc eſt [c]
c 9. 2. duplo quadratorum ex DH, HK, KF, hoc eſt duplo eorum ex DH, HF. Et ſimiliter ſumma quadratorum ex DG, GE aequalis eſt duplo quadratorum ex DH, HG. Eſt igitur quadratum ex HF aequale quadrato ex HG, et recta HF aequalis



rectae HG. Bifariam ſecetur FG in M, et jungatur HM; eſt
d 8. 1. igitur [d] angulus FMH rectus, et quoniam HM bifariam et ad
e Cor. 1. 3. rectos angulos ſecat rectam FG in circulo, tranſibit [e] recta HM per centrum C. Producatur HC ad N ut ſit HN bis ad HD, ut (a ad b, hoc eſt ut ſumma quadratorum ex DF, FE ad tri-

angulum DFE, hoc eſt ut) duplum quadratorum ex DH, HF ad triangulum DFE. Erit igitur ſumma quadratorum ex DH, HF ad (duplum trianguli DFE, hoc eſt ad) rectangulum DE, FK, ut (recta NH ad ipſam DE, hoc eſt ut) rectangulum NH, FK ad ipſum DE, FK. Quare quadrata ex DH, HF ſimul aequalia ſunt rectangulo NH, FK, hoc eſt rectangulo NH, HM. Commune auferatur quadratum ex HM, et quadrata ex DH, FM ſimul aequalia erunt HM, MN rectangulo. Occurrat HN circumferentiae in punctis O, P, et inflexis DO, EO, oſtendetur, ut in praemiſſis, quadratum ex DH aequale rectangulo HO, ON. Similiter, inflexis DP, EP, quadratum ex DH aequale erit rectangulo HP, PN. Igitur rectangulum HO, ON aequale eſt ipſi HP, PN, quare et recta HO aequalis eſt ipſi PN; et eſt OC aequalis rectae CP, et propterea eſt HC aequalis ipſi CN.

Ad AB ducatur DQ parallela ipſi HC, et jungatur FC. Et quoniam oſtenſum fuit quadrata ex DH, FM ſimul aequalia eſſe rectangulo HM, MN, commune addatur quadratum ex MC, et quadrata ex DH, FC ſimul aequalia erunt quadrato ex HC. Quadrata vero ex DH, FC aequalia ſunt quadratis ex QC, CP, hoc eſt quadrato ex juncta PQ, quod propterea aequale erit quadrato ex HC, et recta PQ ipſi HC erit aequalis. Quoniam vero data eſt ratio a ad b, hoc eſt ratio quam habet HN bis ad HD, data erit ratio quam habet HC pars quarta duplae ipſius HN ad HD, hoc eſt quam habet PQ ad ipſam QC. Specie igitur [f] datum eſt triangulum rectangulum CPQ, et data eſt CP magnitudine, quare et PQ, QC, hoc eſt CH, HD magnitudine datae erunt. Sed et poſitione data eſt CH quae a dato puncto C ad rectos angulos poſitione datae AB ducta

[f] 46. Dat.

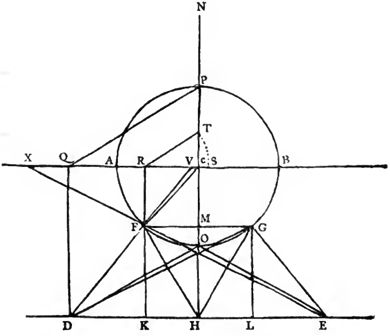
eſt; datum igitur eſt punctum H, et recta HD poſitione data; et datae ſunt HD, DE magnitudine, quare data ſunt D, E puncta. Quae fuerunt invenienda.

Componetur ita.

Sit AB diameter circuli poſitione et magnitudine data, et centrum ſit C. Ratio autem quam ſumma quadratorum habere debet ad triangulum ſit ea quam data recta RS quater habet ad datam RC; et ſint puncta invenienda in recta quae ipſi AB parallela eſt. Et quoniam debet eſſe PQ ad QC, ut RS ad RC, et eſt PQ major QC, debet RS major eſſe RC. Sit ita, et ducatur CP ad rectos angulos ipſi AB, et ad eam a puncto R ducatur RT aequalis ipſi RS; ad AB vero a puncto P ducatur PQ parallela ipſi RT, et a puncto Q ad rectos angulos ipſi QB ducatur QD aequalis rectae QP; denique ad PC ducatur DH parallela ipſi QC, et producatur ad E ut aequalis ſit HE ipſi HD; erunt D, E puncta invenienda.

Ab ipſis enim D, E punctis inflectantur utcunque ad circumferentiam rectae DF, EF, et ad CH ducatur FM parallela ipſi DH, et producatur HC ad N ut aequales ſint HC, CN, et jungatur CF. Et quoniam quadratum ex CH, ſive PQ eſt aequale (quadratis ex QC, CP, hoc eſt quadratis ex DH, FC, hoc eſt) quadratis ex DH, FM, MC, commune auferatur quadratum ex MC, et rectangulum HM, MN aequale erit quadratis ex DH, FM, ſive ex DH, HK; commune addatur quadratum ex HM, ſive KF, erit rectangulum NH, HM aequale tribus quadratis ex DH, HK, KF. Igitur tria haec quadrata ſunt ad rectangulum DE, KF, ut (rectangulum NH, HM ad idem rectangulum DE, KF, hoc eſt ut) recta NH ad ipſam DE. Duplum igitur quadratorum ex DH, HK, KF eſt ad rectan-

gulum DE, KF, ut recta NH bis ad DE; et duplum eorundem quadratorum, hoc est quadrata ex DF, FE simul sunt ad triangulum DFE dimidium scilicet rectanguli DE, KF, ut



recta NH bis ad DH dimidium ipsius DE, hoc est ut CH quater, sive PQ quater ad QC, hoc est ut RT, sive RS quater ad RC, hoc est in ratione data. Q. E. D.

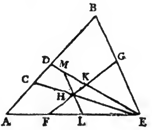
Cor. Et productis DF, EF ad AB (vel ad quamvis rectam ipsi parallelam) in V, X, manifestum est summam quadratorum ex VF, FX esse ad triangulum VFX, ut summa quadra-

torum ex DF, FE ad triangulum DFE, hoc est in ratione data. Et haec est Fermatii Propositio quinta.

PROP. LXXXVI.

" SIT recta AB harmonice secta in C, D, hoc est ut BA sit ad " AC, ut BD ad DC; et a quovis puncto E ducantur EA, EC, " ED, EB; recta GF utcunque ipsis occurrens harmonice se- " cabitur in punctis occursus."

Rectis EA, EC, ED, EB occurrat GF in punctis F, H, K, G, et per H ducatur LHM parallela ipsi EB, et occurrat rectis EA, ED in L, M. Est igitur, propter parallelas, GF ad FH, ut EG ad LH, hoc est ut EG ad HM, quia LM bifariam secta est [a] in H; est autem EG ad HM, ut GK ad KH; ut igitur GF ad FH, ita est GK ad KH.

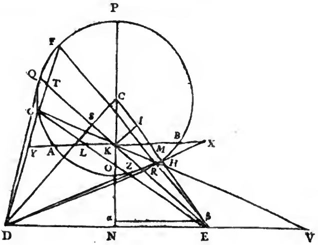


[a] Pr. 82.

PROP. LXXXVII.

" SIT circulus cujus diameter OCP, et in ipsa sumantur duo " puncta K, N ad easdem centri C partes, quae faciunt CK, " CO, CN proportionales; si per alterutrum punctorum K, " N, puta N, ducatur ND ad rectos angulos ipsi CN, et per " reliquum punctum K ducatur utcunque recta linea KE quae " occurrat ipsi ND in E, et circumferentiae in Q, R punctis; " erit QE ad ER, ut QK ad KR."

Cas. 1. Quando punctum E eſt extra circulum. A puncto E ad centrum C ducatur recta EC, et ad EC a puncto K ducatur perpendicularis KI; quoniam igitur puncta E, N, K, I ſunt in circulo, quia anguli ad N, I ſunt recti, erit rectangulum EC, CI (aequale rectangulo NC, CK, hoc eſt) quadrato ex ſemidiametro CO; quare rectae a puncto E ductae ad puncta in quibus KI circumferentiae occurrit, circulum contingent.



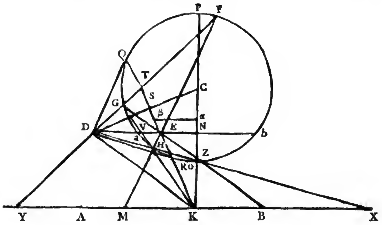
Recta igitur EQ quae circumferentiae occurrit in Q, R et conjungenti tactus in K, in iiſdem punctis ſecabitur [a] ita ut [a] Pr. 73.
QE ſit ad ER, ut QK ad KR.

Cas. 2. Quando punctum E eſt intra circulum. Quoniam proportionales ſunt CK, CO, CN, et eſt EN perpendicularis ad CK, rectae quae a puncto K ducuntur ad puncta in quibus EN circumferentiae occurrunt, circulum contingent, et recta

KQ rectae quae jungit puncta contactus occurrit in E, est
[a] Pr. 73. igitur [a] QK ad KR, ut QE ad ER.

Et contra, si in circuli diametro OCP sumantur duo puncta K, N ad easdem centri partes, et per alterutrum eorum ducatur NE ad rectos angulos diametro, et per reliquum punctum K ducatur utcunque recta KE occurratque ipsi NE in E, et circumferentiae in Q, R punctis; fueritque QE ad ER, ut QK ad KR; proportionales erunt CK, CO, CN.

Si enim non fuerint, proportionales sint CK, CO, Cα et per α ducatur ad EK recta $\alpha\beta$ parallela ipsi NE; igitur, per hanc



Propositionem, erit ut Qβ ad βR, ita (QK ad KR, hoc est, ex hypothesi, ut) QE ad ER; quod fieri non potest.

Vel directe ita, a centro C ducatur ad QR perpendicularis CS quae bifariam secabit ipsam QR. Quoniam igitur ut QE ad ER, ita est QK ad KR, et bifariam secta est QR in S, per Cas. 1. Prop. 64. rectangulum ES, SK aequale est quadrato ex

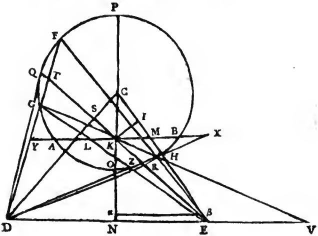
SR. Puncta autem C, S, N, E sunt in circulo quia recti sunt anguli ad S, N, quare rectangulum SK, KE aequale est ipsi CK, KN; et quadrata ex CS, SK simul aequalia sunt quadrato ex CK. Totum igitur, si fuerit punctum E extra circulum, vel reliquum si fuerit intra, quadratum scilicet ex CS una cum rectangulo ES, SK, hoc est una cum quadrato ex SR, hoc est quadratum ex semidiametro CR, aequale est toti vel reliquo rectangulo scilicet KC, CN. Proportionales igitur sunt CK, CO, vel CR, et CN.

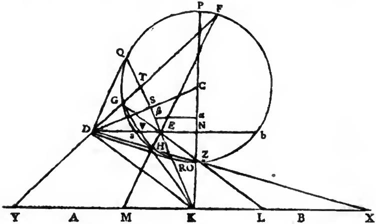
PROP. LXXXVIII.

" SIT circulus cujus diameter OCP, et in ipsa sumantur duo
" puncta K, N ad easdam partes centri C quae faciunt CK,
" CO, CN proportionales, et a puncto N ductâ ND ad rectos
" angulos ipsi CN, sumantur in recta ND duo puncta D, E
" ad contrarias partes ipsius N si punctum N fuerit extra cir-
" culum, ad easdem autem si fuerit intra, sitque rectangu-
" lum DN, NE aequale rectangulo ON, NP; ab alterutro au-
" tem punctorum D, E, puta E, si fuerit utrumque extra cir-
" culum, a puncto vero E quod intra circulum est, si unum
" fuerit extra et reliquum intra circulum, ducatur recta EK
" quae circumferentiae in Q, R occurrat; junctae DQ, DR
" circulum contingent."

Jungatur DC quae ipsi QR occurrit in S, et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, erit rectangulum NC, CK aequale quadrato ex CO; auferantur aequalia haec a quadrato ex CN, si fuerit N extra circulum, at si fuerit intra, ab ipsis

auferatur quadratum ex CN, erit, in utroque Casu, rectangulum CN, NK aequale rectangulo (ON, NP, hoc est, ex hypo-





thesi, rectangulo) DN, NE. Est igitur DN ad NC, ut KN ad NE, et sunt circa aequales angulos DNC, KNE, rectus enim

uterque eſt; aequiangula igitur [b] ſunt triangula DNC, KNE, et angulus CDN aequalis angulo NKE, ſive angulo CKS; et in triangulis DCN, KCS communis eſt angulus DCN, igitur angulus KSC aequalis eſt angulo recto DNC; quare [c] in circulo ſunt D, N, K, S puncta. Rectangulum igitur DC, CS aequale eſt ipſi NC, CK, hoc eſt quadrato ex ſemidiametro CO, et propterea rectae DQ, DR circulum contingunt, rectus enim eſt angulus CSK.

[b] 6. 6.

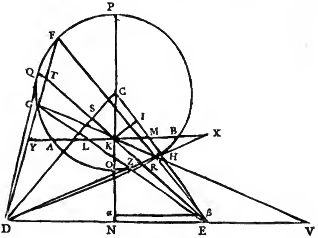
[c] conv. 22. aut 21. 3.

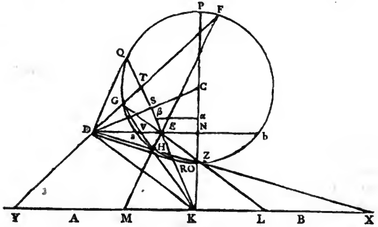
PROP. LXXXIX.

" SIT recta linea AB, et duo puncta extra eam D, E, et ab eorum alterutro D ductâ utcunque recta DGF ad circulum OGP cujus diameter OP, junctae EG, EF abſcindent aequalia rectae AB ſegmenta adjacentia puncto K in quod cadit perpendicularis CK a centro C ducta ad rectam AB; erit juncta DE parallela rectae AB; occurrat autem CK ipſi DE in N, et circumferentiae in O, P, proportionales erunt CK, CO, CN; et rectangulum DN, NE aequale erit rectangulo ON, NP. Et contra, ſi fuerint CK, CO, CN proportionales, et CKN perpendicularis ad ipſas AB, DE, fueritque rectangulum DN, NE aequale ipſi ON, NP; ſi ab alterutro punctorum D, E ducatur DGF utcunque ad circulum, et jungantur EG, EF, abſcindent hae aequalia rectae AB ſegmenta puncto K adjacentia."

Pars 1. Jungatur EK occurratque circumferentiae in Q, R, et jungantur DQ, DR; quoniam igitur a puncto D ducta eſt DQ ad circulum, et juncta EQ nullum aufert ſegmentum

puncto K adjacens, tranſit enim per ipſum K, recta DQ circulum continget; ſi enim ei rurſus occurreret, recta a puncto





E ad hunc occurſum ducta auferret aliquod ſegmentum adjacens puncto K, nullum autem aufert, quia recta EQ aufert

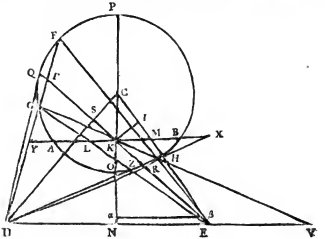
nullum, recta igitur DQ circulum contingit; similiter ostendetur rectam DR contingere circulum. Jungatur DC occurratque QR in S, et DF eidem in T occurrat, et EG, EF ipsi AB occurrant in L, M; quoniam igitur rectae DQ, DR circulum contingunt, et recta DF ipsi QR occurrit in T, erit [a] FD ad DG, ut FT ad TG; harmonicales igitur sunt ED, EG, ET, EF, et quoniam recta LKM a tribus ipsarum EG, ET, EF bifariam, ex hypothesi, secta est in K, erit LM, sive AB, parallela quartae * ED. Recta autem DC ad centrum ducta ab occursu contingentium DQ, DR ad rectos angulos est ipsi QR, et rectus est angulus DNK, parallela enim ostensa est DN ipsi AB, sunt igitur in circulo puncta D, N, K, S; quare angulus CDN aequalis est [b] ipsi NKE, et triangula rectangula DNC, KNE erunt aequiangula; ut igitur DN ad NC, ita est KN ad NE, et rectangulum DN, NE aequale erit ipsi CN, NK. Quoniam vero puncta D, N, K, S sunt in circulo, rectangulum NC, CK aequale [c] est (ipsi DC, CS, hoc est) quadrato ex semidiametro CO; proportionales igitur sunt CK, CO, CN; et propterea, ut ostensum fuit in Prop. 88. rectangulum CN, NK, hoc est ipsum DN, NE aequale est rectangulo ON, NP.

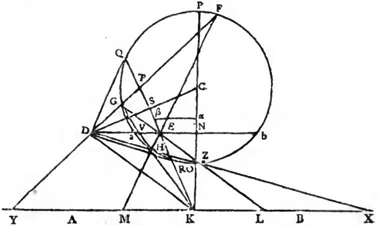
[a] Pr. 73.
* Pr. 82.
[b] 22. aut 21. 3.
[c] Cor. 36. 3.

PARS 2. Sit jam CK perpendicularis ad ipsas AB, DE, et proportionales sint CK, CO, CN, sitque rectangulum DN, NE aequale rectangulo ON, NP; si ab alterutro punctorum D, E, puta D, ducatur recta DGF utcunque ad circulum, et jungantur EG, EF quae ipsi AB occurrant in L, M; erit LK aequalis ipsi KM.

Primò, sit punctum D a quo ducta est DGF extra circulum, et jungatur EK quae circumferentiae occurrat in Q, R;

et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, et DN perpendicularis ad CN, et rectangulum DN, NE aequale ipsi ON,





[d] Pr. 88. NP, junctae DQ, DR circulum contingent [d]. Occurrat DF recta QR in T, recta igitur DF harmonicè secta est in punctis D,

[e] Pr. 73.

G, T, F, et rectae ED, EG, ET, EF sunt harmonicales. Recta autem LM parallela est uni ipsarum ED, quare bifariam secta erit a reliquis tribus quae ipsi occurrunt in punctis L, K, M, hoc est aequales sunt LK, KM. Et similiter, si a puncto E, si fuerit extra circulum, ducatur recta EHF ad circulum, et jungantur DF, DH quae ipsi A, B occurrant in Y, X, ostendetur YK aequalis ipsi KX.

Sit autem punctum E intra circulum, et per ipsum ducatur utcunque recta HEF circumferentiae occurrens in H, F, et junctae DH, DF rectae AB occurrant in X, Y; erit et in hoc casu KX aequalis ipsi KY. Occurrat DF circumferentiae rursus in G, et juncta KE occurrat ipsi DF in T, juncta vero KG ipsi DE occurrat in V. Igitur harmonicales sunt ED, EG, ET, EF, ut ostensum fuit; et quoniam inter ipsas ducta est GK, harmonicè secta erit [c] in punctis V, G, K in quibus tribus ipsarum ED, EG, ET occurrit, et puncto in quo quartae EF occurrit. Sed eadem recta GK harmonicè secatur [d] in punctis V, G, K, et puncto in quo circumferentiae rursus occurrit; ergo quartum hoc punctum et est in recta EF, et in circumferentia; erit igitur in ipsarum intersectione H; transit igitur GK per punctum H, et propterea harmonicales sunt DG, DV, DH et juncta DK. Est autem recta YX parallela uni ipsarum DV, bifariam igitur secta erit a tribus reliquis in punctis Y, K, X, hoc est YK aequalis est ipsi KX.

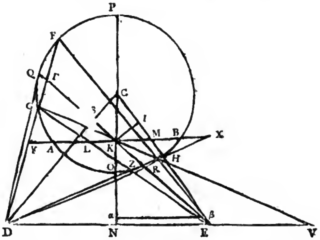
[c] Pr. 86.

[d] Pr. 87.

Cor. Hinc, quoniam ostensum fuit, ex hypothesi Partis primae, rectangulum DN, NE aequale esse rectangulo ON, NP, erit rectangulum GD, DF ad ipsum HE, EF, ut recta DN ad ipsam NE.

Si enim recta DE fuerit extra circulum, rectangulum GD, DF aequale est [f] quadrato ex DN una cum rectangulo ON, NP, hoc est, per Partem 1. hujus Prop. quadrato ex DN et rectangulo DN, NE, hoc est rectangulo ED, DN; similiter rectan-

f Vid. Dem. Pr. 63.



gulum HE, EF aequale ostendetur rectangulo DE, EN. Igitur est rectangulum GD, DF ad ipsum HE, EF, ut ED, DN rectangulum ad ipsum DE, EN, hoc est ut recta DN ad ipsam NE.

Vide fig. 2. pag. 570.

Si vero recta DE occurrat circulo in punctis a, b, erit rectangulum GD, DF, hoc est ipsum aD, Db excessus quadrati ex DN et quadrati ex aN, sive rectanguli ON, NP, hoc est, per Partem 1. erit rectangulum GD, DF excessus quadrati ex DN et rectanguli DN, NE, qui excessus aequalis est rectangulo ND, DE. Rectangulum autem HE, EF, sive aE, Eb excessus est quadrati ex aN, hoc est rectanguli ON, NP, sive, per Par-

tem 1. hujus, rectanguli DN, NE, et quadrati ex EN, qui excessus aequalis est rectangulo DE, EN. Igitur rectangulum GD, DF est ad ipsum HE, EF, ut rectangulum ND, DE ad ipsum DE, EN, hoc est ut recta DN ad ipsam NE.

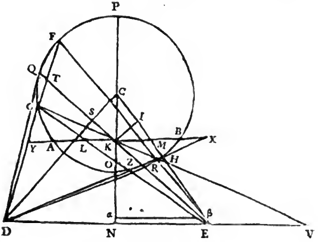
PROP. XC.

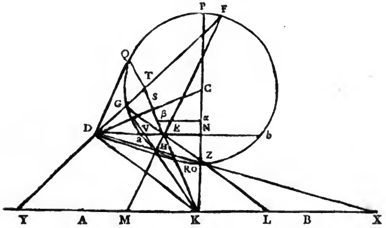
Quae est Porisma quod mihi proposuit D. Matth. Stewart.

" DATA positione recta AB, et circulo OGP cujus centrum est " C positione dato; data erunt duo puncta a quibus ad circumferentiam utcunque inflexis duabus rectis quae ipsi AB " occurrant, rectangulum contentum segmentis alterius inter " rectam AB et circumferentiam habebit ad rectangulum a " segmentis reliquae inter easdem lineas rationem eandem " datae rationi quam habet data recta a ad datam b."

Puta Porisma verum esse, et puncta D, E ea esse quae data fore affirmantur. Inflexis igitur utcunque ad circumferentiam rectis DF, EF quae ipsi rursus in G, H, et rectae AB in punctis Y, M occurrunt, habebit, ex hypothesi, rectangulum GY, YF ad ipsum FM, MH rationem eandem datae rationi a ad b. Jungatur EG quae ipsi AB occurrat in L, et circumferentiae rursus in Z; quoniam igitur a punctis D, E ad circumferentiam inflexae sunt DG, EG quae ipsi rursus in F, Z et rectae AB in punctis Y, L occurrunt, rursus, ex hypothesi, habebit GY, YF rectangulum ad ipsum GL, LZ rationem eandem rationi a ad b. Igitur rectangulum GY, YF est ad rectangulum FM, MH, ut idem GY, YF ad rectangulum GL, LZ, quod propterea aequale est ipsi FM, MH. Ad AB duca-

tur perpendioularis CK quae circumferentiae occurrat in O, P, et, si K fuerit intra circulum, occurrat AB circumferentiae





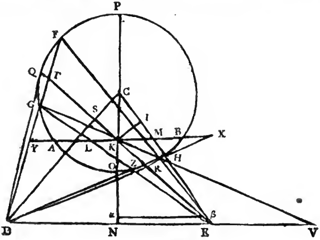
in A, B punctis, aequales igitur sunt AK, KB; et quoniam rectangulum GL, LZ aequale est ipsi FM, MH, erit et rect-

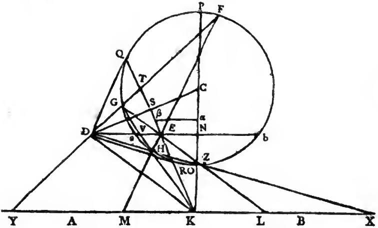
angulum AL, LB aequale ipſi AM, MB, quare recta LK ipſi KM eſt aequalis. Si vero punctum K fuerit extra circulum, rectangulum GL, LZ aequale eſt ipſi OK, KP una cum quadrato ex LK, et ſimiliter rectangulum FM, MH aequale eſt ipſi OK, KP una cum quadrato ex MK. Rectangulum igitur OK, KP una cum quadrato ex LK aequale eſt rectangulo OK, KP una cum quadrato ex MK; recta igitur LK aequalis eſt ipſi KM. Conſtat igitur eam eſſe affectionem punctorum D, E, ut ſi ab alterutro ipſorum D ducatur utcunque recta DGF ad circulum, et jungantur EG, EF, abſcindent hae a recta poſitione data AB ſegmenta LK, MK puncto K adjacentia quae inter ſe ſunt aequalia. Jungatur DE quae parallela erit rectae AB per Prop. 89. et ipſi DE occurrat CK in N, et quoniam CK perpendicularis eſt ad AB, erit, per Cor. Prop. 89. rectangulum GD, DF ad ipſum HE, EF, ut recta DN ad ipſam NE.

Quoniam igitur rectae EG, EF abſcindunt ab ipſa AB ſegmenta LK, MK adjacentia puncto K in quod cadit perpendicularis CK a centro ducta ad rectam AB, erit, per Prop. 89. rectangulum DN, NE aequale rectangulo ON, NP; igitur, in caſu in quo punctum N eſt extra circulum, addito communi quadrato ex DN, erit rectangulum ED, DN aequale (rectangulo ON, NP una cum quadrato ex DN, hoc eſt) rectangulo FD, DG; in caſu vero in quo N eſt intra circulum, occurrat DN circumferentiae in a, b, et quoniam rectangulum ON, NP aequale eſt quadrato ex aN, ſi a quadrato ex DN auferantur aequalia, rectangulum ſcilicet DN, NE et quadratum ex aN, erit reliquum rectangulum ED, DN aequale reliquo aD, Db, hoc eſt rectangulo FD, DG. Et quoniam, per eandem Prop.

89. proportionales sunt CN, CO, CK, erit rectangulum NC, CK aequale quadrato ex CO, et, in casu in quo K est intra circulum, ablato communi quadrato ex CK, erit rectangulum NK, KC aequale ipsi OK, KP; in casu vero in quo K est extra circulum, ablato ab iisdem aequalibus quadrato ex CN, erit rectangulum KN, NC aequale ipsi ON, NP; igitur, quoniam bifariam secta est OP in C, erit, in utroque casu, PN ad NO, ut PK ad KO. Juncta igitur GH transibit per punctum K per Cor. 2. ad finem Prop. 61. Occurrat GH rectae DE in V, et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, et NV perpendicularis ad CN, erit, per Prop. 87. GV ad VH, ut GK ad KH, et permutando, ut VG ad GK, ita VH ad HK; est autem, propter parallelas, VG ad GK, ut DG ad GY, et VH ad HK, ut EH ad HM; et propterea ut DG ad GY, ita est EH ad HM. Et est DF ad FY, ut EF ad FM, igitur ut rectangulum FD, DG ad rectangulum FY, YG, ita est rectangulum FE, EH ad ipsum FM, MH; et permutando, ut rectangulum FD, DG ad rectangulum FE, EH, ita est rectangulum FY, YG ad ipsum FM, MH. Et, per Cor. Prop. 89. rectangulum GD, DF est ad ipsum HE, EF, ut recta DN ad ipsam NE, quare et rectangulum GY, YF est ad ipsum HM, MF, ut recta DN ad ipsam NE. Ex hypothesi autem data est ratio rectanguli GY, YF ad ipsum HM, MF, eadem scilicet rationi datae a ad b; data igitur est ratio DN ad NE. Quoniam vero proportionales sunt CK, CO, CN per partem primam Prop. 89. et datae sunt CK, CO, data erit et CN, datumque erit rectan-
b Pr. 89. gulum ON, NP cui aequale [b] est rectangulum DN, NE. Quoniam igitur data est ratio DN ad ipsam NE, et datum est rectangulum ipsis contentum, specie et magnitudine datum est

rectangulum DN, NE, et propterea ipsius latera DN, NE magnitudine data sunt[c], sed et positione, et datum est punc- [c] 60. Dat.

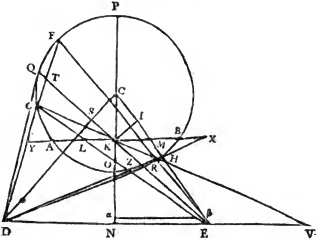


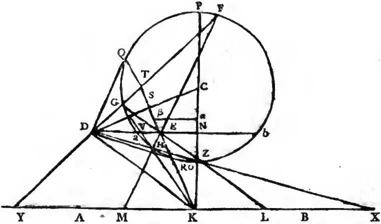


tum N, igitur D, E puncta data sunt. Quod erat ostendendum.

Componetur vero ita.

Sit AB recta positione data, et sit ratio data ea quam ha-





bet recta a ad rectam b. A centro C ducatur ad AB perpendicularis CK, occurratque circumferentiae in O, P, et ipsis

CK, CO sumatur tertia proportionalis CN, et per N ducatur DE parallela rectae AB; fiatque rectangulum aequale ipsi ON, NP simile autem rectangulo quod ipsis a, b continetur; et in recta DN ponatur ND aequalis alteri lateri inventi, lateri scilicet ejus quod ipsi a est homologum; et ad contrarias partes puncti N ponatur NE aequalis reliquo lateri, si AB circulo occurrat; ad easdem autem partes si non occurrat. Rectangulum igitur DN, NE aequale est ipsi ON, NP, et habet DN ad NE eandem rationem quam habet recta a ad ipsam b. Puncta autem D, E erunt puncta invenienda, hoc est, si ab ipsis inflectantur DF, EF ad circumferentiam, occurrantque ipsi rursus in G, H et rectae AB in Y, M, habebit rectangulum GY, YF ad ipsum HM, MF eandem rationem quam habet DN ad NE, hoc est quam habet a ad b.

Quoniam enim rectangulum DN, NE aequale est rectangulo ON, NP, erit, ut in analysi ostensum, rectangulum ED, DN aequale rectangulo FD, DG. Et quoniam proportionales sunt CK, CO, CN, erit, ut ibidem ostensum, PN ad NO, ut PK ad KO, quare juncta GH transibit per punctum K. Occurrat GH ipsi DE in V, et omnino ut in analysi, ostendetur rectangulum FD, DG esse ad rectangulum FE, EH, ut rectangulum FY, YG ad ipsum FM, MH. Quoniam vero rectangulum DN, NE aequale est ipsi ON, NP, erit, per Corollarium Prop. 89. rectangulum FD, DG ad ipsum FE, EH, ut recta DN ad rectam NE; igitur rectangulum FY, YG est ad ipsum FM, MH, ut recta DN ad ipsam NE, hoc est, ex constructione, ut recta a ad ipsam b.

Cor. Si igitur fuerint duo puncta D, E a quorum alterutro D ductâ DGF ad circulum, junctae EG, EF aequalia rectae AB

ſegmenta abſcindunt adjacentia puncto K in quod perpendicularis a centro C ad AB cadit, ſi CK occurrat junctae DE in N, DF vero et EF occurrant AB in Y, M; erit rectangulum GY, YF ad ipſum HM, MF, ut recta DN ad ipſam NE.

PROP. XCI.

Quae eſt Theorema cujus enuntiationem tradit Dom. Matthaeus Stewart in vol. 1. libri dicti " Eſſays and Obſerva-" tions phyſical, &c. Edinburgh 1754."

" SIT AB diameter circuli poſitione et magnitudine dati, oc-" curratque recta CD ipſi normalis in dato puncto C; non " autem ſit C centrum circuli, et datum ſit punctum D in recta " CD; ſitque quadratum ex CD majus rectangulo ACB, ſi ſit " punctum C intra circulum; ſi vero ſit extra, ſit quadratum " ex CD minus rectangulo ACB; producatur DC ad E, ut ſit " CE aequalis ipſi CD; data erunt duo puncta F, G extra rec-" tam DE, ut, ſi ab ipſis inflectantur FH, GH ad punctum " quodvis H in circumferentia, rectae DE occurrentes in K, " L, erit ſumma quadratorum ex DK, EK ad rectangulum " DLE in ratione data."

Theorema hoc eſt revera Poriſma, quod ut ſequitur inveſtigavi.

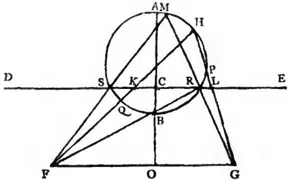
Cas. 1. Quando punctum C eſt intra circulum.

Puta verum eſſe Poriſma, occurratque recta DE circumferentiae in punctis R, S; quoniam igitur DE perpendicularis eſt ad diametrum AB, erit CR aequalis ipſi CS; et quoniam, ex hypotheſi, data eſt ratio ſummae quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE, data erit et ratio dimidii hujus ſum- [a] mae, hoc eſt [a] ratio quadratorum ex KC, CE ad rectangulum

[a] 9. aut 10. 2.

DL, LE. Inflectantur FR, GR ad punctum R, et similiter data erit ratio quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE. Igitur quadrata ex CR, CE sunt ad rectangulum DR, RE, ut quadrata ex KC, CE ad rectangulum DL, LE; et reliquum, rectangulum scilicet SK, KR erit [b] ad reliquum rectangulum SL, LR, ut quadrata ex CR, CE ad DR, RE rectangulum. Datae autem sunt DR, CR, CE, et propterea RE, data igitur est ratio quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE, et propterea data est ratio rectanguli SK, KR ad ipsum SL, LR.

[b] 19. 5.

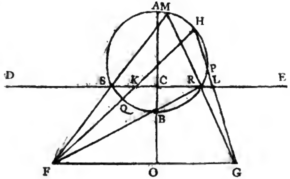


Occurrant rectae FH, GH circumferentiae rursus in Q, P, et quoniam rectangulum SK, KR aequale est rectangulo QK, KH, et SL, LR ipsi PL, LH, habebit rectangulum QK, KH ad ipsum PL, LH datam rationem quam habet summa quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE. Quoniam igitur duo sunt puncta F, G a quibus inflexis utcunque FH, GH ad circumferentiam quae ei rursus in Q, P et rectae DE in punctis K, L occurrunt, et est ratio rectanguli QK, KH ad ipsum PL, LH, eadem datae rationi quam habet summa qua-

dratorum ex CR, CE ad DR, RE rectangulum, data erunt puncta F, G per Prop. 90.

Componetur ita.

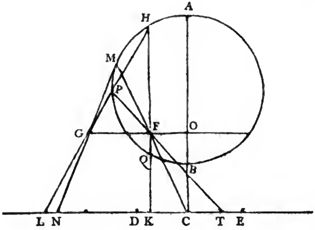
Inveniantur igitur puncta F, G, ut in Prop. 90. ostensum fuit; si ab ipsis utcunque inflectantur FH, GH ad circumferentiam, et rectae DE occurrant in K, L, habebit summa quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE datam rationem, quam scilicet habet duplum quadratorum ex CR, RE ad DR, RE rectangulum. Quoniam enim, ex constructione, rect-



angulum QK, KH est ad ipsum PL, LH, hoc est rectangulum SK, KR est ad ipsum SL, LR, ut summa quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE; erit reliquum, quadrata scilicet ex KC, CE ad reliquum rectangulum DL, LE, ut summa quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE. Igitur duplum quadratorum ex KC, CE, hoc est summa quadratorum ex DK, KE est ad rectangulum DL, LE, ut duplum quadratorum ex CR, CE ad rectangulum DR, RE, hoc est in ratione data.

CAS. 2. Quando punctum C est extra circulum.

Inflectantur utcunque, ut in primo casu, rectae FH, GH quae circumferentiae rursus occurrant in Q, P, et rectae DE in K, L punctis, et juncta FP occurrat ipsi DE in T. Igitur, ex hypothesi, data est ratio summae quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE; et quoniam inflexae FP, GP occurrunt ipsi DE in T, L, erit summa quadratorum ex DT, TE ad idem rectangulum DL, LE in eadem data ratione. Igitur



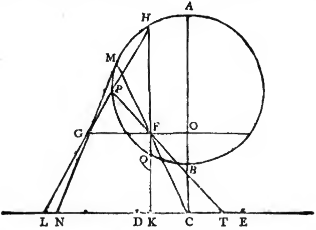
quadrata ex DK, KE aequalia sunt quadratis ex DT, TE, et dimidia ipsorum, quadrata scilicet ex KC, CE et quadrata ex TC, CE aequalia sunt; recta igitur KC aequalis est ipsi CT. Ea igitur est affectio punctorum F, G, ut si ab alterutro ipsorum G ducatur recta GPH ad circulum, junctae FH, FP et productae abscindunt aequalia segmenta rectae DE adjacentia puncto C in quod cadit diameter AB perpendicularis ad DE. Occurrat juncta GF ipsi AB in O, et per Cor. Prop. 90. erit

rectangulum PL, LH ad ipsum QK, KH, ut recta GO ad ipsam OF. Est autem PL, LH rectangulum aequale rectangulo AC, CB et quadrato ex LC; et similiter rectangulum QK, KH aequale est rectangulo AC, CB et quadrato ex KC; horum igitur ratio eadem est rationi GO ad OF. Jungatur CF et circumferentiae occurrat in M, et juncta MG occurrat ipsi DE in N. Igitur idem ostendetur de inflexis GM, FM, quod de ipsis GH, FH jam ostensum est, scilicet rectangulum AC, CB et quadratum ex NC esse ad rectangulum AC, CB, ut recta * GO ad ipsam OF. Ut igitur rectangulum AC, CB et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB, ita est rectangulum AC, CB et quadratum ex LC ad rectangulum AC, CB et quadratum ex KC; quare et reliquum, excessus scilicet quadratorum ex NC, LC est ad reliquum, quadratum scilicet † ex KC, ut AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB. Quoniam vero data est, ex hypothesi, ratio summae quadratorum ex DK, KE ad rectangulum DL, LE, data erit ratio dimidii hujus summae, hoc est summae quadratorum ex KC, CE ad idem rectangulum, hoc est ad excessum quadratorum ex LC, CE, et inverse data erit ratio hujus excessus ad summam illam. Et similiter, quoniam inflexae sunt FM, GM, erit, ex hypothesi, excessus quadratorum ex NC, CE ad quadratum ex CE in eadem data ratione. Ut igitur excessus quadratorum ex NC, CE ad quadratum ex CE, ita est excessus quadratorum ex LC, CE ad summam quadratorum ex KC, CE; quare reliquum, excessus scilicet quadratorum ex NC, LC est ad reliquum, quadratum scilicet ex KC, ut excessus quadratorum ex NC, CE ad quadratum ex CE. Et fuit † excessus quadratorum ex NC, LC ad quadratum ex KC, ut

† Vid. hanc notam.

AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB; igitur excessus quadratorum ex NC, CE est ad quadratum ex CE, ut AC,CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC,CB. Quare, ut reliquum, summa scilicet rectanguli AC,CB et quadrati ex CE, ad reliquum, excessum scilicet rectanguli AC, CB et quadrati ex CE, ita est AC, CB rectangulum et quadratum ex NC ad rectangulum AC, CB, et ita ostensum fuit * rectangulum AC, CB et quadratum ex LC ad rectangulum AC, CB et quadratum ex KC, hoc est rectangulum PL, LH ad ipsum QK, KH. Data autem sunt puncta A, B, C, E; data

* Vid. hanc notam.

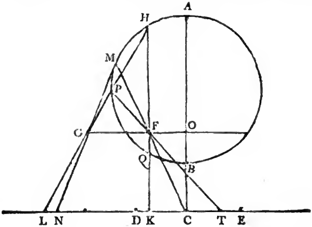


igitur est ratio rectanguli AC, CB et quadrati ex CE ad eorundem excessum, et propterea data est ratio rectanguli PL,LH ad ipsum QK, KH; igitur data sunt puncta F, G per Prop. 90.

Componetur ita.

Inveniantur puncta F, G per Prop. 90. ita ut ab ipsis utcunque inflexis ad circumferentiam APB duabus rectis FH,

GH quae rectae DE occurrant in punctis K, L, et circumferentiae rurſus in Q, P, rectangulum PL, LH ſit ad rectangulum QK, KH, ut rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE ad exceſſum rectanguli AC, CB et quadrati ex CE; erunt F, G puncta invenienda, hoc eſt inflexis, ut dictum fuit FH, GH, erunt quadrata ex DK, KE ſimul ad rectangulum DL, LE in data ratione; quam ſcilicet habet duplum exceſſus rect-



anguli AC, CB ſupra quadratum ex CE ad rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE.

Quoniam enim, ex conſtructione, rectangulum PL, LH eſt ad ipſum QK, KH, hoc eſt rectangulum AC, CB una cum quadrato ex LC eſt ad rectangulum AC, CB una cum quadrato ex KC, ut rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE ad exceſſum rectanguli AC, CB et quadrati ex CE; erit reliquum, exceſſus ſcilicet quadratorum ex LC, CE, hoc eſt rectangulum DL, LE ad reliquum, quadratum ſcilicet ex KC

una cum quadrato ex CE, ut rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE ad eorundem excessum; et invertendo, est summa quadratorum ex KC, CE ad rectangulum DL, LE, ut excessus rectanguli AC, CB et quadrati ex CE ad eorundem summam; igitur duplum quadratorum ex KC, CE, hoc est quadrata ex DK, KE simul sunt ad rectangulum DL, LE ut duplum excessus rectanguli AC, CB et quadrati ex CE ad rectangulum AC, CB una cum quadrato ex CE. Q. E. D.

PROP. XCII.

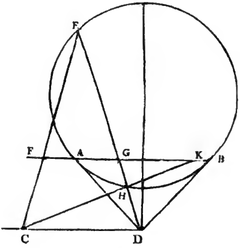
" DATA positione rectâ AB quae circulo positione dato AEB
" occurrat in punctis A, B; data erunt duo puncta C, D a
" quibus inflexis utcunque ad circumferentiam rectis CE,
" DE quae ipsi AB occurrant in F, G; erit quadratum ex FG
" ad rectangulum AG, GB in data ratione quam habet recta
" a ad ipsam b. Recta autem AB non debet transire per cen-
" trum."

Puta verum esse Porisma; igitur, ex hypothesi, quadratum ex FG est ad rectangulum AG, GB, ut recta a ad ipsam b. Occurrat DE circumferentiae rursus in H, et CH jungatur quae ipsi AB occurrat in K; quoniam igitur a punctis C, D inflexae sunt CH, DH ad circumferentiam, rursus, ex hypothesi, erit quadratum ex GK ad rectangulum AG, GB, ut a ad b; est igitur quadratum ex FG aequale quadrato ex GK, et recta FG aequalis ipsi GK; hoc est puncta C, D sunt ejusmodi, ut ductâ a puncto D recta DHE utcunque ad circulum, junctae CE, CH aequalia intercipiant segmenta rectae AB inter ipsas et rectam DE. Si igitur ducatur DA, ea necessario circulum in A continget, nam juncta CA nullum aufert seg-

mentum inter ipſam et DA, ſi autem DA circumferentiae rurſus occurreret, recta ducta a puncto C ad hunc occurſum auferret ſegmentum aliquod inter ipſam et DA, quod fieri non poteſt; quare DA contingit circulum; eodem modo oſtendetur DB circulum contingere. Data autem ſunt A, B puncta, quare contingentes AD, BD poſitione datae ſunt, datumque erit punctum D. Recta vero DE harmonicè ſecta eſt[a] in punctis G, H, rectae igitur CE, juncta CG, CH et CD harmonicales ſunt, et biſariam ſecta eſt FGK tribus ipſarum, quarta propterea CD parallela eſt [b] ipſi FK; et datum eſt punctum D, quare DC poſitione data eſt. Quoniam vero ut ED ad DH, ita eſt EG ad GH, erit quadratum ex ED ad rectangulum ED, DH, ut quadratum ex EG ad rectangulum EG, GH, hoc eſt ad rectangulum AG, GB, et permutando. Eſt autem quadratum ex ED ad quadratum ex EG, ut quadratum ex CD ad illud ex FG; quare eſt quadratum ex CD ad illud ex FG, ut rectangulum ED, DH, hoc eſt quadratum ex DA ad rectangulum AG, GB, et permutando, ut quadratum ex CD ad quadratum ex DA, ita eſt quadratum ex FG ad AGB rectangulum, hoc

[a] Pr. 73.

[b] Pr. 82.



eſt, ex hypotheſi, in data ratione. Et datum eſt quadratum ex DA, datum igitur eſt quadratum ex DC, et data erit recta DC, datumque punctum C. Quod fuit oſtendendum.

Componetur ita.

A punctis A, B ducantur AD, BD circulum contingentes, et per D ducatur recta ipſi AB parallela, et in ea ſumatur DC, ita ut quadratum ex CD ſit ad illud ex DA, ut recta a ad ipſam b; erunt C, D puncta invenienda.

Inflectantur enim utcunque ad circumferentiam rectae CE, DE quae ipſi AB occurrant in F, G punctis. Quoniam igitur eſt [a] ED ad DH, ut EG ad GH, erit quadratum ex ED ad rectangulum ED, DH, ut quadratum ex EG ad rectangulum EG, GH; et permutando, ut quadratum ex ED ad quadratum ex EG, hoc eſt ut quadratum ex CD ad illud ex FG, ita eſt rectangulum ED, DH, ſive quadratum ex AD ad rectangulum EG, GH, hoc eſt ad ipſum AG, GB; et rurſus permutando, ut quadratum ex CD ad quadratum ex DA, hoc eſt ut recta a ad ipſam b, ita eſt quadratum ex FG ad rectangulum AG, GB. Q. E. D.

[a] Pr. 73.

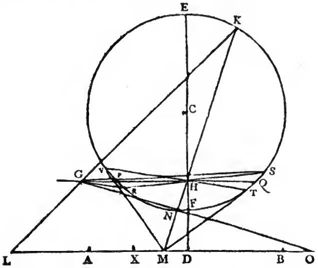
PROP. XCIII.

Haec et praecedens ſunt duae partes Poriſmatis quod mihi propoſuit Dom. Matthaeus Stewart.

" DATA poſitione rectâ AB extra circulum poſitione datum " EPF, ducatur a centro C recta CD perpendicularis ad AB, " quae circumferentiae occurrat in E, F; et in AB ſumantur " puncta A, B aequaliter a puncto D diſtantia, ita ut qua- " dratum ex AD, vel DB ſit aequale rectangulo ED, DF. Da-

" ta erunt duo puncta G, H, a quibus inflexis utcunque ad " circumferentiam rectis GK, HK quae ipsi AB occurrant in " punctis L, M, erit quadratum ex LM ad quadrata ex MA, " MB simul in data ratione quam recta a habet ad rectam b " bis."

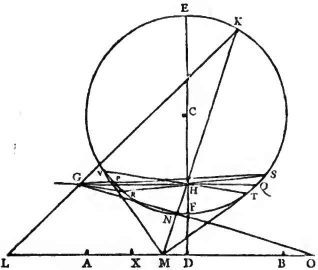
Puta verum esse Porisma; igitur, ex hypothesi, quadratum ex LM est ad quadrata ex AM, MB simul, ut recta a ad ipsam b bis, quare et quadratum ex LM est ad dimidium qua-
[a] 9. aut 10. 2. dratorum ex AM, MB, hoc est [a] ad quadrata ex AD, DM si-



mul, ut recta a ad ipsam b. Occurrat HK circumferentiae rursus in N, et juncta GN rectae AB occurrat in O; quoniam igitur a punctis G, H inflexae sunt GN, HN quae rectae AB occurrunt in O, M, similiter ostendetur quadratum ex OM

esse ad quadrata ex AD, DM simul, ut recta a ad ipsam b. Igitur quadratum ex LM aequale est quadrato ex OM, et recta LM aequalis ipsi OM. Ea igitur est affectio punctorum G, H, ut per H ductâ utcunque rectâ HK quae circumferentiae in K, N occurrit, junctae et productae GK, GN aequalia abscindunt segmenta LM, OM rectae AB inter ipsas et rectam KHM; et ex hoc sequitur junctam GH parallelam esse rectae AB; si enim non fuerit, ducatur GR parallela ipsi AB, et occurrat circumferentiae in R, et juncta RH eidem rursus occurrat in S, et GS jungatur; quoniam igitur RS ducta est per punctum H, rectae GR, GS abscindent aequalia segmenta rectae AB inter ipsas et rectam RHS, et abscindit quidem segmentum aliquod recta GS inter ipsam et rectam RS, quoniam utraque occurrit rectae AB; sed GR quae parallela est ipsi AB nullum abscindere potest inter ipsam et rectam RS, quod fieri non potest; est igitur GH parallela rectae AB. Et quoniam aequales sunt LM, MO, et parallelae sunt AB, GH, erit ut KM ad KH, ita (LM ad GH, hoc est MO ad GH, et ita est) MN ad NH; recta igitur KM harmonicè secta est in punctis N, H. A puncto M ducantur rectae MT, MV circulum contingentes, et jungatur TV; recta igitur MK harmonicè secatur [b] in puncto N et puncto in quo rectae VT occurrit. Punctum igitur H est in recta VT. Similiter inflexis duabus rectis a punctis G, H ad aliud in circumferentia punctum, quarum ea quae inflexa est a puncto H occurrat rectae AB in X, ostendetur punctum H esse in recta quae conjungit tactus contingentium quae a puncto X ducuntur; punctum igitur H est in occursu hujus rectae et ipsius VT. Recta autem VT, ut et quaevis alia quae jungit contactus contingen- [b] Pr. 73.

tium quae a puncto quovis in AB ducuntur, transit per punctum in diametro CD cujus distantia a centro C tertia est proportionalis rectis CD, CF, ut ostenditur in Lemmate ad finem hujus Propositionis. Punctum igitur H est in recta CD, et proportionales sunt CD, CF, CH. Datae autem sunt CD, CF, data propterea magnitudine est CH, sed et positione; quare datum est punctum H, ut et rectangulum KH, HN. Quoni-



am vero est MK ad KH, ut MN ad NH, erit ut quadratum ex MK ad quadratum ex KH, hoc est ut quadratum ex LM ad illud ex GH, ita rectangulum KM, MN ad rectangulum KH, HN; et permutando, ut quadratum ex LM ad rectangulum KM, MN, ita quadratum ex GH ad rectangulum KH, HN. Est autem rectangulum KM, MN aequale rectangulo ED, DF una cum quadrato ex DM, hoc est quadratis ex AD,

DM; et, ex hypothesi, data est ratio quadrati ex LM ad quadrata ex AD, DM, eadem scilicet rationi rectae *a* ad ipsam *b*. Data igitur est ratio quadrati ex GH ad KH, HN rectangulum quod datum ostensum est; quare datum est quadratum ex GH, et recta GH et punctum G data erunt. Quod fuit ostendendum.

Componetur ita.

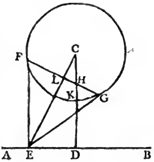
Inveniatur ipsis CD, CF tertia proportionalis CH, et ducatur ad circumferentiam recta HP ad angulos rectos ipsi CH, et in HP sumatur punctum G, ita ut quadratum ex GH sit ad quadratum ex HP, ut recta *a* ad ipsam *b*. Erunt G, H puncta quae invenienda sunt; hoc est, inflexis utcunque ab ipsis ad circumferentiam rectis GK, HK, quae rectae AB occurrant in L, M, erit quadratum ex LM ad quadrata ex AM, MB simul, ut recta *a* ad ipsam *b* bis.

Quoniam enim proportionales sunt CD, CF, CH, et per H ducta est KHM ad rectam AB quae perpendicularis est ad CD, erit [c] MK ad KH, ut MN ad NH; quare ut quadratum ex MK ad quadratum ex KH, hoc est ut quadratum ex LM ad illud ex GH, ita est [d] rectangulum KM, MN hoc est rectangulum EDF, sive quadratum ex AD, una cum quadrato ex DM ad rectangulum KH, HN, hoc est ad quadratum ex PH; et permutando, ut quadratum ex LM ad quadrata ex AD, DM simul, ita est quadratum ex GH ad illud ex PH, et ita, ex constructione est recta *a* ad ipsam *b*. Est igitur quadratum ex LM ad duplum quadratorum ex AD, DM, hoc est ad quadrata ex AM, MB simul, ut recta *a* ad ipsam *b* bis. Q. E. D.

[c] Prop. 87.

[d] Pr. 22. 6.

LEMMA ad Prop. 93.



SIT recta AB extra circulum cujus centrum est C, et ad AB ducatur perpendicularis CD; si a puncto quovis E in AB ducantur rectae circulum contingentes in punctis F, G, et juncta FG occurrat rectae CD in H, CD vero occurrat circumferentiae in K inter C et D; proportionales erunt CD, CK, CH.

Jungatur enim EC occurratque rectae FG in L. Igitur quoniam recti sunt anguli ELH, EDH puncta E, L, H, D sunt in circulo, quare rectangulum DC, CH aequale est ipsi EC, CL, hoc est quadrato ex semidiametro CK; proportionales igitur sunt CD, CK, CH.

Et si per punctum H intra circulum ducatur utcunque recta FHG, et ducantur a punctis F, G, in quibus circumferentiae occurrit, rectae FE GE circulum contingentes, et per ipsarum occursum E ducatur ED perpendicularis ad rectam CH productam; erunt similiter CD, CK, CH proportionales; demonstratur ut praecedens.

DE

LOGARITHMIS.

LEMMA I.

" QUAEVIS ratio AB ad BC componi poteſt ex rationibus " inter ſe iiſdem, quarum numerus major ſit numero quovis " dato."

Inter AB et BC inveniatur media proportionalis BD, et rurſus inter AB, BD, et inter BD, BC, inveniantur mediae EB, FB, et ita deinceps; numerus rationum in quovis caſu duplus erit numeri earum in praecedente; atque ita major fieri poteſt quovis numero dato.



LEMMA II.

" SI fuerint duae rationes, utraque majoris ad minorem; una " autem earum compoſita ſit ex rationibus quae inter ſe ſunt " eaedem, et reliqua etiam ex iiſdem componatur; erit ea " quae compoſita eſt majore numero rationum major ratione, " quae componitur ex minore numero earundem. Et vice " verſa, major ratio componetur ex majore numero earundem " rationum; quae quidem manifeſta ſunt.

" Contrarium autem eveniet ſi utraque ratio fuerit mino" ris ad majorem, ut patet."

LEMMA III.

" SI una ratio major ſit altera, utraque vero ſit majoris ad " minorem, et utraque compoſita ſit ex eodem numero ratio- " num inter ſe earundem; erit una ex rationibus ex quibus " major ratio compoſita eſt major unâ ex iis ex quibus com- " poſita eſt reliqua ratio; nam ſi eadem eſſet huic vel minor " ipsâ, major ratio eadem eſſet minori, vel ipsâ minor, quod " fieri non poteſt."

LEMMA IV.

" SINT duae magnitudines, quarum AB minor et AC ma- " jor, poteſt ſeries deinceps proportionalium quarum prima " eſt AB, et ſecunda AC continuari ita ut earum ultima ma- " jor ſit quavis magnitudine data AD."

Sumatur BE multiplex ipſius BC quae major ſit BD, et ipſis AB, AC, tertia proportionalis inveniatur AF et ipſis AC, AF inveniatur tertia proportionalis, et ita deinceps, donec tot ſumantur rationes quarum prima eſt AB ad AC quot ſunt partes in BE aequales ipſi BC; ſitque AG ultima proportionalium. Et quoniam



CF exceſſus tertiae et ſecundae proportionalis major eſt BC, exceſſu ſecundae et primae, et ita deinceps; erit magnitudo BG, quae continet tot harum proportionalium differentias quot BE continet partes aequales ipſi BC, major quam BE, et multo quam BD major.

LEMMA V.

" QUAEVIS ratio AB ad BC componi poteſt ex rationibus
" inter ſe iiſdem, quarum una minor ſit quavis ratione data
" DB ad BC."

Fiat ſeries deinceps proportionalium, quarum prima eſt BC, et ſecunda BD, et continuetur ita ut ultima earum BE major ſit quam BA, quod fieri poteſt per Lemma 4. et componatur, quod fieri poteſt per Lemma 1. ratio AB ad BC ex rationibus inter ſe iiſdem, quarum numerus major ſit numero rationum, quae eaedem ſunt rationi DB ad BC, ex quibus compoſita eſt ratio EB ad BC.

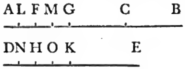


Sit ratio AB ad BF una ex iis ex quibus compoſita eſt ratio AB ad BC; ſit autem ratio AB ad BG ea ex hiſce compoſita, quarum numerus idem eſt cum numero rationum ex quibus compoſita eſt ratio EB ad BC.

Quoniam igitur ratio AB ad BC compoſita eſt ex majori numero earundem rationum quam ratio AB ad BG; erit ratio AB ad BC major ratione AB ad BG, per Lemma 2; eſt igitur BC minor quam BG, [10. 5.] et eſt EB major quam AB, igitur ratio EB ad BC major eſt ratione AB ad BG; et compoſitae ſunt hae rationes ex eodem numero rationum, quare [Lem. 3.] ratio DB ad BC una ex iis ex quibus compoſita eſt ratio EB ad BC major eſt ratione AB ad BF, quae una eſt ex iis ex quibus compoſita eſt ratio AB ad BG; ratio autem AB ad BC compoſita eſt ex hiſce, hoc eſt ex rationibus quae minores ſunt ratione data DB ad BC.

DEFINITIO I.

SIT data ratio AB ad BC et data magnitudo DE; componatur autem ratio AB ad BC ex quocunque numero rationum quae eaedem ſunt inter ſe, non autem ſint rationes aequalis ad aequalem, ex. gr. Ex AB ad BF, FB ad BG, &c. et ſecetur DE in tot partes aequales DH, HK, &c. quot ſunt rationes ex quibus compoſita eſt ratio AB ad BC; vel ſi ratio AB ad BC componatur ex rationibus quarum numerus major vel minor eſt quam in praecedente exemplo, ut ex rationibus AB ad BL, LB ad BF, &c. Secetur ſemper DE in tot partes aequales DN, NH, &c. quot ſunt rationes. Hoc facto, ratio AB ad BF, vel ratio AB ad BL, &c. una ſcil. ex iis ex quibus, in quovis caſu, componitur ratio AB ad BC, dicatur ratio radicalis; et pars DH, vel DN, &c. in eodem caſu, dicatur pars radicalis. Ratio autem data AB ad BC dicatur ratio aſſumpta, et data magnitudo DE dicatur magnitudo aſſumpta.

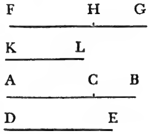


DEF. II.

SI ratio aliqua FG ad GH componatur ex rationibus radicalibus, hoc eſt ex iiſdem ex quibus compoſita eſt ratio AB ad BC, ſitque magnitudo KL quae continet tot partes aequales iis in quas diviſa eſt magnitudo DE, quot ſunt rationes ex quibus compoſita eſt ratio FG ad GH; magnitudo KL dicatur Logarithmus rationis FG ad GH; quoniam ſcilicet KL continet

tot partes radicales quot ſunt rationes radicales ex quibus compoſita eſt ratio FG ad GH.

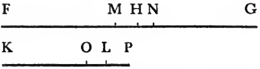
Quoniam vero ratio HG ad GF, quae reciproca eſt rationis FG ad GH, componitur ex eodem numero rationum ex quibus ratio FG ad GH compoſita eſt, idem erit utriusque rationis Logarithmus. Ut vero cognoſcatur quando Logarithmus KL eſt rationis minoris ad majorem, convenit notam aliquam ei praefigere, ut poſtea oſtendetur.



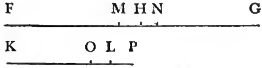
Cor. Et manifeſtum eſt DE Logarithmum eſſe rationis AB ad BC.

DEF. III.

SI autem ratio aliqua FG ad GH, quae primo ſit majoris ad minorem, non componatur ex rationibus radicalibus, ſit ratio FG ad GM ea quae ex iiſdem compoſita proxime minor eſt ratione FG ad GH, et ſit ratio FG ad GN ex iiſdem compoſita proxime major ratione FG ad GH; ſit autem magnitudo KO Logarithmus rationis FG ad GM, et KP Logarithmus rationis FG ad GN; magnitudo KL, quae ſemper major eſt quam KO et minor quam KP, quicunque fuerit numerus rationum radicalium ex quibus aſſumpta ratio AB ad BC compoſita eſt, dicatur Logarithmus rationis FG ad GH.

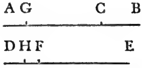


Si vero ſit ratio HG ad GF minoris ad majorem, ſumatur ratio MG ad GF quae ex rationibus radicalibus compoſita proxime major eſt ratione HG ad GF, et ratio NG ad GF quae ex iiſdem compoſita proxime minor eſt eadem ratione; et ſint KO, KP, Logarithmi harum rationum, qui iidem ſunt cum Logarithmis rationum FG ad GM, et FG ad GN, et magnitudo KL, quae ſemper major eſt KO et minor quam KP, dicatur Logarithmus rationis HG ad GF, qui, ut patet, idem eſt cum Logarithmo rationis FG ad GH.



Cor. 1. Hinc Logarithmus rationis aequalis ad aequalem eſt nullius magnitudinis ſive eſt nihil.

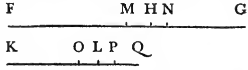
Sit enim ratio AB ad BA, aequalis ad aequalem, et ſi ejus Logarithmus habeat ullam magnitudinem, ſit ea magnitudo DF, et componatur aſſumpta ratio AB ad BC ex rationibus, quarum numerus major ſit numero partium ipſi DF aequalium quae in aſſumpta magnitudine DE continentur. Igitur quoniam numerus partium radicalium major eſt numero partium in DE aequalium ipſi DF, una ex partibus radicalibus minor erit quam DF. Sit ratio AB ad BG prima rationum radicalium, quae propterea eſt prima quae major eſt ratione AB ad BA, et ſit DH prima partium radicalium; erit igitur DH minor DF, ex Definitione vero 3. DH Logarithmus ſc. rati-



onis AB ad BG, major eſt quam Logarithmus rationis AB ad BA, hoc eſt quam DE, quod fieri non poteſt. Logarithmus igitur rationis AB ad BA aequalis ſc. ad aequalem, nihil eſt.

COR. 2. Ejuſdem rationis unicus eſt Logarithmus.

Si ratio propoſita componatur ex rationibus radicalibus, hoc manifeſtum eſt. Si autem ratio aliqua FG ad GH non ex iiſdem componatur, ſit KL ejus Logarithmus ſecundum Def. 3. et ſi alius poteſt eſſe ejuſdem Logarithmus, ſit is KQ, quae primo major ſit quam KL; et componatur aſſumpta ratio AB ad BC ex rationibus, quarum numerus major eſt numero partium ipſi LQ aequalium, quae in aſſumpta magnitudine DE continentur; ſit autem ratio FG ad GM ea quae ex rationibus illis compoſita proxime minor eſt ratione FG ad GH, et ſit ratio FG ad GN ex iiſdem compoſita quae proxime major eſt ratione FG ad GH, ſintque KO,



KP harum rationum Logarithmi. Et quoniam ratio FG ad GN componitur ex rationibus radicalibus quarum numerus unitate major eſt numero earundem ex quibus compoſita eſt ratio FG ad GM, numerus partium radicalium in KP unitate major erit numero earundem in KO; eſt igitur OP una harum partium. Et quoniam numerus rationum ex quibus ratio AB ad BC compoſita eſt, hoc eſt numerus partium radicalium in DE major, ex conſtructione, eſt numero partium ipſi LQ aequalium quae in DE continentur, erit OP minor quam LQ, quare multo minor eſt LP ipſa LQ; minor igitur eſt KP quam KQ. Quoniam vero KP Logarithmus eſt rationis quae

ex radicalibus composita proxime major est ratione FG ad GH, erit KP [Def. 3.] major KQ quae Logarithmus ponitur rationis FG ad GH; quod fieri non potest. Nullus igitur est Logarithmus rationis FG ad GH praeter KL. Si vero ponatur KQ minorem esse quam KL, idem eodem modo ostendetur.

PROP. I.

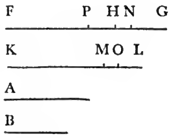
" SI duae rationes sint inter se eaedem, et una earum componatur ex rationibus radicalibus; Logarithmi harum rationum erunt inter se aequales."

Quoniam enim rationes sunt inter se eaedem, compositae erunt ex eodem numero earundem rationum, ut patet; quare, per Def. 2. earum Logarithmi continebunt eundem numerum partium radicalium; et propterea erunt inter se aequales.

PROP. II.

" SIT ratio FG ad GH eadem rationi KL ad LM, sitque alia " ratio A ad B; non autem composita sit ratio FG ad GH ex " rationibus quarum unaquaeque eadem est rationi A ad B, " unde neque ratio KL ad LM ex iisdem componatur. Sit " autem ratio FG ad GN, ea quae ex rationibus A ad B com- " posita proxime major est ratione FG ad GH; sitque ratio " KL ad LO ea quae ex iisdem composita proxime major est " ratione KL ad LM; erit ratio FG ad GN eadem rationi " KL ad LO. Et similiter si sumantur rationes ex praedictis " compositae quae proxime minores sunt FG ad GH, et KL " ad LM, erunt rationes illae inter se eaedem."

Si enim rationes FG ad GN, KL ad LO, non ſunt inter ſe eaedem, una earum erit major altera; ſit ratio FG ad GN major, et ut KL ad LO, ita ſit FG ad GP. Igitur [Cor. 13. 5.] ratio FG ad GN major eſt ratione FG ad GP. Et quoniam ratio FG ad GN ea eſt ex rationibus A ad B compoſita quae proxime major eſt ratione FG ad GH, erit ratio FG ad GH major ratione FG ad GP, quae minor eſt ratione FG ad GN. Igitur quoniam ratio KL ad LM eadem eſt rationi FG ad GH, quae major eſt ratione FG ad GP, erit [13. 5.] ratio KL ad LM major (ratione FG ad GP, hoc eſt) ratione KL ad LO; ſed et minor, quod fieri non poteſt. Igitur ratio FG ad GN eadem eſt rationi KL ad LO. Similiter altera pars Propoſitionis oſtendetur.

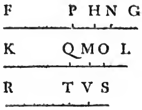


P R O P. III.

"SI duae rationes FG ad GH, et KL ad LM, utraque majoris ad minorem, ſint inter ſe eaedem, non autem compoſitae ſint ex rationibus radicalibus ex quibus ſcilicet compoſita eſt ratio aſſumpta AB ad BC; erit Logarithmus rationis FG ad GH idem cum Logarithmo rationis KL ad LM."

Sit enim ratio FG ad GN ea quae ex radicalibus compoſita proxime major eſt ratione FG ad GH; ſitque ratio KL ad LO

ea quae ex iiſdem compoſita proxime major eſt ratione KL ad LM; et ſit ratio FG ad GP ex radicalibus compoſita proxime minor ratione FG ad GH; et ratio KL ad LQ ea quae ex iiſdem compoſita proxime minor eſt ratione KL ad LM. Sit autem RS logarithmus rationis FG ad GN, et RT logarithmus rationis FG ad GP; ſit vero RV logarithmus rationis FG ad GH, qui ſcilicet, per Def. 3. ſemper major eſt quam RT, et minor quam RS. Erit etiam RV logarithmus rationis KL ad LM. Quoniam enim ratio FG ad GH eadem eſt rationi KL ad LM, et eſt ratio FG ad GN ex radicalibus



compoſita proxime major ratione FG ad GH, ratio vero KL ad LO ex iiſdem compoſita, proxime major eſt ratione KL ad LM; erit, per Prop. 2. ratio FG ad GN, eadem rationi KL ad LO. Igitur, per Prop. 1. logarithmi harum rationum ſunt inter ſe aequales. Eſt autem RS logarithmus rationis FG ad GN, quare et RS logarithmus eſt rationis KL ad LO. Similiter oſtendetur RT logarithmum ſcilicet rationis FG ad GP, eſſe etiam logarithmum rationis KL ad LQ. Quoniam igitur RV ſemper major eſt quam RT logarithmo rationis KL ad LQ, et minor quam RS logarithmo rationis KL ad LO, erit [Def. 3.] RV logarithmus rationis KL ad LM.

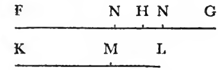
PROP. IV.

" Logarithmus majoris rationis major eſt logarithmo mino-
" ris; utraque autem ratio ſit majoris ad minorem."

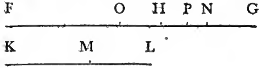
Cas. 1. Si utraque ratio compoſita ſit ex rationibus radica-

libus, numerus rationum ex quibus composita est major ratio, major est [Lem. 2.] numero earundem, ex quibus minor ratio composita est; et propterea logarithmus majoris rationis major est logarithmo minoris, ut patet ex Def. 2.

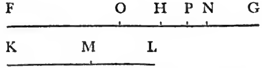
Cas. 2. Si una ratio, viz. ratio KL ad LM composita sit ex rationibus radicalibus, reliqua autem ratio FG ad GH ex iisdem non sit composita. Sit ratio FG ad GN eadem rationi KL ad LM; et primo, sit ratio KL ad LM, hoc est ratio FG ad GN, quae ex rationibus radicalibus est composita, vel ea est quae proxime major est ratione FG ad GH, vel est major eâ quae proxime major est; et in primo Casu, per Def. 3. in altero, per Cas. 1. et Def. 3. logarithmus rationis FG ad GN, hoc est rationis KL ad LM [Prop. 1.] major erit logarithmo rationis FG ad GH. Si vero ratio KL ad LM minor sit ratione FG ad GH, similiter ostendetur logarithmus rationis KL ad LM minor logarithmo rationis FG ad GH.



Cas. 3. Si vero neutra rationum sit composita ex rationibus radicalibus, sit FG ad GH minor ratio, et KL ad LM major; et rationi KL ad LM eadem sit ratio FG ad GN. Igitur ratio FG ad GN major est ratione FG ad GH, et propterea GN minor est quam GH. [10. 5.] Componatur vero ratio assumpta AB ad BC ex rationibus inter se iisdem, quarum una quaevis minor est ratione



HG ad GN, quod fieri poteſt [Lem. 5.]; et ſit ratio FG ad GO ea quae ex hiſce compoſita proxime minor eſt ratione FG ad GH. Igitur ratio OG ad GP una eſt ex hiſce rationibus, quae propterea minor eſt ratione HG ad GN, quare multo magis ratio HG ad GP minor eſt ratione HG ad GN, et erit GP major GN. [10. 5.] Ratio igitur FG ad GN major eſt ratione FG ad GP. Et quoniam ratio FG ad GP compoſita eſt ex rationibus radicalibus, logarithmus rationis FG ad GN major erit eo rationis FG ad GP [per Caſ. 2.] et per eundem, logarithmus rationis FG ad GP major eſt logarithmo rationis FG ad GH. Multo igitur logarithmus rationis KL ad LM major eſt logarithmo rationis FG ad GH.



Cor. 1. Et ſi utraque ratio fuerit minoris ad majorem, erit logarithmus rationis, cujus reciproca major eſt alterius reciproca, major logarithmo alterius rationis.

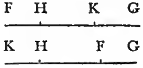
Cor. 2. Et ſi una ratio fuerit majoris ad minorem, et reliqua minoris ad majorem, erit logarithmus rationis quae vel cujus reciproca, ſi fuerit minoris ad majorem, major eſt reliqua vel ejuſdem reciproca, ſi fuerit reliqua minoris ad majorem, major erit logarithmo reliquae; idem enim eſt logarithmus rationis et ejus reciprocae, per Def. 3.

Cor. 3. Hinc logarithmus major eſt majoris, et minor eſt logarithmus minoris rationis, ſi ſcilicet utraque ratio ſit majoris ad minorem; vel, in aliis caſibus, ſumendo rationes quae ſunt reciprocae rationum minoris ad majorem.

PROP. V.

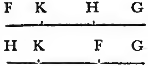
" SI utraque duarum rationum compoſita ſit ex rationibus " radicalibus, utraque autem ſit vel majoris ad minorem, vel " minoris ad majorem; logarithmus rationis ex duabus hiſce " compoſitae aequalis eſt ſummae logarithmorum rationum " ex quibus eſt compoſita."

Sint rationes FG ad GH, et HG ad GK ex quibus compoſita eſt ratio FG ad GK. Numerus igitur rationum radicacalium, ex quibus compoſita eſt ratio FG ad GK, aequalis eſt numero earundem ex quibus componitur ratio FG ad GH una cum numero earundem ex quibus componitur ratio HG ad GK; igitur, per Def. 2. logarithmus rationis FG ad GK aequalis eſt ſummae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK.



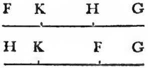
Cor. Si vero una ex rationibus fuerit majoris ad minorem, reliqua vero minoris ad majorem, erit logarithmus rationis ex hiſce compoſitae aequalis exceſſui logarithmorum rationum ex quibus eſt compoſita.

Cas. 1. Quando ratio FG ad GH, majoris ſcilicet ad minorem, major eſt reciproca rationis reliquae HG ad GK; vel quando ratio FG ad GH eſt minoris ad majorem, et reciproca ejus HG ad GF major eſt reliqua ratione HG ad GK.



Quoniam enim ratio FG ad GH compoſita eſt ex rationi-

bus FG ad GK, et KG ad GH, quarum utraque vel eſt majoris ad minorem, vel minoris ad majorem; erit logarithmus rationis FG ad GH aequalis ſummae logarithmorum rationum FG ad GK, et KG ad GH, per hanc ſcilicet Propoſitionem. Igitur exceſſus logarithmi rationis FG ad GH ſupra logarithmum rationis KG ad GH, qui idem eſt cum logarithmo rationis HG ad GK [Def. 2.] aequalis eſt logarithmo rationis FG ad GK.



Cas. 2. Quando ratio FG ad GK compoſita eſt ex ratione FG ad GH, minoris ad majorem, et ex ratione HG ad GK, majoris ad minorem, quae major eſt reciproca primae, major ſc. ipſa HG ad GF; idem ſequetur, nam quoniam ratio HG ad GK compoſita eſt ex ratione HG ad GF, et FG ad GK, quarum utraque eſt majoris ad minorem, logarithmus rationis FG ad GK, aequalis erit ſummae logarithmorum rationum HG ad GF, et FG ad GK. Igitur exceſſus logarithmi rationis FG ad GK ſupra logarithmum rationis HG ad GF, qui idem eſt cum logarithmo rationis FG ad GH, aequalis eſt logarithmo rationis FG ad GK.



Cas. 3. Quando ratio FG ad GH majoris ad minorem, minor eſt reciproca reliquae rationis HG ad GK.

Quoniam utraque ratio HG ad GF, et FG ad GK eſt minoris ad majorem, erit [Prop. 5.] logarithmus rationis HG ad GK aequalis ſummae logarithmorum rationum HG ad GF, et FG ad GK. Igitur exceſſus logarithmi ratio-

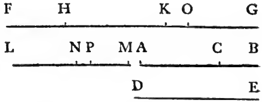


nis HG ad GK ſupra logarithmum rationis HG ad GF, qui idem eſt cum logarithmo rationis FG ad GH, aequalis eſt logarithmo rationis FG ad GK.

PROP. VI.

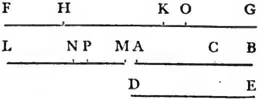
" SI ſint duae rationes FG ad GH, et GH ad GK, utraque " majoris ad minorem, quarum altera FG ad GH compoſita " eſt ex rationibus radicalibus, reliqua vero HG ad GK ex " iis non eſt compoſita; erit logarithmus rationis FG ad GK " quae ex duabus illis eſt compoſita, aequalis ſummae loga- " rithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK."

Si enim magnitudines hae non ſint aequales, altera earum major erit; et primò, ſit LM, ſumma ſcilicet logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK, major LN logarithmo rationis FG ad GK, ſitque NM ipſarum exceſſus; et componatur ratio aſſumpta AB ad BC ex rationibus radicalibus,



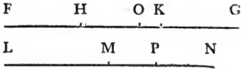
quarum numerus major ſit numero partium ipſi NM aequalium, quae in data magnitudine DE continentur; et ſecetur DE in partes aequales, quarum numerus aequalis eſt numero rationum ex quibus compoſita eſt ratio AB ad BC; igitur una ex hiſce partibus minor eſt ipſa NM. Sit ratio FG ad GO ea, quae ex rationibus radicalibus compoſita proxime major eſt

ratione FG ad GK; et ſit LP logarithmus rationis FG ad GO. Et quoniam [Def. 3.] LN, logarithmus rationis FG ad GK, cadit inter logarithmum LP rationis FG ad GO, quae proxime major eſt ratione FG ad GK, et logarithmum rationis quae ex radicalibus compoſita proxime minor eſt ratione FG ad GK, erit NP minor exceſſu horum logarithmorum qui eſt una partium radicalium, et propterea minor eſt NM; multo igitur NP minor eſt quam NM. Igitur LP, logarithmus ſc. rationis FG ad GO, minor eſt quam LM, ſumma ſc. logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK. Quoniam vero ratio FG ad GO, quae eſt compoſita ex rationibus radicalibus,



eadem eſt rationi compoſitae ex rationibus FG ad GH et HG ad GO, quarum ratio FG ad GH compoſita eſt ex rationibus radicalibus, reliqua ratio HG ad GO compoſita erit ex iiſdem. Igitur, per Prop. 5. hujus, logarithmus LP rationis FG ad GO eſt aequalis ſummae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GO. Eſt autem LM ſumma logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK. Et quoniam LP minor eſt LM, erit prima ſumma minor reliqua, et, ablato communi logarithmo rationis FG ad GH, erit reliquus logarithmus rationis HG ad GO minor reliquo logarithmo rationis HG ad GK. Igitur [Cor. 3. Prop. 4.] ratio HG ad GO minor eſt ratione HG ad GK; ſed et major, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt LM major LN.

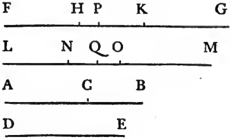
Sed si dicatur LM minor quam LN, sumpta ratione FG ad GO quae ex radicalibus composita, proxime minor est ratione FG ad GK; similiter ostendetur non posse LM minorem esse quam LN; aequalis igitur est LN logarithmus rationis FG ad GK ipsi LM, summae scilicet logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK.



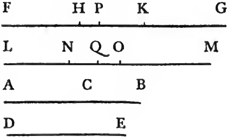
PROP. VII.

" SINT rationes FG ad GH, et HG ad GK, quarum neutra
" composita est ex rationibus radicalibus; sit autem ratio FG
" ad GK, quae ex illis composita est, ex rationibus radicali-
" bus composita; erit logarithmus rationis FG ad GK ae-
" qualis summae logarithmorum rationum FG ad GH, et
" HG ad GK."

Si enim non sit aequalis summae huic, erit vel major, vel minor. Primò, sit logarithmus LM rationis FG ad GK major summa logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK; et sit LN logarithmus rationis FG ad GH, igitur NM major est logarithmo rationis HG ad GK; sit hujus rationis logarithmus OM, minor sc. quam NM, et componatur ratio assumpta AB ad

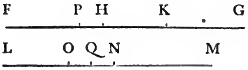


ad BC ex rationibus radicalibus, quarum numerus major fit numero partium ipfi NO aequalium, quae in data magnitudine DE continentur, et fecetur DE in partes aequales, quarum numerus aequalis eft numero rationum ex quibus ratio AB ad BC eft compofita; igitur una harum partium minor eft ipfa NO. Sit ratio FG ad GP ea quae ex rationibus radicalibus compofita proxime major eft ratione FG ad GH, fitque LQ logarithmus rationis FG ad GP; erit igitur NQ minor quam una partium radicalium, quod ut fimile in praecedente Prop. oftendetur, multo igitur NQ minor eft quam NO; quare QM major eft quam OM. Et ut fimile in praecedente, oftendetur logarithmus rationis FG ad GK aequalis fummae logarithmorum rationum FG ad GP, et PG ad GK. Igitur quoniam LM eft logarithmus rationis FG ad GK, et LQ logarithmus eft rationis FG ad GP, erit reliqua QM logarithmus rationis HG ad GK. Quoniam igitur oftenfa eft QM major OM, erit logarithmus rationis PG ad GK major logarithmo rationis HG ad GK; quare ratio PG ad GK major eft ratione HG ad GK; fed et minor, quoniam PG minor eft HG; quod fieri non poteft.



Sed fi LM logarithmus rationis FG ad GK dicatur minor quam fumma logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK; fit LM logarithmus rationis FG ad GH, igitur NM

minor eſt logarithmo rationis HG ad GK; ſit OM logarithmus hujus rationis major ſc. quam NM; et ſumptâ ratione FG ad GP, quae ex radicalibus compoſita proxime minor eſt ratione FG ad GH, reliquisque ut in praecedente caſu conſtructis, oſtendetur QN minor quam ON, quare et QM logarithmus rationis PG ad GK minor erit quam OM logarithmus rationis HG ad GK. Ratio igitur PG ad GK minor eſt ratione HG ad GK, quod fieri non poteſt. Igitur LM non eſt minor ſumma logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK, et oſtenſa eſt non major eadem ſumma; igitur eſt aequalis.

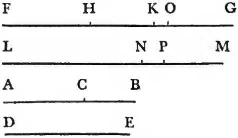


PROP. VIII.

" SINT rationes FG ad GH, et HG ad GK, quarum neutra " eſt compoſita ex rationibus radicalibus; erit ſumma loga- " rithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK aequalis " logarithmo rationis FG ad GK, quae eſt ex illis compoſita."

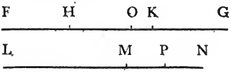
Si enim non ſit; primò, ſit LM ſumma logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK major quam LN logarithmus rationis FG ad GK; et componatur ratio aſſumpta AB ad BC ex rationibus, quarum numerus major ſit numero partium ipſi NM aequalium, quae in magnitudine aſſumpta DE continentur. Secetur DE in partes aequales, quarum numerus idem ſit cum numero rationum ex quibus compoſita

eſt ratio AB ad BC; igitur una harum partium minor erit quam MN. Sit ratio FG ad GO ea quae ex rationibus radicalibus compoſita proxime major eſt ratione FG ad GK, ſitque LP logarithmus rationis FG ad GO, qui propterea aequalis erit ſummae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GO. Erit igitur NP minor quam una partium radicalium, ut in



Prop. 6. oſtenſum, et propterea multo quam NM minor; quare LP minor eſt LM. Eſt autem LP, per Prop. 7. aequalis ſummae logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK. Prima igitur ſumma minor eſt reliquâ; et, ablato communi logarithmo rationis FG ad GH, erit reliquus, logarithmus rationis ſc. HG ad GO, minor reliquo logarithmo rationis HG ad GK. Igitur ratio HG ad GO minor eſt ratione HG ad GK; ſed et major, quoniam GO minor eſt GK; quod fieri non poteſt. Igitur LM non eſt major quam LN.

Sed ſi ponatur LM minor quam LN, ſumatur ratio FG ad GO, quae ex radicalibus compoſita proxime minor eſt ratione FG ad GK; ſitque LP logarithmus rationis



FG ad GO, reliquiſque ut antea conſtructis, oſtendetur LP major quam LM, hoc eſt ſumma logarithmorum rationum

FG ad GH, et HG ad GO major ſumma logarithmorum rationum FG ad GH, et HG ad GK; igitur, ablato communi, logarithmus rationis HG ad GO major eſt logarithmo rationis HG ad GK; quare et ratio HG ad GO major eſt ratione HG ad GK, quod fieri non poteſt; igitur LM non minor eſt quam LN, et oſtenſa fuit non major; aequalis igitur eſt LM ipſi LN.

Cor. Idem Corollarium hinc ſequitur, quod ex Prop. 5. oſtenſum eſt.

PROP. IX.

" SI una ratio multiplicata fuerit alterius rationis, quam " multiplicata eſt ea alterius, tam multiplex erit logarithmus " ejus logarithmi alterius."

Sint enim AB, BC, BD, BE, &c. deinceps proportionales, erunt igitur rationes primae ad ſecundam, ſecundae ad tertiam, &c. inter ſe eaedem; quare et logarithmi earum ſunt inter ſe aequales, [Prop. 2. vel 3.] Sit FG logarithmus rationis AB ad BC, et GH logarithmus rationis BC ad BD. Quoniam igitur ratio AB ad BD,



duplicata ſcilicet rationis AB ad BC, compoſita eſt ex rationibus AB ad BC, et BC ad BD, erit logarithmus rationis AB ad BD aequalis ipſi FH ſummae logarithmorum rationum AB ad BC, et BC ad BD, [Prop. 5, aut 6, 7, 8.] hoc

eſt duplo logarithmi FG rationis AB ad BC. Similiter, quoniam ratio AB ad BE, triplicata ſcilicet rationis AB ad BC, compoſita eſt ex ratione AB ad BD, et ratione BD ad BE, erit logarithmus rationis AB ad BE aequalis ſummae logarithmorum rationum AB ad BD, et



BD ad BE. Logarithmus autem FH rationis AB ad BD, duplus oſtenſus eſt logarithmi FG rationis AB ad BC, et HK logarithmus rationis BD ad BE aequalis eſt ipſi FG; igitur FK logarithmus rationis AB ad BE triplus eſt ipſius FG logarithmi rationis AB ad BC; et ita deinceps.

D E F. IV.

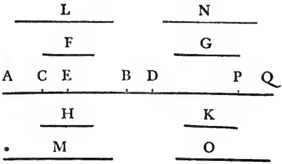
LOGARITHMI omnium rationum ex aſſumpta ratione AB ad BC, et aſſumpta magnitudine DE provenientes, ſecundum Def. 2. et Def. 3. dicuntur eſſe ejuſdem ſpeciei. Sed ſi ſumatur eadem ratio AB ad BC, et ſumatur alia magnitudo DE, logarithmi ex hiſce, ſecundum Def. 2. et 3. provenientes dicuntur eſſe diverſae ſpeciei a praecedente.

P R O P. X.

" Logarithmi duarum rationum unius ſpeciei eadem inter ſe " habent rationem quam logarithmi earundem rationum cu- " juſlibet alius ſpeciei.

" Sint duae rationes AB ad BC, et AD ad DE, et ſint F, " G earum logarithmi unius ſpeciei, et H, K earundem loga- " rithmi alterius ſpeciei; erit F ad G, ut H ad K."

Sumantur ipſarum F, H aequemultiplices utcunque L, M; et ipſarum G, K aliae utcunque aequemultiplices N, O. Quam multiplex autem eſt L ipſius F, vel M ipſius H, tam multiplicata ſit ratio AP ad PC, rationis AB ad BC, et tam multiplicata ſit ratio AQ ad QE rationis AD ad DE quam multiplex eſt N ipſius G, vel O ipſius K. Quoniam igitur F eſt logarithmus rationis AB ad BC, et eſt L tam multiplex ipſius F, quam ratio AP ad PC eſt multiplicata rationis AB ad BC, erit L logarithmus rationis AP ad PC [Prop. 9.]; eadem ratione erit N logarithmus rationis AQ ad QE, uterque ſcilicet in altera ſpecie. Si igitur logarithmus L major ſit logarithmo N, erit ratio AP ad PC major ratione AQ ad QE [Cor. 3. Prop. 4.]; et quoniam ratio AP ad PC major eſt ratione AQ ad QE, erit [Prop. 4.] logarithmus M major logarithmo O in altera ſpecie; igitur, ſi L major ſit N, erit et M major O; eadem ratione, ſi L aequalis fuerit ipſi N, vel eadem minor, erit M aequalis ipſi O, vel minor quam ea. Quoniam igitur quatuor ſunt magnitudines F, G, H, K, et ſumptae ſunt ipſarum F, H utcunque aequemultiplices L, M; et ipſarum G, K, aliae utcunque aequemultiplices N, O; et oſtenſum eſt ſi L major ſit N, et M majorem eſſe quam O; et



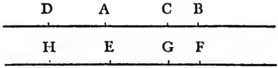
ſi aequalis aequalem; et ſi minor minorem eſſe; erit [5. Def. 5.] F ad G, ut H ad K.

D E F. V.

LOGARITHMUS rationis cujuſvis numeri ad unitatem dicitur etiam logarithmus illius numeri.

Cor. Quoniam logarithmus rationis aequalis ad aequalem eſt nihil [Cor. 1. Def. 3.] igitur logarithmus unitatis eſt nihil.

Ad ſequentia melius explicanda, ſit recta linea AB ad utraſque partes indefinita, et concipiantur omnes numeri, tum unitate majores, tum ea minores, locatos eſſe ad puncta in hac recta; unitatem ſcilicet locatam eſſe ad punctum A, et numeros unitate majores locatos eſſe ad puncta ad dextram ipſius A, ut ad B, C, &c. eos vero qui ſunt unitate minores ad puncta quae ſunt ad contrarias partes puncti A, ut ad D, &c. Sit alia recta indefinita EF, in qua ſit punctum E, reſpondens puncto A, hoc eſt, ut logarithmus unitatis ſit ad ad punctum E, logarithmus vero cujuſvis aliûs numeri, ut ejus qui eſt ad punctum B, ſumatur a puncto E, ad eas partes ejus ad quas eſt B reſpectu puncti A, ut EF, quae ſemper aequalis ſit ipſi AB; et ita EG aequalis ipſi AC, ſit logarithmus numeri ad punctum C, et EH aequalis ipſi AD ſit logarithmus numeri ad D, et ita deinceps.

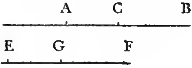


PROP. XI.

" SI ſumantur a puncto E logarithmi duorum quorumvis " numerorum, ut eorum qui locati ſunt ad puncta B, C (qui, " brevitatis gratia, in ſequentibus vocentur numeri B, C,) " qui logarithmi ſint EF, EG; diſtantia GF inter ipſorum " terminos erit logarithmus rationis numeri B ad numerum " C."

Cas. 1. Quando uterque numerus eſt major unitate.

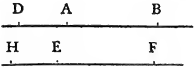
Sint numeri B, C, et ipſorum logarithmi EF, EG; et quoniam ratio numeri B ad numerum C compoſita eſt ex ratione B ad numerum, ſive unitatem, et ratione A ad C, quarum prima eſt ratio majoris ad minorem, reliqua vero eſt ratio minoris ad majorem; erit logarithmus rationis B ad C, per Cor. Prop. 5. vel Cor. Prop. 8. aequalis exceſſui logarithmi rationis B ad A, hoc eſt logarithmi numeri B ſupra logarithmum rationis A ad C, hoc eſt ſupra logarithmum numeri C; eſt autem EF logarithmus numeri B, et EG logarithmus ipſius C, GF vero eſt horum exceſſus, qui propterea eſt logarithmus rationis B ad C.



Cas. 2. Quando alter numerus major eſt unitate, reliquus vero minor.

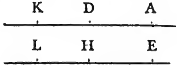
Sit numerus B major unitate, numerus vero D ad contrarias partes ipſius A, minor ſit unitate; et quoniam ratio numeri B ad ipſum D compoſita eſt ex ratione B ad A, ſive uni-

tatem, et ratione A ad D, quarum utraque eſt majoris ad minorem, erit, per Prop. 5, aut 6, 7, 8. logarithmus rationis B ad D aequalis ſummae logarithmorum rationum B ad A, et A ad D; eſt autem EF logarithmus rationis B ad A, five numeri B; et ſimiliter EH eſt logarithmus numeri D, five rationis D ad A; igitur HF ipſorum ſumma eſt logarithmus rationis B ad D.



Cas. 3. Quando uterque numerus minor eſt unitate.

Sint numeri D, K, et ipſarum logarithmi EH, EL; et quoniam ratio numeri D ad ipſum K compoſita eſt ex ratione D ad A, quae eſt minoris ad majorem, et ratione A ad K, majoris ad minorem, quae major eſt reciproca rationis D ad A, hoc eſt major ratione A ad D; erit, per Caſ. 2. Cor. Prop. 5. logarithmus rationis D ad K aequalis exceſſui logarithmi rationis A ad K, five logarithmi ipſius K ſupra logarithmum rationis D ad A, five logarithmum ipſius D. Eſt autem EL logarithmus ipſius K, et EH logarithmus ipſius D, quorum exceſſus eſt HL, qui propterea eſt logarithmus rationis D ad K.



Cor. Si logarithmis rationum minoris ad majorem, vel numerorum qui ſunt unitate minores apponatur ſignum ſubtractionis – logarithmus rationis numeri cujusvis ad numerum minorem, invenietur auferendo, ſecundum regulas in Al-

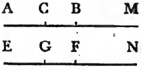
gebra traditas, logarithmum minoris numeri a logarithmo majoris. In ſecundo enim caſu praecedente, ſi a logarithmo EF numeri B auferatur − EH logarithmus numeri D unitate minoris, appoſito ſigno ſubtractionis, reliquum erit EF + EH, hoc eſt HF, prorſus ut in eo caſu oſtenſum fuit. Et in caſu tertio, ſi logarithmi numerorum D, K unitate minorum fiant − EH − EL, et a logarithmo − EH majoris numeri D auferatur − EL logarithmus minoris numeri K, reliquum erit EL − EH, hoc eſt LH, ut in Caſ. 3. oſtenſum fuit. Utile igitur eſt apponere ſignum − logarithmis numerorum qui unitate minores ſunt, tum ut diſtinguantur a logarithmis numerorum qui ſunt eorum reciproci, et qui iidem ſunt magnitudine cum illis, tum ut regulae pro operationibus arithmeticis de logarithmis generaliores fiant, ut in ſequentibus plenius apparebit.

PROP. XII. PROB.

Invenire logarithmum facti ſive producti a duobus numeris.

Cas. 1. Quando uterque numerus major eſt unitate.

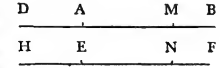
Sint duo numeri B, C, et EF, EG ipſorum logarithmi, erit ſumma logarithmorum EF, EG aequalis logarithmo facti a numeris B, C. Sit enim M numerus factus ab ipſis B, C, et logarithmus ejus ſit EN; et quoniam ut unitas, ſeu A, ad alterum ex numeris C, ita reliquus B ad numerum M ab ipſis factum; hoc eſt, quoniam ratio C ad A eadem eſt rationi M ad B, erunt [Prop. 1. aut 3.] logarithmi harum rationum



inter se aequales. Est autem EG logarithmus numeri C, sive rationis C ad A, et, per Prop. 11. est FN logarithmus rationis numeri M ad ipsum B. Aequalis igitur est EG ipsi FN, quare EG, una cum EF, aequalis est ipsi EN logarithmo facti M ab ipsis B, C numeris.

CAS. 2. Quando alter numerus est major, reliquus autem minor unitate.

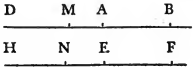
Sit numerus B major D, vero minor unitate; et primò, sit B major reciproco numero ipsius D, hoc est major quam $\frac{1}{D}$; erit igitur factus ab ipsis B, D major unitate; sit factus numerus M, cadit igitur M ad dextram unitatis quae est in A; et quoniam unitas, seu A, est ad B, ut D ad factum M, erit ratio B ad A eadem rationi M ad D; igitur logarithmi harum rationum erunt inter se aequales. Sit EF logarithmus rationis D ad A, EN vero logarithmus rationis M ad A, unde, per Prop. 11. erit HN logarithmus rationis M ad D. Igitur EF aequalis est ipsi HN, et, ablato communi HE, erit excessus EF supra HE aequalis ipsi EN, hoc est, erit excessus logarithmi numeri B supra logarithmum numeri D, aequalis logarithmo facti ab ipsis M.



Si vero ipsi EH logarithmo numeri D unitate minoris apponatur signum − sive subtractionis, erit summa logarithmorum numerorum B, D, quae est EF − EH aequalis ipsi EN logarithmo facti M, ut in Casu 1.

Secundò, sit numerus B minor quam $-\frac{1}{D}$, erit igitur factus

a B, D minor unitate; ſit factus M, cadit igitur M ad laevam ipſius A. Et quoniam unitas, ſeu A, eſt ad B, ut D ad factum M, erit ratio B ad A eadem rationi M ad D; igitur logarithmi harum rationum ſunt inter ſe aequales. Sit EF logarithmus rationis B ad A, et EH logarithmus rationis D ad A, EN vero logarithmus rationis M ad A; igitur, per Prop. 11. erit HN logarithmus rationis M ad D; et propterea EF eſt aequalis ipſi HN, quibus ex HE ablatis, erit reliquum, exceſſus ſc. ipſius EH ſupra EF, aequale reliquo EN; hoc eſt, exceſſus logarithmi ipſius D ſuprà eum numeri B aequalis eſt logarithmo facti M.

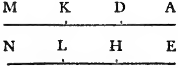


Et ſi EH notetur ſigno −, ut in praecedente Caſu, erit ſumma logarithmorum numerorum B, D, ſcilicet EF − EH aequalis ipſi − EN logarithmo facti M. Et quoniam logarithmi in tabulis aeque reſpondent numeris unitate majoribus quibus in tabulis apponuntur, ac eorum reciprocis; igitur ad inveniendum numerum M, qui unitate minor eſt, ope tabularum, ſumendus eſt reciprocus numerus ejus cui convenit logarithmus numeri M in tabulis; quod in omni caſu obſervandum.

Cas. 3. Quando uterque numerus minor eſt unitate.

Sit uterque numerus D, K minor unitate, et ſit M factus ab iiſdem, qui propterea minor etiam erit unitate; quare M cadit ad eaſdem partes unitatis A ad quas ſunt D, K; ſint vero EH, EL, EN logarithmi numerorum D, K, M; erit EN aequalis ſummae ipſarum EH, EL.

Quoniam enim eſt unitas, ſeu A ad D, ut K ad M, erit ratio A ad D eadem rationi K ad M, et rationum harum aequales erunt logarithmi; rationis vero A ad D, ſive numeri D, logarithmus eſt EH; et, per Prop. 11. rationis K ad M logarithmus eſt NL. Eſt igitur NL aequalis ipſi HE, et propterea NE aequalis eſt ſummae ipſarum EH, EL; hoc eſt, logarithmus facti M aequalis eſt ſummae logarithmorum numerorum D, K a quibus factus eſt.



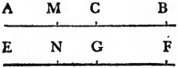
Et ſi ipſis EH, EL apponatur ſignum −, erit − EH − EL aequalis ipſi − EN logarithmo facti. In omnibus igitur caſibus logarithmus facti aequalis eſt ſummae logarithmorum numerorum a quibus factus eſt, dummodo logarithmis numerorum, qui unitate ſunt minores, apponatur ſignum − ſubtractionis.

PROP. XIII. PROB.

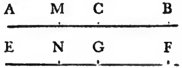
Invenire logarithmum quotientis, qui oritur dividendo unum numerum per alium.

CAS. 1. Quando uterque numerus major eſt unitate.

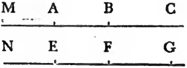
Sit numerus dividendus B, et ſit diviſor C, qui, primò, minor ſit quam B; igitur quotiens major erit unitate; ſit M quotiens. Erit logarithmus ipſius M aequalis exceſſui logarithmi numeri B ſupra logarithmum ipſius C.



Sint EF, EG, EN logarithmi numerorum B, C, M; et quoniam unitas, ſeu A, eſt ad quotientem M, ut diviſor C ad dividendum B, erit ratio M ad A eadem ratione B ad C. Igitur logarithmus rationis M ad A, hoc eſt ipſius M aequalis erit, per Prop. 1. aut 3. logarithmo rationis B ad C, hoc eſt, [Prop. 11.] ipſi GF. Eſt autem GF exceſſus ipſius EF, hoc eſt logarithmi dividendi B ſupra EG logarithmum diviſoris C.



Sit autem diviſor C major dividendo B; igitur quotiens M minor erit unitate, et cadit M ad contrarias partes A ad quas eſt B; erit autem EN logarithmus ipſius M aequalis FG exceſſui EG logarithmi diviſoris C ſupra E logarithmum dividendi B. Quoniam enim eſt unitas, ſeu A, ad quotientem M, ut diviſor C ad dividendum B, erit ratio M ad A eadem rationi B ad C; igitur logarithmus rationis M ad A, hoc eſt numeri M aequalis erit [Prop. 1. aut 3.] logarithmo rationis B ad C, hoc eſt [Prop. 11.] ipſi FG. Quoniam vero M eſt minor unitate, logarithmi vero in tabulis aptantur numeris qui ſunt majores unitate; igitur, in hoc et ſimilibus caſibus, numerus M erit reciprocus numeri cujus logarithmus in tabulis eſt FG. Idem enim eſt logarithmus cujuſvis numeri et ejus reciproci.

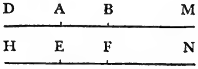


Et ſi a logarithmo EF dividendi B auferatur EG logarithmus diviſoris C, reliquus erit − FG, qui, ſigno − notatus, indicat numerum, cujus eſt logarithmus, minorem eſſe unitate;

atque ita regula praecedentis Caſus huic etiam inſervit.

Cas. 2. Quando numerus dividendus B major eſt unitate, diviſor vero D minor eſt unitate, et propterea quotiens M unitate major eſt. Logarithmus vero ipſius M aequalis erit ſummae logarithmorum dividendi B et diviſoris D.

Sint enim ipſorum B, D, M logarithmi EF, EH, EN; et quoniam eſt A ad M, ut D ad B, erit logarithmus rationis M ad A, hoc eſt ipſius M logarithmus, aequalis logarithmo rationis D ad B. Eſt

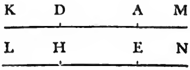


igitur EN, logarithmus ſc. ipſius M, aequalis HF logarithmo ſc. rationis D ad B, [Prop. 11.] hoc eſt ſummae logarithmorum EF, EH dividendi B et diviſoris D.

Et ſi EH logarithmus diviſoris D habeat praefixum ſibi ſignum −, et auferatur ab EF logarithmo dividendi B, reliquus erit HE + EF, hoc eſt HF; atque ita regula Caſ. 1. huic etiam inſervit.

Cas. 3. Quando uterque numerus minor eſt unitate.

Sit numerus dividendus D, et diviſor ſit K, qui primò minor ſit quam D; igitur quotiens M major eſt unitate. Erit logarithmus ipſius M aequalis exceſſui logarithmi diviſoris K ſupra logarithmum dividendi D.

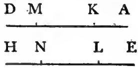


Sint EH, EL, EN logarithmi numerorum D, K, M; et quoniam eſt ut A ad M, ita K ad D, erit logarithmus rationis M ad A, hoc eſt numeri M

logarithmus aequalis logarithmo rationis D ad K, hoc eſt ipſi LH [Prop. 11.]; eſt igitur EN aequalis ipſi LH, hoc eſt exceſſui logarithmi EL diviſoris K ſupra EH logarithmum dividendi D.

Et ſi ipſis EH, EL praefigatur ſignum –, et auferatur – EL ab – EH, reliquum erit EL – EH, hoc eſt LH; igitur regula pro Caſ. 1. huic etiam inſervit.

Sit autem diviſor K major dividendo D; igitur quotiens M minor eſt unitate. Erit autem EN logarithmus ipſius M aequalis exceſſui HL logarithmi dividendi EH ſupra EL logarithmum diviſoris K. Quoniam enim eſt A ad M, ut K ad D, erit logarithmus rationis M ad A, hoc eſt numeri M, aequalis



logarithmo rationis D ad K, hoc eſt [Prop. 11.] ipſi HL, qui eſt exceſſus logarithmi EH, dividendi, ſupra EL logarithmum diviſoris.

Si autem ipſis EH, EL praefigatur ſignum –, et – EL auferatur a – EH, reliquum erit – HL, logarithmus ſcilicet ipſius M. Quoniam vero M minor eſt unitate, ſumendus eſt numerus reciprocus ejus qui habet logarithmum HL in tabulis, ut antea dictum.

In omnibus igitur caſibus logarithmus quotientis eſt exceſſus logarithmi dividendi ſupra logarithmum diviſoris, dummodo logarithmis numerorum, qui unitate ſunt minores, apponatur ſignum – ſubtractionis.

E

PROP. XIV. PROB.

Invenire logarithmum numeri qui eſt quartus proportionalis tribus numeris datis.

Quoniam quartus proportionalis eſt quotiens qui oritur dividendo numerum factum a ſecundo et tertio per primum proportionalem, invenietur logarithmus quarti auferendo logarithmum primi a logarithmo facti a ſecundo et tertio, praefixo ſigno – numeris qui unitate ſunt minores, ut conſtat ex Prop. 13. Logarithmus vero facti eſt ſumma logarithmorum ſecundi et tertii, praefixo ſigno – numeris unitate minoribus [Prop. 12.]; igitur, praefixo ſigno –, ut dictum fuit, ſi a ſumma logarithmorum ſecundi et tertii auferatur logarithmus primi, reliquus erit logarithmus quarti proportionalis qui inveniendus fuit.

FINIS.

G L A S G U A E:
IN AEDIBUS ACADEMICIS,
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS,
ACADEMIAE TYPOGRAPHI,
M.DCC.LXXIV.

Buk. 3

DE

LIMITIBUS QUANTITATUM ET RATIONUM.

FRAGMENTUM.

F

DE

LIMITIBUS QUANTITATUM ET RATIONUM.

FRAGMENTUM.

DEFINITIONES.

I. QUANTITAS conſtans ſeu invariabilis eſt quae ſemper ejuſdem magnitudinis eſt: ut diameter ejuſdem circuli, ipſiuſque dimidium, &c. Summa rectarum a quovis puncto in eadem ellipſi ad focos ipſius ductarum, et ejuſmodi: et patet omnem quantitatem datam conſtantem eſſe; non autem, contra, omnem conſtantem datam eſſe.[a]

II. Quantitas mutabilis eſt quae augeri vel diminui poteſt. Harum quantitatum variae ſpecies in Prop. 31, 32, 33, 34. Pappi enumerantur.[a]

III. Si quantitas mutabilis ſemper minor fuerit quantitate data, ſed ita augeri poterit, ut major fiat quacunque quantitate data quae minor eſt prima quantitate data; vel ſi

[a] Eodem modo definiuntur *ratio conſtans*, et *ratio mutabilis*.

quantitas mutabilis ſemper major fuerit quantitate data, ſed ita minui poterit, ut minor fiat quacunque quantitate data quae major eſt prima quantitate data; in utroque caſu quantitas prima data dicatur Limes quantitatis mutabilis.

IV. Si ratio mutabilis ſemper minor fuerit quam ratio data, ſed ita augeri poterit, ut major fiat ratione quacunque data quae minor eſt ratione prima data; vel ſi ratio mutabilis ſemper major fuerit quam ratio data, ſed ita minui poterit ut minor fiat ratione quacunque data quae major eſt ratione prima data; in utroque caſu dicatur ratio prima data Limes rationis mutabilis, in primo ſcilicet caſu dicatur Limes creſcentis rationis, in altero, Limes decreſcentis rationis.

PROP. I.

" SIT AB recta data, AC autem ſemper minor ſit ipſa AB,
" ſed quae augeri poterit ita ut exceſſus AB ſupra ipſam mi-
" nor poterit fieri quavis rectâ datâ, hoc eſt ſit AB limes creſ-
" centis rectae AC. Oſtendendum eſt, rationem aequalitatis
" limitem eſſe rationis AC ad AB; hoc eſt rationem AC ad
" AB, poſſe majorem fieri quavis ratione data quae minor eſt
" ratione aequalitatis."

Sit enim ratio data ea quam habet AD ad AB, eſt igitur ex hypotheſi AD minor AB:



et quoniam data eſt AB et ratio quam ad ipſam habet AD, dabitur AD, quare et DB; poterit igitur AC augeri ita ut exceſſus AB ſupra ipſam minor fiat recta DB: augeatur

et fiat AE; est igitur AE major AD, quare et ratio AE ad AB major est ratione data AD ad AB. Q. E. D. [b]

PROP. II.

" SIT AB recta data, AC autem semper minor sit ipsa AB, sed
" quae augeri poterit ita ut ratio ejus ad AB major poterit fi-
" eri quavis ratione data minoris ad majorem; hoc est sit
" ratio aequalitatis limes rationis AC ad AB. Ostendendum
" est posse excessum AB supra AC minorem fieri quavis rectâ
" datâ."

Sit DB recta data, quoniam igitur ratio AD ad AB est minoris ad majorem, poterit ex hypothesi AC



augeri ita ut ratio ejus ad AB major sit ratione AD ad AB. Augeatur, et fiat AC aequalis ipsi AE; est igitur AE major AD et propterea EB minor DB. Q. E. D.

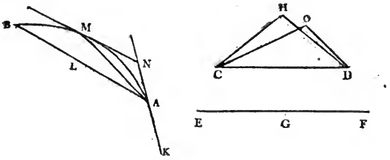
Ostendatur etiam utraque harum in casu quando AC semper major est AB, sed quae ita diminui poterit, &c.

PROP. III.

" IN quacunque curva vel parte curvae quae versus easdem
" partes tota est concava; limes rationis quam habet arcus
" curvae ad ipsius chordam, decrescentibus scilicet utrisque,
" est ratio aequalis ad aequale."

[b] Propositiones hae, quatuor priores, materiem tractatus hujus spectantes, hic in principio, commodissime locantur.

Sit recta linea AB chorda curvae AB, patet AB rectam semper minorem esse curva AB ut Archimedes assumpsit; ostendendum vero est, decrescente curva et recta, manente autem



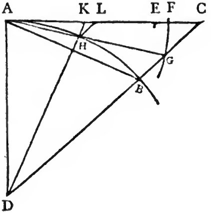
puncto A, posse rationem rectae ad curvam majorem fieri quacunque ratione data minoris ad majorem. Sit ratio data ea quam habet recta CD ad ipsam EF, et bifariam secta EF in G, constituatur super rectam CD triangulum isosceles habens latera CH, HD aequalia rectis EG, GF; quod fieri posse ex 22. 1. manifestum est. Contingat recta AK curvam in puncto A, ad quod fiat angulus KAL quod major sit angulo CHD, occurratque recta AL curvae in B; contingat recta MN ipsi AB parallela curvam in M, quod fieri posse patet, si concipiatur recta AB moveri semper sibi parallela donec curvae in unico puncto M occurrat. Jungatur AM et super rectam CD constituatur triangulum COD aequiangulum triangulo MNA; est igitur angulus COD aequalis ipsi MNA, hoc est angulo KAL, qui, ex constructione major est angulo CHD; major igitur est angulus COD angulo CHD. Si autem circa trian-

gulum CHD describatur circulus, rectae CH, HD quae inter se sunt aequales, simul majores erunt duabus quibusvis rectis, ad circumferentiam in qua est punctum H super CD descriptam, inflexis per Prop. 47. libri Sereni Antissensis de cono; et quoniam punctum O cadit intra hanc circumferentiam, quia angulus COD major est angulo CHD, multo erunt CH, HD, majores ipsis CO, OD; recta igitur CD majorem habet rationem ad ipsas CO, OD simul, quam ad ipsas CH, HD; est vero recta AM ad ipsas MN, NA simul, ut recta CD ad ipsas CO, OD simul, quoniam similia sunt MNA, COD triangula, igitur recta AM majorem habet rationem ad rectas MN, NA simul, quam CD habet ad ipsas CH, HD simul, hoc est ad rectam EF: recta igitur AM ad ipsas MN, NA, et multo magis ad curvam AM quae ipsis minor est, majorem habet rationem, ratione CD ad EF, hoc est ratione data, et propterea ratio aequalis ad aequale est limes rationis rectae AM ad curvam AM.

PROP. IV.

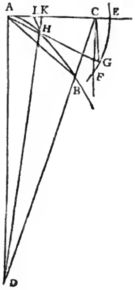
" SIT curva vel pars curvae ut in praecedente quam contin-
" gat recta AC in puncto A, et a dato puncto D in recta quae
" perpendicularis est ad AC in A, ad partes concavas curvae
" ducatur recta DC quae curvae in puncto B occurrat, rectae
" vero AC in C, et ducatur AB; si moveatur recta DC circa
" punctum D versus punctum A, erit ratio aequalis ad ae-
" quale limes rationis chordae AB ad segmentum AC con-
" tingentis."

Primo ſit chorda AB ſemper minor ſegmento AC contingentis, quando DC appropinquat punctum A; quod quidem ſemper fiet in caſu quo ſemicirculus ſuper diametrum AD cadit totus intra curvam, quoniam in hoc caſu angulus ABC ſemper erit major recto. Oſtendendum vero eſt rationem AB ad AC majorem fieri poſſe quacunque ratione data minoris ad majorem. Sit ratio data ea quam habet AE ad AC et ſi ratio AB ad AC non major fuerit ratione AE ad AC, ſumatur quodvis punctum F inter E et C, et quoniam AB minor eſt AF, nam vel aequalis eſt ipſi AE vel ipſa minor, quia ratio AB ad AC ponitur non major ratione AE ad AC, circulus deſcriptus centro A intervallo AF neceſſario rectae BC occurret; occurrat ipſi BC in G, et jungatur AG quae neceſſario occurret curvae[c]; occurrat in H, et juncta et producta DH rectae AC occurrat in K, et ducatur ad AC recta HL parallela ipſi GC; minor igitur eſt AK recta AL, et propterea ratio AH ad AK major eſt ratione AH ad AL hoc eſt ratione AG ſive AF ad AC; ratio igitur AH ad AK, multo erit major ratione data AE ad AC.



[c] Ponitur enim a quovis curvae puncto unicam tantum rectam duci poſſe curvam in eo puncto contingentem.

Sit autem, quando DC appropinquat punctum A, chorda AB semper major segmento AC contingentis, et ostendendum est rationem AB ad AC minorem fieri posse ratione quacunque data majoris ad minorem. Sit ratio data ea quam habet AE ad AC, et centro A, intervallo AE, circulus describatur cujus circumferentiae occurrat recta CF ipsi AD parallela in F, et in circumferentia EF sumatur quodvis punctum G inter curvam A B et contingentem AC; jungantur AG, GC, quarum AG necessario curvae occurret in quodam puncto H, ducatur DH quae ipsi AC occurrat in K, et rectae GC parallela ducatur HL. Est igitur AK major AL et propterea ratio AH ad AK minor est ratione AH ad AL, hoc est ratione AG sive AE ad AC, hoc est ratione data. Q. E. D.



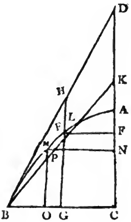
P R O P. V.

" IN quacunque curva vel parte curvae, a cujus quovis pun-
" cto duci poterit unica tantum recta curvam in eo puncto
" contingens, Limes rationis quam habet differentia abscissa-
" rum a quavis diametro, ad differentiam rectarum quae di-
" ametro ordinatim applicantur, eadem est rationi quam ha-
" bet segmentum diametri inter ordinatam et rectam quae

" curvam in termino ordinatae contingit, ad ipsam ordina-
" tam; hoc est rationi quam habet subtangens ad ordinatam."

Cas. 1. Quando curva concava est versus axem.

Sit enim curva AB et a puncto in ipsa B ducatur ordinatim applicata BC ad diametrum AC, sumatur vero quodvis aliud in curva punctum E, et primo sit E inter punctum B et diametri verticem A, ducaturque ordinata EF ad diametrum, et compleatur parallelogrammum EFCG; contingat vero BD curvam in B occurratque diametro in D, contingenti autem occurrat GE in H: est igitur EG minor GH, quare ratio EG ad GB minor erit ratione GH ad GB, hoc est ratione DC ad CB; et est EG differentia abscissarum AC, AF; GB vero differentia est ordinatarum BC, EF: ostensum igitur est in hoc casu, scilicet quando punctum E est



inter B, A puncta, differentiam abscissarum minorem habere rationem ad differentiam ordinatarum quam habet CD ad CB. Sit jam ratio quaevis minor ratione CD ad CB, sitque eadem rationi CK ad CB, minor igitur est CK quam CD: jungatur KB quae curvae necessario occurret; occurrat ei in L, et sumatur in curva punctum quodvis M inter B et L, ducaturque ad diametrum ordinata MN, et ad BC ducatur MO parallela ipsi NC, occurrat vero MO rectae BK in P. Est igitur MO major ipsa PO, quoniam scilicet BL est intra curvam

BML, quare ratio MO ad OB major erit ratione PO ad OB hoc eſt ratione KC ad CB; et eſt MO differentia abſciſſarum AC, AN; OB vero eſt differentia ordinatarum BC, MN. Quoniam igitur oſtenſum fuit rationem differentiae abſciſſarum ad differentiam ordinatarum in omni caſu minorem eſſe ratione CD ad CB, ſed quae poterit fieri major quacunque ratione CK ad CB, quae minor ſit ratione CD ad CB; erit per Def. 4. ratio CD ad CB limes rationis quam habet differentia abſciſſarum ad eam ordinatarum.

Si ſumatur punctum E ad alteras partes puncti B ad quas ſumptum fuit in praecedente caſu, ſimiliter oſtendetur rationem differentiarum praedictarum in omni caſu majorem eſſe ratione CD ad CB: ſed poſſe fieri ut minor ſit quacunque ratione quae major ſit ratione CD ad CB; unde et in hoc caſu ratio CD ad CB erit Limes rationis differentiarum.

Cas. 2. Fiat alia figura in qua curva ad axem convexa eſt, et ſi pro *major* legatur *minor*, et vice verſa; oſtendetur hic caſus ſecundus iiſdem verbis ac primus. Q. E. D.

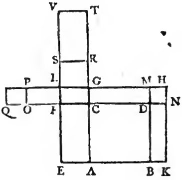
Cor. Si curva fuerit parabola Limes rationis differentiarum ſeu ratio CD ad CB eadem eſt rationi AC bis ad CB.

PROP. VI.

" SI quadratum ABDC et rectangulum AEFC habeant latus
" commune AC, alterum vero rectanguli latus AE vel CF da-
" tum ſit; augeatur vero vel minuatur quomodocunque ip-
" ſorum latus commune AC, et ſimul augeantur vel minuan-
" tur ipſae figurae: ratio quam latus quadrati bis, habet ad
" datum rectanguli latus, Limes erit rationis incrementi vel

" decrementi quadrati ad incrementum vel decrementum
" rectanguli."

Augeatur latus AC et fiat AG; et descripto super AG quadrato AGHK, compleatur etiam rectangulum AELG, occurrant vero GH, HK, ipsis BD, CD, in M, N; igitur gnomon BNG incrementum est quadrati, et spatium CL incrementum est rectanguli AF; fiat autem CO aequalis ipsi CD et compleatur rectangulum COPG. Quoniam igitur rectangulum OH aequale est gnomoni BNG, ratio BNG ad rectangulum CL eadem erit rationi OH ad CL hoc est rationi rectae ON ad ipsam FC; est autem ON major OD, hoc est CD bis, quare ratio BNG incrementi quadrati ad CL incrementum rectanguli, (in omni casu quo latus commune augetur) major est ratione lateris quadrati bis ad FC datum rectanguli latus.



Ostendendum restat, rationem incrementorum quadrati et rectanguli posse minorem fieri quavis ratione quae major est ratione CD bis ad FC. Sit enim quaevis ratio QD ad FC major ratione CD bis seu OD ad FC; igitur est QD major OD; producatur autem OD ad N ut ON minor sit ipsa QD et per N ducatur NK parallela ipsi AC; super AK describatur quadratum AKHG, et compleatur rectangulum ONHP: quoniam

igitur incrementum quadrati seu gnomon BNG aequale est rectangulo OH, erit BNG ad CL ut OH ad CL hoc est ut ON ad FC; ex constructione vero est ON minor QD, quare ratio OH ad CL, hoc est ratio incrementi quadrati ad illud rectanguli minor est ratione data QD ad FC: ergo per Def. 4. ratio OD hoc est CD bis ad CF, Limes est rationis dictorum incrementorum.

Eadem vero ratio Limes erit rationis decrementorum ut patet. Q. E. D.

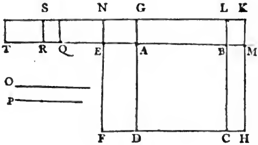
Cor. Hinc si rectangulum ARSE datum habens latus AE aequale fuerit quadrato AD, et augeantur vel diminuantur latera ita ut rectangulum et quadratum semper inter se aequalia sint; ratio lateris quadrati CD bis ad datum rectanguli latus CF Limes erit rationis incrementi lateris rectanguli ad incrementum lateris quadrati: nam augeatur latus quadrati AC et ipsum quadratum AD et fiat latus AG et quadratum AH, sit autem AV aequale ipsi AH quare et RV aequale erit gnomoni CMK. Est autem per hanc propositionem ratio CD bis ad CF Limes rationis CMK ad CL, hoc est rationis RV ad CL, hoc est rationis RT ad CG, hoc est rationis incrementi lateris rectanguli AR ad illud lateris quadrati AC. Q. E. D.

PROP. VII.

" SINT duo rectangula ABCD, AEFD, quibus commune latus est AD, latus vero AE datum sit, et augeantur latera DA, DC rectis AG, CH et compleantur rectangula GDHK, LBMK, AENG; sunt igitur AG, CH incrementa laterum DA, DC; et spatia ALH, AN incrementa rectangulorum

"AC, AF: decrefcant GA, HC; et vel fit ratio ipfarum femper eadem rationi datae rectae O ad datam P, vel Limes rationis ipfarum fit ratio rectae O ad rectam P; erit ratio quam habet rectangulum, O, AB una cum ipfo P, BC ad rectangulum O, AE, Limes rationis decrefcentium incrementorum ALH, AN."

PARS 1. Sit ratio incrementorum BL BM femper eadem rationi O ad P, erit ratio incrementi ALH ad incrementum AN femper major ratione quam fumma rectanguli O, AB



et ipfius P, BC habet ad rectangulum O, AE; fed minor poteft fieri ratione quacunque quae major eft ratione rectanguli O, AB una cum ipfo P, BC ad ipfum O, AE. Fiat enim ut O ad P ita BC ad AQ; et quoniam ex hypothefi eft BL ad BM, ut O ad P, erit BL five AG ad BM ut BC ad AQ; igitur rectangulum QG aequale eft ipfi BH, additoque communi AK, erit rectangulum QK aequale fpatio ALH: ratio igitur fpatii ALH ad rectangulum AN eadem eft rationi rectanguli QK ad ipfum AN, hoc eft rationi rectae QM ad ipfam

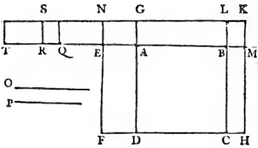
EA: quoniam vero eſt O ad P ut BC ad AQ, erit rectangulum O, AQ, aequale ipſi P, BC, additoque communi O, AB, erit rectangulum O, QB aequale rectangulo O, AB ſimul cum ipſo P, BC; igitur rectangulum O, AB ſimul cum ipſo P, BC eſt ad ipſum O, EA ut O, QB ad O, EA, hoc eſt ut recta QB ad ipſam EA: ratio autem rectae QM ad ipſam EA major eſt ratione rectae QB ad EA; igitur ratio ſpatii ALH ad AN major eſt ratione rectanguli O, AB ſimul cum ipſo P, BC ad ipſum O, EA.

Oſtendendum reſtat, rationem ALH ad AN poſſe fieri minorem ratione quacunque quae major eſt ratione rectanguli O, AB ſimul cum ipſo P, BC ad ipſum O, EA, hoc eſt ratione rectae QB ad ipſam EA. Sit ratio data ea quam habet recta QV ad ipſam EA; eſt igitur recta QB minor ipſa QV. Sumatur quodvis punctum M inter B et V et per M ducatur recta KMH parallela ipſi AD, et ut AQ ad BC, hoc eſt ut P ad O ita fiat BM ad MK, et compleantur parallelogramma DK, AN. Eſt igitur ſpatium ALH aequale rectangulo QK, ut oſtenſum fuit; quare ALH eſt ad rectangulum AN ut recta QM ad ipſam EA, hoc eſt ratio ſpatii ALH ad rectangulum AN minor eſt ratione rectae QV ad ipſam EA, hoc eſt ratione data: ratio igitur quam habet rectangulum O, AB una cum ipſo P, BC ad ipſum O, EA eſt Limes rationis incrementi ALH ad incrementum AN.

PARS 2. Sint duo rectangula ABCD, AEFD quibus commune latus eſt AD, latus vero AE datum ſit, et augeantur latera DA, DC, rectis AG, CH, et compleantur rectangula GDHK, LBMK, AENG. Sunt igitur AG, CH incrementa laterum DA, DC, et ſpatia ALH, AN, incrementa rectangu-

lorum AC, AF: decreſcant GA, CH, et Limes rationis ipſarum ſit ratio rectae O ad rectam P, erit ratio quam habet ſumma rectanguli O, AB et ipſius P, BC ad rectangulum O, AE Limes rationis decreſcentium incrementorum ALH, AN.

Primo. Sit ratio incrementorum AG, CH ſeu BL, BM ſemper minor ratione O ad P, ſed quae poterit major fieri ratione quavis data quae minor eſt ratione O ad P; erit ratio incrementi ALH ad incrementum AN ſemper major ratione quam ſumma rectanguli O, AB et ipſius P, BC habet ad rectangulum O, AE; ſed minor fieri poteſt ratione quaecunque data, quae major eſt ratione praedictae ſummae ad rectangulum O, AE.



Fiat enim ut O ad P ita BC ad AQ, quae ponatur in recta BA producta; eſt igitur rectangulum P, BC aequale ipſi O, AQ, et propterea ſumma rectanguli O, AB et ipſius P, BC, aequale eſt rectangulo O, QB; eſt autem O, QB ad ipſum O, EA ut recta QB ad rectam EA: ſint autem AG, BM incrementa ſimul facta rectarum AD, AB, et ut AG ad BM ita fiat

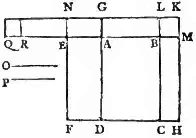
BC ad AR: quoniam igitur, ex hypothesi, ratio AG ad BM minor est ratione O ad P, hoc est ratione BC ad AQ, erit ratio BC ad AR minor ratione BC ad AQ; est igitur recta AR major ipsa AQ: ducatur RS parallela ipsi AG, et quoniam ut AG ad BM ita est BC ad AR, erit rectangulum AS aequale ipsi BH, additoque communi AK, erit rectangulum RK aequale spatio ALH: igitur ratio quam habet ALH ad AN eadem est rationi RK ad AN, hoc est rationi rectae RM ad ipsam EA; est autem RM major rectâ QB, quare ratio RM ad EA, major est ratione QB ad EA, hoc est ratio incrementi ALH ad incrementum AN, major est ratione quam habet summa rectanguli O, AB et ipsius P, BC ad ipsum O, AE.

Ostendendum restat, rationem incrementi ALH ad ipsum AN posse minorem fieri ratione quacunque data quae major est ratione rectanguli O, AB simul cum ipso P, BC ad ipsum O, AE, hoc est ratione rectae QB ad ipsam EA. Sit ratio data ea quam habet recta TB ad ipsam EA, est igitur TB major quam QB: sumatur punctum quodvis R inter T et Q, producatur RB et sumatur BV recta, incrementum scilicet ipsius AB minor quam TR, et si ratio incrementi quod simul fit ipsius AD ad BV, non eadem fuerit rationi BC ad AR vel major ipsa, decrescant incrementa ita ut ratio incrementi ipsius AD ad incrementum simul factum ipsius AB eadem sit rationi BC ad AR, vel sit hac ratione major quod ex hypothesi fieri potest, quoniam ratio BC ad AR minor est ratione BC ad AQ, hoc est ratione O ad P; sint haec incrementa AG, BM, et compleantur rectangula ut dictum fuit. Si igitur ratio AG, hoc est ipsius BL, ad BM eadem sit rationi BC ad AR, erit ut prius ostensum in Parte 1. ratio spatii ALH, hoc est incremen-

ti ipsius AC, ad AN incrementum ipsius AF eadem rationi rectae RM ad ipsam EA: est autem RM minor ipsa RV (decrevit enim BV in BM) quae ex constructione minor est quam TB: ratio igitur incrementi ALH ad ipsum AN sive ratio RM ad EA, minor est ratione TB ad EA, hoc est ratione data: si vero ratio BL ad BM major sit ratione BC ad AR, multo magis eadem sequetur conclusio; erit enim BL ad BM ut BC ad rectam minorem quam AR unde ut in ultimò praecedentibus sequetur conclusio fortius.

Secundo. Sit ratio incrementorum BL, BM semper major ratione O ad P, hoc est ratione BC ad AQ, sed quae minor poterit fieri ratione quacunque data quae major est ratione BC ad AQ; in hoc casu ratio incrementi rectanguli AC ad incrementum quod simul fit ipsius AF, potest vel eadem esse rationi rectae QB ad ipsam EA, vel major potest esse hac ratione, vel eâdem minor.

Sint enim LB, BM incrementa laterum CB, AB simul facta et ut LB ad BM, ita fiat BC ad AR, et quoniam ex hypothesi ratio LB ad BM hoc est BC ad AR major est ratione BC ad AQ, erit AR minor quam AQ. Primo, sit BM aequalis ipsi QR, igitur addita communi RB erit RM aequalis QB, et ratio RM ad EA eadem erit rationi QB ad EA, hoc est ratio spatii ALH

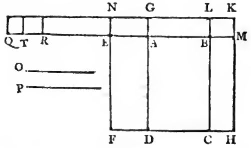


quod incrementum est ipsius AC, ad AN incrementum ipsius AF eadem erit rationi QB ad EA, hoc est rationi rectanguli

O, AB una cum ipſo P, BC ad rectangulum O, AE. Secundo, ſi BM major fuerit quam QR, ſimiliter oſtendetur ratio RM ad EA major ratione QB ad AE. Tertio, ſi BM minor fuerit quam QR, ſimiliter oſtendetur ratio RM ad EA minor ratione QB ad EA.

Oſtendendum vero eſt in ſecundo caſu in quo ſcilicet ratio RM ad EA, hoc eſt ratio incrementi ALH ipſius AC ad AN incrementum ipſius AF, major eſt ratione QB ad AE, poſſe rationem ALH ad ipſum AN minorem fieri quacunque ratione data quae major eſt ratione QB ad EA. Sit haec ratio data ea quam habet recta QM ad ipſam EA, eſt igitur QM major quam QB; quando vero BM eſt incrementum ipſius AB, ſit LB incrementum ipſius CB, et ut LB ad BM ita fiat CB ad AR, eſt igitur AR minor quam AQ ut prius oſtenſum: erit autem ratio ſpatii ALH ad ipſum AN eadem rationi rectae RM ad ipſam EA quae minor eſt ratione rectae QM ad EA hoc eſt ratione data.

In tertio caſu in quo ſcilicet ratio RM ad EA minor eſt ratione QB ad EA, oſtendendum eſt poſſe rationem ſpatii ALH quod incrementum eſt ipſius AC, ad ipſum AN, majorem fieri quacunque ratione data quae minor eſt ratione QB ad EA: ſit haec ratio data ea quam habet RB ad EA, eſt



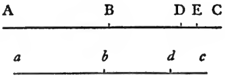
igitur RB minor quam QB, quare et RA minor eſt quam QA,

et propterea ratio BC ad RA major eſt ratione BC ad AQ; ex hypotheſi autem poteſt ratio incrementi rectae AD ad illud rectae AB minor fieri quacunque ratione quae major eſt ratione BC ad AQ: ſint igitur AG ſive LB et BM, earum incrementa, quae minorem habent rationem quam BC ad RA, et ut LB ad BM, ita fiat BC ad TA; igitur ratio BC ad TA minor eſt ratione BC ad RA, et erit TA major quam RA, et TB major quam RB, quare TM multo major eſt quam RB. Eſt igitur ratio TM ad AE, hoc eſt ratio incrementi ALH ipſius AC ad AN incrementum ipſius AF, major ratione RB ad AE, hoc eſt ratione data.[a] Q. E. D.

PROP. VIII.

" SI duae rationes variabiles ſint ſemper inter ſe eaedem, erunt
" rationes quae ipſarum ſunt Limites inter ſe eaedem."

Rationis AB ad BC limes ſit ratio AB ad BD, hoc eſt ſit ratio AB ad BC ſemper minor ratione AB ad BD, ſed quae poterit fieri major quavis ratione quae minor eſt ratione AB ad BD; vel contra ſit ratio AB ad BC ſemper major ratione AB ad BD, ſed quae minor fieri



[a] Et patet eandem rationem limitem eſſe rationis decrementorum, quando latera diminuuntur.

Huic propoſitioni, in priori tractatus hujus exemplari MS. addita fuit alia etiam de rectangulo, caſum quando latus unum augetur, alterum vero diminu-

poterit quavis ratione quae major eſt ratione AB ad BD; eodem modo rationis *ab* ad *bc* quae rationi AB ad BC eadem eſt, limes ſit ratio *ab* ad *bd*: erit ratio AB ad BD eadem rationi *ab* ad *bd*.

Primo ſit ratio AB ad BC minor ratione AB ad BD, hoc eſt appropinquet ad limitem ſuum ratio AB ad BC augendo; igitur quoniam ratio *ab* ad *bc* ſemper eadem eſt rationi AB ad BC, neceſſe eſt ut etiam ratio *ab* ad *bc* appropinquet ad limitem ſuum augendo, hoc eſt ut ratio *ab* ad *bc* minor ſit ratione *ab* ad *bd*. Si autem eaedem non ſint inter ſe rationes AB ad BD, *ab* ad *bd*, una ipſarum erit alterâ major; ſit ratio AB ad BD major ratione *ab* ad *bd*; fiatque ratio AB ad BE eadem ipſi *ab* ad *bd*; quoniam igitur ratio AB ad BE minor eſt ratione AB ad BD; poterit ratio AB ad BC major fieri ipſa AB ad BE; fiat, et ratio *ab* ad *bc* ſemper eadem exiſtens rationi AB ad BC, ſimul major fiet ratione AB ad BE hoc eſt ratione *ab* ad *bd*, ſed ratio *ab* ad *bc* ſemper minor eſt ratione *ab* ad *bd*, ut oſtenſum fuit, quod abſurdum eſt. Eſt igitur ratio AB ad BD eadem rationi *ab* ad *bd*.

Eodem modo in altero caſu, viz. quando ratio AB ad BC major eſt ratione AB ad BD, quae ipſius eſt limes, et ad ipſum minuendo appropinquat, oſtendetur, rationem AB ad BD eandem eſſe rationi *ab* ad *bd*. Q. E. D.

itur complectens. Haec vero caſuum multorum diſtinctione admodum deveniebat prolixa, et in exemplari noviſſimo ad cujus normam editio haec impreſſa eſt, omnino omittitur. Eodem vero prorſus ratiocinii modo, oſtenditur ac praecedens cui enunciatio propoſitioni conveniens praeponitur.

PROP. IX.

" Sint A et B quantitates variabiles utcunque ex aliis quan-
" titatibus compositae, sint autem in omni casu aequales, et
" sit C quantitas quaevis alia variabilis; et ratio α ad γ limes
" sit rationis quam incrementum ipsius A habet ad incremen-
" tum quantitatis C, ratio vero β ad γ limes sit rationis in-
" crementorum ipsarum B, C; erit α aequalis ipsi β."

Nam quoniam inter se aequales sunt quantitates A, B, aequalia erunt in omni casu ipsarum incrementa, igitur incrementum ipsius A est ad incrementum ipsius C, ut incrementum quantitatis B ad idem ipsius C incrementum; rationes vero quae earundem rationum sunt Limites inter se sunt eaedem per Prop. 8. et est ratio α ad γ Limes rationis incrementi ipsius A ad incrementum ipsius C, et ratio β ad γ Limes rationis incrementi ipsius B ad incrementum ipsius C; ergo est α ad γ ut β ad γ, ideoque α aequalis est ipsi β. Q. E. D.

Exemp. 1. Sit rectangulum A,B aequale rectangulo C,D; sintque latera A, B, C, quantitates variabiles, latus vero D sit invariabilis, et sit A, E aliud rectangulum cujus latus E est quantitas invariabilis: ratio vero α ad β sit Limes rationis incrementorum laterum A, B, et α ad γ Limes rationis incrementorum laterum A, C, erit [per Prop. 7.] ratio A,β; B,α simul, ad E,α Limes rationis incrementi ipsius A, B; ad incrementum ipsius A, E; est autem ratio D,γ ad E,α Limes rationis incrementorum ipsorum C,D, A,E; ergo per hanc Prop. est A,β una cum B,α aequale ipsi D,γ.

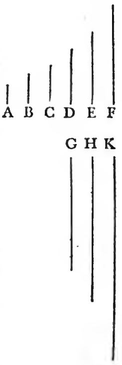
Ex. 2. Sit rectangulum A, B aequale quadrato ex C sintque A, B, C, quantitates variabiles, et rationis incrementorum ipsarum A, B Limes sit ratio α ad β, rationis vero incrementorum ipsarum A, C Limes sit ratio α ad γ. Aliud autem rectangulum sit D, E, cujus latus D est quantitas invariabilis, E vero variabilis; sitque ratio α ad ϵ Limes rationis incrementorum ipsarum A, E. Erit per Prop. 7. ratio $A\beta+B\alpha$ ad $D\epsilon$ Limes rationis incrementorum ipsorum A,B, D,E: et per Prop. 6. ratio $2C\gamma$ ad $D\epsilon$ Limes rationis incrementorum quadrati ex C et ipsius D,E; ergo per hanc erit $A\beta+B\alpha=2C\gamma$.

PROP. X.

" SINT rectae quotcunque A, B, C, D, E, F, deinceps pro-
" portionales, quarum prima A data sit, auctâ vero secundâ
" B, augeantur simul reliquae ita ut proportionales semper
" sint; et ratio quae Limes est rationis incrementorum pe-
" nultimae E et secundae B eadem sit rationi quam habet
" G, multiplex scilicet antepenultimae D, ad ipsam A; sit-
" que H eadem multiplex ipsius E atque G ipsius D. Erit
" ratio quae Limes est rationis incrementorum ultimae F et
" secundae B eadem rationi quam H et E simul habent ad
" primam A."

Sit ratio quam habet K ad A Limes rationis quam habet incrementum ipsius F ad incrementum ipsius B; et ex hypothesi, ratio G ad A Limes est rationis incrementorum ipsarum E, B; erit H una cum E aequalis ipsi K.

Quoniam enim ut E ad B ita eſt D ad A, et ſunt H, G ipſarum E, D aeque multiplices, erit [Cor. 4. 5.] H ad B ut G ad A, et rectangulum B,G aequale erit ipſi A,H: eſt autem ratio K ad A hoc eſt ratio rectanguli A, K ad quadratum ex A, Limes rationis incrementorum ipſarum F, B, hoc eſt rationis incrementorum rectangulorum A, F; A, B; et quoniam rectangula E, B; A, B habent latus commune B; et eſt recta A data, et ex hypotheſi ratio G ad A Limes eſt rationis incrementorum ipſarum E, B et invertendo ratio A ad G eſt Limes rationis incrementorum ipſarum B, E [b], igitur per Prop. 7. ratio rectanguli A,E una cum ipſo G,B ad quadratum ex A Limes eſt rationis incrementi rectanguli E,B ad incrementum ipſius A,B: quoniam igitur duo ſunt rectangula A, F; E, B inter ſe aequalia, ratio autem quae Limes eſt rationis incrementi ipſius A, F ad incrementum tertii rectanguli A, B oſtenſa eſt eadem rationi rectanguli A, K ad quadratum ex A; et ratio quae Limes eſt rationis incrementorum ipſorum E, B; A, B oſtenſa eſt eadem rationi rectanguli A, E una cum ipſo G, B ad idem quadratum ex A; erit per Prop. 9. rectangulum A, K aequale rectangulo A, E una cum ipſo G, B, hoc eſt ut



[b] Per Prop. ſequentem quae non ab hac pendet.

oftenfum, una cum ipfo A, H; eft igitur recta K aequalis ipfi E una cum H. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc in ferie deinceps proportionalium, A, B, C, D, E, F, &c. fi ratio *c* ad *b* Limes fit rationis incrementorum ipfarum C,B; et ratio *d* ad *b* Limes fit rationis incrementorum ipfarum D,B, et ita deinceps, pofitis fcilicet, *c*, *d*, *e*, *f*, antecedentibus rationum limitum ad communem confequentem *b*, fitque *n* numerus cujusvis termini F a primo A inclufivè, adeoque $n-1$ numerus termini antecedentis E; erit *f* ad *b* ut $\overline{n-1}\times$E ad A.

Quoniam enim rectangulum A, C aequale eft quadrato ex B, et data eft recta A, erit per Cor. Prop. 6. ratio *c* ad *b* Limes fcilicet rationis incrementorum ipfarum C, B eadem rationi 2B ad A: igitur per hanc propofitionem, erit *d* ad *b* ut 2C+C hoc eft 3C ad A et fimiliter erit *e* ad *b* ut 4D ad A, et ita deinceps: fcilicet fi *n* fit numerus cujufvis termini F a primo A inclufivè, erit *f* ad *b* ut $\overline{n-1}\times$ E ad A.

Cor. 2. Et fi a, x, $\frac{x^2}{a}$, $\frac{x^3}{a^2}$, $\frac{x^4}{a^3}$, &c. fit feries deinceps proportionalium, quarum ultima fit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$; quoniam $n+1$ eft numerus termini $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, erit n numerus termini penultimi $\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$, et propterea ratio $n\times\frac{x^{n-1}}{a^{n-2}}$ ad a erit, Limes rationis incrementorum ipfarum $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, x.

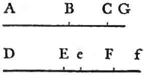
Et fi 1, x, x^2, x^3, &c. fint deinceps proportionales, quarum ultima fit x^n; erit ratio nx^{n-1} ad 1 ratio quae Limes eft ratio-

nis incrementorum ipſarum x^n, x. Et ſi $\dot{x}$ vel dx dicatur antecedens rationis incrementorum ipſarum x, x^n; erit $nx^{n-1}\dot{x}$ vel $nx^{n-1}dx$ conſequens ejuſdem rationis. Et haec $nx^{n-1}\dot{x}$ vel $nx^{n-1}dx$ eſt illud quod impropriè vocatur fluxio vel differentia ipſius x^n.

PROP. XI.

" SI ratio AB ad BC Limes ſit rationis variabilis DE ad EF;
" invertendo, erit ratio CB ad BA Limes rationis FE ad
" ED."

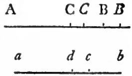
Primo. Sit ratio DE ad EF ſemper minor ratione AB ad BC, ſed quae poterit fieri major quavis ratione quae minor eſt ratione AB ad BC. Invertendo igitur erit ratio FE ad ED ſemper major ratione CB ad BA: praeterea vero oſtendendum eſt poſſe rationem FE ad ED minorem fieri quavis ratione, quae major eſt ratione CB ad BA. Sit ratio GB ad BA major ipſa CB ad BA; et invertendo erit ratio AB ad BG minor ratione AB ad BC: ex hypotheſi autem poterit ratio DE ad EF major fieri quavis ratione quae minor eſt ipsâ ratione AB ad BC; poterit igitur ratio DE ad EF major fieri ratione AB ad BG: fiat, et ſit ratio D*e* ad *ef*; ergo invertendo, ratio *fe* ad *e*D minor erit ratione GB ad BA. Et ut oſtenſum fuit eſt ratio *fe* ad *e*D ſemper major ratione CB ad BA. Quare [Def. 4. ſc. limitis rationis.] ratio CB ad BA Limes eſt rationis *fe* ad *e*D, ſeu FE ad ED. Q. E. D.



Similiter ſi ratio DE ad EF ſemper major fuerit ratione AB ad BC ſed quae minor poterit fieri quavis ratione, quae ipsâ AB ad BC major eſt; oſtenditur rationem CB ad BA limitem eſſe rationis FE ad ED.

P R O P. XII.

" SI rationis AB ad BC Limes ſit ratio *ab* ad *bc*, hoc eſt ſi " ratio AB ad BC ſemper minor ſit ratione *ab* ad *bc*, ſed quae " poteſt major fieri ratione quacunque data quae minor eſt " ratione *ab* ad *bc*; vel ſi ratio AB ad BC ſemper major ſit ra- " tione *ab* ad *bc*, ſed quae minor fieri poteſt quacunque rati- " one data quae major eſt ratione *ab* ad *bc*: erit convertendo, " ratio *ab* ad *ac* Limes rationis AB ad AC."



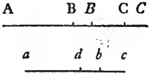
Nam in primo caſu, quoniam ratio AB ad BC ſemper minor eſt ratione *ab* ad *bc*; convertendo, erit ratio AB ad AC ſemper major ratione *ab* ad *ac*: oſtendendum vero reſtat, poſſe rationem AB ad AC, minorem fieri quacunque ratione data, quae major eſt ratione *ab* ad *ac*. Sit ratio *ab* ad *ad* major ratione *ab* ad *ac*, et convertendo erit ratio *ab* ad *bd* minor ratione *ab* ad *bc*; ex hypotheſi autem ratio AB ad BC poteſt fieri major quacunque ratione *ab* ad *bd* quae minor eſt ratione *ab* ad *bc*; fiat, et ſit ratio A*B* ad *BC*; igitur convertendo ratio A*B* ad A*C*, minor erit ratione *ab* ad *ad*. Quoniam igitur ratio AB ad AC ſemper major eſt ratione *ab* ad *ac*, ſed minor fieri poteſt quacunque ratione data, quae major eſt

ratione *ab* ad *ac*; erit ratio *ab* ad *ac* Limes rationis AB ad AC. Similiter oſtenditur propoſitio in caſu reliquo. Q. E. D.

P R O P. XIII.

" SI rationis AB ad BC Limes ſit ratio *ab* ad *bc*, hoc eſt ſi " ratio AB ad BC ſemper minor ſit ratione *ab* ad *bc*, ſed quae " major fieri poteſt quacunque ratione data, quae minor eſt " ratione *ab* ad *bc*; vel ſi ratio AB ad BC ſemper major ſit, " &c. Componendo, rationis AC ad CB Limes erit ratio *ac* " ad *cb*."

Nam quoniam ratio AB ad BC ſemper minor eſt ratione *ab* ad *bc*, componendo ratio AC ad CB ſemper minor erit ratione *ac* ad *cb*: oſtendendum vero reſtat, rationem AC ad CB majorem fieri poſſe quacunque ratione data, quae minor eſt ratione *ac* ad *cb*; ſit ratio data *ac* ad *cd* minor ratione *ac* ad *cb*; et dividendo ratio *ad* ad *dc* minor

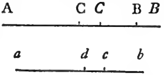


erit ratione *ab* ad *bc*; igitur ratio AB ad BC major fieri poteſt ratione *ad* ad *dc*; fiat, et deveniat ratio A*B* ad *BC*; igitur componendo ratio A*C* ad *CB* major erit ratione *ac* ad *cd* hoc eſt ratione data, et propterea rationis AC ad CB Limes eſt ratio *ac* ad *cb*. Et ſimiliter in reliquo caſu. Q. E. D.

PROP. XIV.

"SI rationis AB ad BC Limes ſit ratio *ab* ad *bc*, hoc eſt ſi
"ratio AB ad BC ſemper minor ſit ratione *ab* ad *bc*, &c.
"Dividendo, rationis AC ad CB Limes eſt ratio *ac* ad *cb*."

Nam quoniam ratio AB ad BC ſemper minor eſt ratione *ab* ad *bc*, dividendo erit ratio AC ad CB ſemper minor ratione *ac* ad *cb*: oſtendendum reſtat, rationem AC ad CB majorem fieri poſſe quacunque ratione data, quae minor eſt ratione *ac* ad *cb*; ſit ratio data *ad* ad *db* minor ratione *ac* ad *cb*, et componendo, ratio *ab* ad *bd* minor erit ratione *ab* ad *bc*: ex hypotheſi autem ratio AB ad BC major fieri poteſt ratione quacunque data *ab* ad *bd*, quae minor eſt ratione *ab* ad *bc*; fiat, et deveniat ratio A*B* ad *BC*; et dividendo, ratio A*C* ad *CB* major erit ratione *ad* ad *db*, hoc eſt ratione data; quoniam igitur ratio AC ad CB ſemper minor eſt ratione *ac* ad *cb*, ſed major fieri poteſt ratione quacunque data *ad* ad *db* quae minor eſt ratione *ac* ad *cb*, erit rationis AC ad CB Limes, ratio *ac* ad *cb*. Et ſimiliter in reliquo caſu. Q. E. D.



PROP. XV.

"SI ratio A ad B ſemper eadem fuerit rationi *a* ad *b*; rationis autem B ad C Limes ſit ratio *b* ad *c*; erit ratio *a* ad *c*
"Limes rationis A ad C."

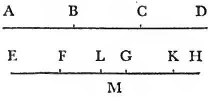
Sit ratio B ad C ſemper minor vel major ratione *b* ad *c*, puta ſemper minor; quoniam igitur eſt A ad B ut *a* ad *b*, ratio vero B ad C minor ratione *b* ad *c*; erit ex aequo ratio A ad C minor ratione *a* ad *c*. Oſtendendum vero praeterea eſt, rationem A ad C majorem fieri poſſe quavis ratione, quae minor eſt ipſa *a* ad *c*. Sit igitur ratio *a* ad *d* minor ratione *a* ad *c*, unde erit *d* major *c*; quare ratio *b* ad *d* minor erit ratione *b* ad *c* quae ſcilicet Limes eſt rationis B ad C; ergo per definitionem quartam, poterit ratio B ad C major fieri ratione *b* ad *d*: fiat itaque, et quoniam ratio A ad B fit ſimul eadem rationi *a* ad *b*; erit ex aequo, ratio A ad C major ratione *a* ad *d*, hoc eſt ratione propoſita: quoniam igitur ratio A ad C ſemper eſt minor ratione *a* ad *c*, poterit autem fieri major quavis ratione *a* ad *d* quae minor eſt ratione *a* ad *c*; erit per definitionem ratio *a* ad *c* Limes rationis A ad C. Q. E. D.

Cor. Sint AC, BD rectangula quae data habent latera A, B; Limes autem rationis incrementorum laterum variabilium C, D, ſit ratio γ ad δ; erit Limes rationis incrementorum ipſorum AC, BD, eadem rationi quae componitur ex rationibus A ad B et γ ad δ. Denotentur enim incrementa quaevis ſimul facta laterum C, D, rectis *c*, *d*; et ſumatur rectangulum BC. Ipſorum igitur AC, BC incrementa erunt A*c*, B*c*, quorum ratio ſemper eadem eſt rationi A ad B. Incrementa vero ipſorum BC, BD, ſunt B*c* B*d*; quorum ratio eſt eadem ipſi *c* ad *d*; quare et Limes rationis B*c* ad B*d* eadem eſt Limiti ipſius *c* ad *d*, hoc eſt rationi γ ad δ, cui eadem fiat ratio B ad E; et per hanc Prop. erit Limes rationis A*c* ad B*d* eadem rationi A ad E hoc eſt ei quae compoſita eſt ex rationibus A ad B, et (B ad E, hoc eſt) γ ad δ.

PROP. XVI.

" SI rationis AB ad BC, Limes ſit ratio EF ad FG, et ratio-
" nis BC ad CD Limes ſit ratio FG ad GH, utraque vero ra-
" tio augeatur vel minuatur. Erit ratio EF ad GH Limes
" rationis AB ad CD."

Utraque enim ratio minuatur et ex definitione Limitis rationis, erit ratio AB ad BC ſemper major ratione EF ad FG, et ratio BC ad CD ſemper major ratione FG ad GH; igitur ex aequali, ratio AB ad CD ſemper major erit ratione EF ad GH: oſtendendum vero reſtat, rationem AB ad CD minorem



fieri poſſe ratione quacunque data, quae major eſt ratione EF ad GH. Sit ratio EF ad GK major ratione EF ad GH, eſt igitur GH major GK: fiat ut FG ad GH ita quaedam FL ad GK, et quoniam GH major eſt GK, erit FG major FL (14. 5.) Sumatur FM quae minor ſit quam FG, major autem quam FL; erit igitur ratio EF ad FM major ratione EF ad FG, ratio autem FM ad GK major erit ratione FL ad GK: quoniam vero rationis decreſcentis AB ad BC Limes eſt ratio EF ad FG, poterit ratio AB ad BC minor fieri quacunque ratione data, quae major eſt ratione EF ad FG; decreſcat igitur ratio AB ad BC ut minor fiat ratione EF ad FM; et quoniam rationis decreſcentis BC ad CD Limes eſt ratio FG ad GH

poteſt ratio BC ad CD minor fieri ratione quacunque data, quae major eſt ratione FG ad GH, hoc eſt ratione FL ad GK: fiat igitur ratio BC ad CD minor ratione FM ad GK. Quoniam igitur ratio AB ad BC minor facta eſt ratione EF ad FM, ratio autem BC ad CD minor facta eſt ratione FM ad GK, erit ratio AB ad CD ex aequali minor ratione EF ad GK hoc eſt ratione data. Similiter oſtendetur caſus reliquus quando ratio utraque augetur, invertendo. Q. E. D.

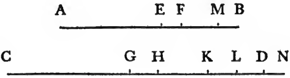
PROP. XVII.[a]

" SINT duae magnitudines AB, CD, ſintque aliae magnitu-
" dines AE, AF, &c. minores quidem ipſa AB ſed quae ma-
" jores poſſunt fieri quavis magnitudine, quae ipsâ AB ſit mi-
" nor; et ſint magnitudines CG, CH, &c. minores quidem
" ipsâ CD ſed quae majores poſſunt fieri quavis magnitudine
" quae minor ſit ipſa CD; ſit autem ratio ipſius AE ad CG
" vel AF ad CH, &c. ſemper eadem rationi datae; huic datae
" rationi eadem erit ratio AB ad CD."

Si enim non ſit ut AE ad CG ita AB ad CD; erit AE ad CG ut AB vel ad magnitudinem minorem ipſa CD, vel ad majorem. Sit primum ad minorem; ſitque AE ad CG ut AB ad CK. Quoniam igitur CK minor eſt ipſa CD, poteſt quaedam ipſarum CG, CH, &c. major fieri ipſa CK, ſit haec CL; ſitque AM ea ipſarum AE, AF, &c. magnitudinum, quae

[a] Propoſitio haec utiliſſima, etiam de Limitibus quantitatum, praecedenti ſeriei adjungitur.

ad CL datam habet rationem quam habet AE ad CG. Ut autem AE ad CG, ita eſt AB ad CK; ergo ut AB ad CK, ita eſt



AM ad CL. Ex hypotheſi autem AB major eſt AM, major igitur eſt CK quam CL [14. 5.] ſed et minor, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt AE ad CG ut AB ad aliquam magnitudinem quae minor eſt ipſa CD. Eâdem ratione oſtendetur neque eſſe CG ad AE, ut CD ad aliquam magnitudinem minorem ipſa AB. Oſtendendum reſtat neque eſſe ut AE ad CG, ita AB ad aliquam magnitudinem quae major eſt ipſa CD. Si enim fieri poteſt, ſit AE ad CG ut AB ad CN majorem ipſa CD. Invertendo igitur erit CG ad AE ut CN ad AB. Quoniam vero eſt CN major CD, erit CN ad AB, ut CD ad magnitudinem ipſa AB minorem [14. 5.] Ergo ut CG eſt ad AE, ita CD ad magnitudinem minorem ipſa AB quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Non igitur ut AE ad CG ita eſt AB ad magnitudinem aliquam ipsâ CD majorem: oſtenſum autem eſt neque ad minorem: quare ut AE ad CG ita eſt AB ad CD. Q. E. D.

Haec eſt propoſitio generalis quae adhibetur in Propp. 2, 5, 11, 12, 18, Lib. 12. Eucl. multiſque aliis in aliis auctoribus, et quae ſemel demonſtrata, ut jam factum, propoſitiones eas breviores reddere poteſt.

F I N I S.

Beuk 4 31

A P P E N D I X,

CONTINENS PAUCA

P R O B L E M A T A,

EAQUE HAUD DIFFICILIA,

E COMPLURIMIS IN MANUSCRIPTIS

R O B. S I M S O N, M. D.

S E L E C T A;

QUAEQUE PRO SPECIMINE EXHIBENTUR

AD ILLUSTRANDAM

VETERUM GEOMETRARUM ANALYSIN.

P R O B. I.

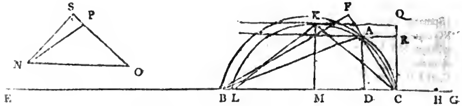
Eſt Prob. 4tum Arithmeticae univerſalis Newtoni generalius factum.

" TRIANGULI ABC dato angulo BAC non recto, perpendiculo ab eo ad baſim, et perimetro; invenire triangulum."

Factum puta, et ſit AD perpendicularis ad baſim, et data recta CE aequalis perimetro. Sitque primo angulus BAC major recto, et ducatur BF perpendicularis ad CA productam. Specie igitur datum eſt triangulum ABF [43. Dat.], quare data eſt ratio rectae BF ad ipſum BA; ſit huic eadem ratio AD ad CG, et quoniam data eſt AD, data erit CG: et quoniam data eſt ratio BF ad FA, huic eadem ſit ratio AD ad GH, data autem eſt AD, quare data eſt GH. Eſt autem recta EC aequalis perimetro trianguli ABC, quare recta EB aequalis eſt ipſis BA, AC ſimul. Et [7. 2.] quadratum ex EC una cum quadrato ex CB eſt aequale duplo rectangulo EC, CB una cum quadrato ex EB, hoc eſt una cum quadratis ex BA, AC et duplo rectangulo BA, AC, quorum quadratum ex BC aequale eſt [12. 2.] quadratis ex BA, AC una cum duplo rectangulo CA, AF; reliquum igitur quadratum ex EC una cum duplo

A

rectangulo CA, AF aequale est reliquo duplo scilicet rectangulo EC, CB una cum duplo rectangulo BA, AC. Quoniam vero aequiangula sunt triangula BFC, ADC, est FB ad BC, ut DA ad AC, et propterea rectangulum AC, BF aequale est ipsi BC, DA. Et est BF ad FA, ut AD ad GH, igitur rectangulum AC, BF est ad rectangulum CA, AF, ut rectangulum BC, AD ad ipsum BC, GH; est autem



rectangulum AC, BF aequale ipsi BC, AD; rectangulum igitur CA, AF aequale est ipsi BC, GH. Et quoniam est BF ad BA, ut AD ad CG, erit rectangulum CA, BF ad ipsum CA, AB, ut rectangulum BC, AD ad ipsum BC, CG; est igitur rectangulum CA, AB aequale rectangulo BC, CG. Ostensum autem fuit quadratum ex EC una cum duplo rectangulo CA, AF aequale duplo rectangulo EC, CB una cum duplo ipsius CA, AB; igitur quadratum ex EC una cum duplo rectangulo BC, GH aequale est duplo rectangulo EC, CB una cum duplo ipsius BC, CG; et ablato communi, duplo scilicet rectangulo BC, GH, erit quadratum ex EC aequale duplo rectangulo BC, EH. Data autem est recta EC, et quia datae sunt CG, GH, data erit EH, quare data erit BC basis trianguli ABC. Et quoniam datus est BAC angulus, tangit punctum A circumferentiam positione datam [Prop. 2. Lib. 1. Apollonii Loc. Plan.] et quoniam altitudo AD data est tangit idem punctum A rectam positione datam [37. Dat.]. Datum igitur est punctum A, quare triangulum ABC positione datum est.

Quoniam vero ad constructionem requiritur ut supra inventam basim BC describatur segmentum circuli capiens angulum dato angulo aequalem, et ductâ CR ad rectos angulos ipsi BC et dato perpendiculo aequali, ut parallela per R rectae BC occurrat circumferentiae, quod non semper fieri potest, ideo Problema non semper potest construi. Si vero parallela per R contingat circumferentiam unica erit solutio. Dato vero angulo et datâ perimetro, triangulum et perpendicularis a dato angulo ad basim, quae hoc efficient, ita invenientur. Puta factum, sit scilicet triangulum KLC cujus angulus LKC aequalis est dato angulo BAC, et cujus perimeter aequalis est datae EC; ducatur KM perpendicularis ad basim, et quoniam requiritur ut parallela basi LC ducta per K contingat circulum circa KLC triangulum descriptum, erit K vertex segmenti LKC; igitur aequales sunt rectae LK, KC, et datus est angulus

LKC, quare triangulum LKC specie datum [44 Dat.]; data igitur est ratio KL ad LC, ut et ratio duplae ipsius KL, hoc est rectarum LK, KC simul ad LC, et componendo data erit ratio ipsarum LK, KC, CL simul hoc est rectae EC ad ipsam LC. Et data est EC, data igitur est LC, et datum propterea erit segmentum LKC et vertex ejus K, ut et perpendicularis KM.

Componetur hoc ita.

Sumatur quaevis data recta NO, et super ipsam describatur triangulum Isosceles PNO cujus angulus NPO sit dato angulo aequalis; et ut perimeter trianguli PNO ad basim ejus NO, ita fiat EC ad quartam LC; et super LC describatur segmentum circuli capiens angulum aequalem angulo NPO, et a K vertice segmenti ducantur KL, KC, et KM perpendicularis ad LC, erit LKC triangulum inveniendum. Aequiangula enim sunt triangula Isoscelia KLC, PNO quae habent angulos ad ipsorum vertices K, P aequales; ut igitur perimeter trianguli KLC ad ipsius basim LC, ita (est perimeter trianguli PNO ad basim ipsius NO, et ita, ex constructione, est) recta EC ad ipsam LC, et propterea est perimeter trianguli KLC aequalis rectae EC datae scilicet perimetro. Et si compleatur parallelogrammum KMCQ manifestum est rectam QK quae parallela est basi LC contingere circulum LKC in vertice K, transit enim KM per ejus centrum [cor. 1. 3.] et rectus est angulus QKM.

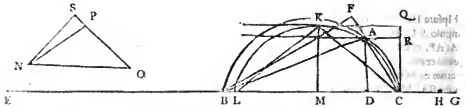
Inquirendum autem est an perpendicularis KM major aut minor sit perpendiculari in quovis alio triangulo quod habet angulum ad verticem aequalem dato angulo LKC, et perimetrum aequalem datae perimetro EC.

Sit aliud istiusmodi triangulum ABC; patet basim ejus BC necessario majorem esse basi LC, nam si minor esset, segmentum circuli super ea descriptum capiens angulum ipsi LKC aequalem caderet intra segmentum LKC, et propterea latera cujusvis trianguli in segmento super basi minore descripto simul minora essent rectis LK, KC, quare et perimeter ejus minor esset perimetro trianguli KLC, hoc est minor data recta EC. Est igitur basis BC major basi LC, et quoniam perimetri triangulorum ABC, KLC, ex hypothesi, sunt aequales, erit summa laterum BA, AC minor summa ipsorum LK, KC. Summa autem laterum cujusvis trianguli super basi LC quod verticem habet in recta QK vel supra eam major est summâ laterum LK, KC, et multo magis si triangulum fuerit super basim majorem BC, et vertex ejus in eadem rectâ vel supra eam. Igitur vertex trianguli super basi BC quod datum habet angulum ad verticem et datam perimetrum, necessario cadet infra rectam QK, et ideo KM altitudo trianguli LKC est maxima.

Componetur Problema ita.

Sit NPO datus angulus cui angulus ad verticem trianguli inveniendi debet esse aequalis, et sit CR altitudo data, et CE data perimeter ejusdem trianguli, et ponatur CR ad rectos angulos ipsi EC. Inveniatur autem triangulum LKC ut dictum fuit,

et si data altitudo CR aequalis fuerit altitudini KM trianguli LKC, erit LKC triangulum inveniendum, aliud enim quodvis triangulum datum habens angulum et datam perimetrum, minorem habet altitudinem rectâ KM. Si vero altitudo CR non aequalis fuerit ipsi KM, erit quam KM minor; sit ita, et a quovis puncto N in recta NP ducatur NS ad rectos angulos ipsi OP; ut vero NS ad NP, ita fiat CR ad CG; fiat etiam ut NS ad SP, ita CR ad GH. Ipsi autem HE bis, et rectae EC, tertia proportionalis inveniatur CB, et super BC describatur segmentum circuli capiens angulum aequalem angulo NPO, et per R ducatur RA parallela rectae BC; et quoniam RC minor est quam KM, et propterea multo minor altitudine segmenti super BC descripti, RA necessario circumferentiae hujus in duobus punctis occurret. Sit eorum alterutrum punctum A, et AB, AC jungantur, erit ABC triangulum quod inveniendum propositum erat. Angulus enim BAC est dato angulo NPO aequalis, et si ducatur AD perpendicularis ad basim, erit AD aequalis altitudini datae RC. Perimetrum



autem trianguli ABC aequalem esse datae rectae EC ita ostendetur. Ducatur BF perpendicularis ad CA; sunt igitur triangula BFA, NSP aequiangula, quare ut BF ad BA, ita est (NS ad NP, et ita facta fuit) CR sive AD ad CG; et ut BF ad FA, ita est (NS ad SP, et ita facta fuit) AD ad GH. Igitur, ut in Analysi ostensum fuit, est rectangulum CA, AF aequale ipsi BC, GH; et rectangulum CA, AB aequale rectangulo BC, CG. Est autem [7. 2.] quadratum ex EC una cum quadrato ex CB aequale duplo rectangulo EC, CB una cum quadrato ex EB; et, ex constructione, quadratum ex EC aequale est duplo rectangulo EH, BC, et [12. 2.] quadratum ex BC aequale est quadratis ex BA, AC una cum duplo rectangulo CA, AF, hoc est una cum duplo ipsius BC, GH. Duplum igitur rectangulum EG, BC una cum quadratis ex BA, AC aequale est duplo rectangulo EC, CB una cum quadrato ex EB; auferatur commune, duplum scilicet rectangulum EC, CB, et reliquum, duplum scilicet rectangulum BC, CG, hoc est duplum rectangulum CA, AB, una cum quadratis ex BA, AC, hoc est [4. 2.] quadratum ex BA, AC tanquam ex una recta aequale erit quadrato ex EB. Igitur rectae BA, AC simul aequales sunt rectae EB; addatur communis BC, et perimeter trianguli ABC aequalis erit rectae EC. Q. E. D.

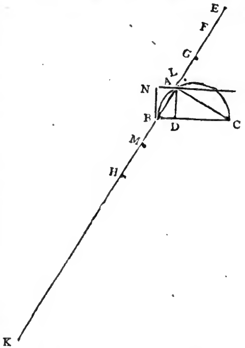
Iisdem verbis fit analysis et compositio quando Angulus BAC est minor recto ope 13. 2.

PROB. II.

Eſt Prob. 5tum Arithmeticae univerſalis.

" DATIS trianguli rectanguli ABC baſi BC, et ſumma perpendiculi AD et laterum " BA, AC, invenire triangulum."

Factum ſit, et producatur latus BA ad E, ſitque BE aequalis perpendiculo et lateribus ſimul quae propterea data eſt; ſit AF aequalis lateri AC, erit igitur FE aequalis perpendiculo AD. Sit utraque BG, BH aequalis baſi BC, et quoniam aequiangula ſunt triangula BAC, DAC, erit rectangulum BC, AD, hoc eſt ipſum HB, FE aequale rectangulo BA, AC, hoc eſt ipſi BA, AF, et ipſorum dupla aequalia erunt. Eſt autem quadratum ex BC aequale quadratis ex BA, AF, igitur quadratum ex BC una cum rectangulo HB, FE bis aequale eſt [4.2.] quadrato ex BF. Commune addatur rectangulum BE, EF bis, et quadratum ex BC una cum rectangulo HB, FE bis et rectangulo BE, EF bis, hoc eſt una cum rectangulo HE, EF bis aequale erit quadrato ex BF una cum rectangulo BE, EF bis, hoc eſt [7. 2.] quadratis ex BE, EF. Fiat HK aequalis ipſi HE, et quadratum ex BC una cum rectangulo KE, EF aequale erit quadratis ex BE, EF; commune auferatur quadratum ex EF, et quadratum ex BC una cum rectangulo KF, FE aequale erit quadrato ex BE, quorum quadratum ex BC aequale eſt quadrato ex BG; reliquum igitur rectangulum KF, FE aequale eſt reliquo [6. 2.] rectangulo HE, EG.



Datae autem sunt rectae HE, EG, datum igitur est rectangulum HE, EG, hoc est ipsum KF, FE; et data est recta KE, data igitur est recta EF, hoc est AD [86. Dat.]. Quoniam vero BG, hoc est BC, minor est ipsis BA, AC simul, hoc est quam recta BF, erit BG multo minor quam BE, et GE quam HE. Patet igitur rectangulum HE, EG minus esse quadrato ex HE dimidio ipsius KE, et propterea semper applicari posse rectangulum aequale ipsi HE, EG ad rectam KE, deficiens quadrato [27. 6.]: applicetur, sitque F punctum applicationis, erit recta FE aequalis perpendiculo quaesito.

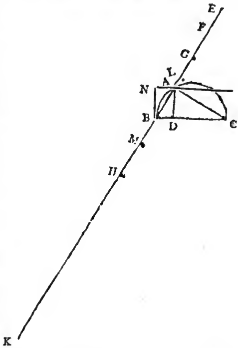
Et quoniam ad inveniendum triangulum, describendus est semicirculus super datam basim BC, et tum ipsi BC ad rectos angulos ducenda est recta aequalis ipsi EF, ut recta per hujus terminum ducta, parallela ipsi BC, occurrat circumferentiae in punctis quorum utrumque erit vertex trianguli quod Problemati satisfaciet; patet rectam EF hoc est AD, non majorem debere esse dimidio basis BC; si autem aequalis fuerit EF dimidio basis, parallela praedicta continget circulum et propterea unicum erit triangulum quod Problemati satisfaciet. Datâ autem basi BC, recta BE quod hoc efficiet ita invenietur. Puta factum, sitque triangulum ABC, reliquisque ut prius manentibus, praeterea bifariam secentur BG, BH in punctis L, M. Igitur ex Hypothesi est EF ipsi BL, sive MH aequalis, quare ME aequalis est ipsi HF, et quadrata ex illis aequalia erunt. Quoniam vero ostensum fuit rectangulum KF, FE aequale ipsi HE, EG, ablato utroque ex quadrato ex HE dimidio ipsius KE, erit reliquum [5. 2.] quadratum scilicet ex HF aequale reliquo [2. 2.] rectangulo EH, HG, hoc est, quia aequales sunt HB, BG, duplo rectangulo EH, HB. Ostensum autem fuit quadratum ex ME aequale quadrato ex HF; quadratum igitur ex ME aequale est duplo rectangulo EH, HB. Quoniam vero secta est recta BE in puncto L, ipsique adjecta est BM aequalis ipsi BL, erit [8. 2.] quadratum ex tota ME aequale quadruplo rectangulo EB, BM una cum quadrato ex LE, hoc est duplo rectangulo EB, BH una cum quadrato ex LE, quae propterea simul aequalia erunt duplo rectangulo EH, HB; et ablato communi, duplo scilicet rectangulo EB, BH, erit reliquum quadratum ex LE aequale reliquo, duplo scilicet quadrati ex HB, sive basi BC, hoc est quadrato ex diametro quadrati super basi BC descripti. Data autem est basis BC, data igitur est LE, et data est BL aequalis scilicet basis dimidio; data igitur est recta BE.

Componetur autem hoc ita.

Sumatur recta BE aequalis ei quae componitur ex BL dimidio basis BC, et ex LE quae aequalis est diametro quadrati super basi descripti, et producta EB, in ea sumatur BH aequalis basi BC, et HK aequalis ipsi HE; fiat etiam BG aequalis ipsi BH, et BM aequalis ipsi BL. Quoniam igitur BE major est BC, sive BG, erit BE major GE, quare quadratum ex HE majus est rectangulo HE, EG. Ad rectam igitur KE applicari potest rectangulum aequale ipsi HE, EG deficiens quadrato [27, 28. 6.] applicetur, sitque KF, FE, erit FE aequalis ipsi BM dimidio basis.

Auferantur enim aequalia rectangula KF, FE scilicet et HE, EG ex quadrato quod fit ab HE, erit reliquum, quadratum scilicet ex HF aequale (reliquo rectangulo EH, HG, hoc est duplo rectangulo EH, HB, hoc est [3. 2.] duplo rectangulo EB, BH una cum duplo quadrati ex BH, hoc est quadruplo rectangulo EB, BM una cum quadrato ex LE, hoc est [8. 2.] quia aequales sunt MB, BL,) quadrato ex ME. Aequalis igitur est recta HF ipsi ME, et propterea recta HM, sive dimidium basis, rectae FE. Q. E. D.

Et ut ex Hypothesi quod FE aequalis sit dimidio basis BC sive rectae HM, sequitur BE, hoc est summam laterum et perpendiculi, aequalem esse basis dimidio BL una cum LE quae aequalis est diametro quadrati ex base. Ita, eodem prorsus ratiocinio, si recta FE, hoc est perpendiculum, minor sit dimidio basis, ut est in omni alio casu, ostendetur rectam BE minorem esse eâ quae componitur ex dimidio basis et diametro praedicti quadrati, et haec propterea recta maxima est summa laterum et perpendiculi; patet autem summam hanc semper majorem esse basi.



Haec etiam manifesta sunt ex eo, quod in triangulo rectangulo Isoscele supra datam basim BC, perpendicularis est major ea in alio quovis triangulo rectangulo super eandem basim, et summa laterum trianguli Isoscelis, major summa laterum in quovis alio triangulo rectangulo super eandem basim.

Componetur autem Problema ita.

Data sit BC basis, et BE summa laterum et perpendiculi trianguli rectanguli, ipsum describere. Debet autem BE major esse BC, at non major rectâ quae componitur ex dimidio basis et diametro quadrati super basim.

In BE sumantur BG, BH, utraque aequalis ipsi BC, et producatur BH ad K ita ut HK aequalis sit ipsi HE, et ad rectam KE applicetur rectangulum KFE aequale rectangulo HE, EG deficiens quadrato; describatur vero super BC semicirculus, et ducatur recta BN ipsi BC ad rectos angulos; aequalis vero ipsi FE, et per N ducatur recta parallela ipsi BC, occurratque circumferentiae in A, et jungantur AB, AC et ducatur AD perpendicularis ad BC. Erit ABC triangulum inveniendum, hoc est erit AF aequalis ipsi AC, nam hoc ostenso, quia FE aequalis est rectae AD, erunt BA, AD, AC simul aequales datae rectae BE.

Quoniam enim rectangulum KF, FE aequale est ex Constructione rectangulo HE, EG, commune addatur quadratum ex BG, et erit quadratum ex BG una cum rectangulo KF, FE aequale [6. 2.] quadrato ex BE. Apponatur commune quadratum ex FE, et quadratum ex BG una cum rectangulo KE, EF hoc est una cum rectangulo HE, EF bis, aequale erit quadratis ex BE, EF, hoc est [7. 2.] quadrato ex BF una cum rectangulo BE, EF bis. Auferatur commune, rectangulum scilicet BE, EF bis, et quadratum ex BG, hoc est ex BC, una cum rectangulo HB, EF bis aequale erit quadrato ex BF. Quoniam vero rectus est angulus BAC, erit quadratum ex BC aequale quadratis ex BA, AC, et rectangulum BC, AD bis, hoc est rectangulum HB, EF bis aequale erit rectangulo BA, AC bis. Igitur quadratum ex BC una cum rectangulo HB, EF bis aequale est quadratis ex BA, AC una cum rectangulo BA, AC bis, hoc est [4. 2.] quadrato ex BA, AC tanquam una recta, quod propterea aequale erit quadrato ex BF. Est igitur BA una cum AC aequalis rectae BF, et ideo recta AC aequalis est ipsi AF, et propterea recta BE aequalis est rectis BA, AC, AD simul. Q. E. D.

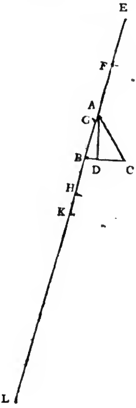
PROB. III.

Est praecedens generalius factum.

" DATIS in triangulo BAC, in quo angulus BAC non est rectus sed datus, basi BC,
" et summa perpendiculi AD, et laterum BA, AC; invenire triangulum."

Factum sit, et producatur latus BA ad E, sitque BE aequalis perpendiculo et lateribus simul, et propterea data; et sit AF aequalis lateri AC, erit igitur FE aequalis perpendiculo AD. Fiat utraque BG, BH aequalis basi BC. Quoniam igitur datus est angulus BAC, et est BF aequalis lateribus BA, AC simul, habebit [per 76 Dat.] excessus quadrati ex BF supra quadratum ex base BC ad triangulum ABC, et propterea ad duplum ipsius rectangulum BC, AD, hoc est HB, FE, rationem datam. Excessus autem ille aequalis est, quia BG aequalis basi, rectangulo HF, FG [6. 2.] data igitur est ratio rectanguli HF, FG ad ipsum HB, FE. Sit ratio haec

eadem rationi rectae BK bis ad basim BC; et quoniam data est BC data erit BK. Et quoniam rectangulum HF, FG est ad ipsum HB, FE, ut recta BK bis ad ipsam BC, vel BH, hoc est ut rectangulum BK, FE bis ad rectangulum HB, FE, erit rectangulum HF, FG aequale ipsi KB, FE bis; commune addatur quadratum ex BG, et [6. 2.] quadratum ex BF aequale erit quadrato ex BG una cum rectangulo KB, FE bis; commune addatur rectangulum BE, EF bis, erit quadratum ex BF una cum rectangulo BE, EF bis, hoc est [7. 2.] erit quadratum ex BE una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex BG una cum rectangulo KE, EF bis. Fiat KL aequalis ipsi KE, et quadrata ex BE, EF simul aequalia erunt quadrato ex BG una cum rectangulo LE, EF. Auferatur commune quadratum ex EF, erit reliquum quadratum ex BE aequale reliquo quadrato sc. ex BG una cum rectangulo LF, FE. Datae autem sunt rectae BE, BG, et quadrata ex ipsis data, igitur datum est rectangulum LF, FE; et data est recta LE, data igitur est recta FE [86. Dat.].



Determinatio vero et compositio fient ad normam earum in praecedente Problemate.

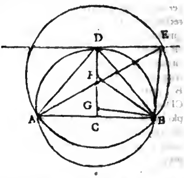
PROB. IV.

" Data basi trianguli, ejusque altitudine, datoque rectangulo lateribus contento, " ipsum describere."

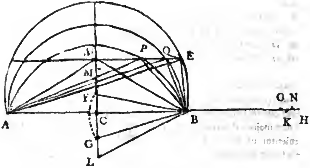
Sit recta AB positione et magnitudine data basis trianguli, et, bifariam secta AB in C, sit CD ad rectos angulos ipsi AB altitudo trianguli data, et per D ducta DE

parallela ipsi AB, inveniendum est in DE punctum E ita ut junctis AE, BE rectangulum AE, EB aequale sit dato spatio, triangulum enim AEB erit illud quod inveniendum est, altitudo enim ejus aequale est rectae CD.

Puta factum, igitur descripto circulo circa triangulum AEB, erit rectangulum contentum altitudine CD et diametro circuli aequale rectangulo a lateribus AE, EB per Prop. C. Lib. 6. Euclidis, Quod propterea datum est; et data est CD, quare diameter circuli magnitudine data est; centrum autem ejus est in recta CD quae bifariam et ad angulos rectos secat rectam AB [Cor. 1. 3.]. sit F centrum, et jungatur FB quae magnitudine data erit; quoniam igitur a dato puncto B ad rectam CD positione datam ducta est recta BF magnitudine data, erit BF positione data [34. Dat.] et est CD positione data, datum igitur est punctum F centrum scilicet circuli qui propterea positione datus erit, et positione data est recta DE [31. Dat.] datum igitur est punctum E [28. Dat.].



Quoniam vero ad compositionem requiritur ut recta magnitudine data ponatur a dato puncto B ad rectam CD positione datam, quod, ut patet ex [34. Dat.] non semper fieri potest, ideo Problema non semper potest construi. Fiet autem modo sin-



gulari, in casu scilicet in quo recta BC aequalis est rectae CD aut major ipsâ, si recta magnitudine data aequalis fuerit ipsi BC dimidio sc. rectae AB. Rectangulum autem datum quod hoc efficiet et triangulum in hoc casu ita invenientur; quoniam

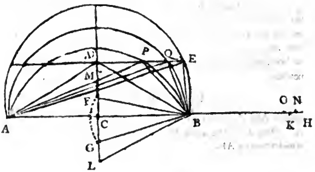
CB in hoc cafu eſt ſemidiameter circuli deſcribendi, ut occurſu circumferentiae ejus cum recta poſitione data DE inveniatur vertex trianguli, manifeſtum eſt debere CB vel aequalem eſſe rectae CD, vel ipſâ majorem; in primo cafu erit angulus ADB in ſemicirculo rectus, et rectangulum AD, DB a lateribus aequale rectangulo a CD et diametro, hoc eſt a CD, AB, et circulus centro C intervallo CB deſcriptus continget rectam DE in D; ſi vero CB major fuerit quam CD, circulus centro C per punctum B deſcriptus ſecabit rectam DE in duobus punctis quorum alterutrum ut Q erit vertex trianguli AQB ſuper baſim AB, quod habebit rectangulum a lateribus aequale rectangulo CD, AB ut in praecedente cafu. In alterutro autem cafu ſi ſumatur aliud quodvis triangulum ſuper baſim AB et altitudinem aequalem habens rectae CD, hoc eſt habens verticem in recta DE, circulus circa hoc triangulum deſcriptus major erit circulo cujus centrum eſt C et qui tranſit per B, quoniam ille circulus habet centrum in recta CD vel in ea producta ad utraſvis partes et tranſit etiam per punctum B, quare ſemidiameter ejus major eſt recta CB; rectangulum igitur contentum a CD et ſemidiametro hoc majus eſt rectangulo CD, CB, et duplum illius majus duplo hujus, et propterea rectangulum a lateribus trianguli circa quod major circulus deſcriptus eſt majus eſt rectangulo a lateribus trianguli circa quod deſcriptus eſt circulus cujus ſemidiameter eſt CB, hoc eſt rectangulo CD, AB, quod rectangulum eſt propterea minimum.

In cafu autem in quo BC minor eſt quam CD, fiet Problema modo ſingulari, ſi poſitâ rectâ magnitudine datâ BG a puncto B ad rectam CD, ad ejus ſcilicet partes ad quas eſt D, fuerit BG aequalis rectae GD, in quo cafu circulus centro G per B deſcriptus continget rectam DE in D; erit enim triangulum ADB unicum quod in hoc cafu ſolvet Problema, et rectangulum a lateribus AD. DB erit minimum, hoc eſt ſi ſumatur aliud quodvis triangulum AEB baſim habens AB et cujus vertex E eſt in recta DE, erit rectangulum a lateribus AE, EB majus rectangulo AD, DB. Circulus enim circa triangulum AEB deſcriptus neceſſario cadit extra circulum qui contingit rectam DE in D, et propterea diameter ejus major eſt diametro hujus, quare rectangulum AE, EB majus eſt rectangulo AD, DB.

Componetur vero Problema ita.

Sit AB baſis trianguli deſcribendi poſitione et magnitudine data, ſitque CD quae biſariam et ad rectos angulos ſecat AB altitudo trianguli; et ſi ſpatium datum cui aequale debet eſſe rectangulum a lateribus aequale fuerit rectangulo CD, AB, in cafu in quo CD non major eſt quam CB, triangulum, aut duo triangula quae ſolvent Problema invenientur ut dictum fuit. Si vero CD major ſit quam CB, et ſpatium datum aequale fuerit rectangulo AD, DB, triangulum ADB ſolvet Problema. Si autem in cafu in quo CD non major eſt quam CB ſpatium datum non aequale fuerit rectangulo CD, AB, erit hoc rectangulo majus, quoniam rectangulum CD, AB minimum oſtenſum fuit. Sit ſpatium datum aequale quadrato ex BH, et ut CD ad BH, ita fiat BH ad quartam BK bis; et primo ſit ſpatium datum aequale quadrato ex BD quod

quidem majus eſt rectangulo CD, AB, hoc eſt duplo rectangulo DC, CB, quoniam quadrata ex DC, CB ſimul majora ſunt eo rectangulo, [7. 2.] et quoniam ex conſtructione rectangulum contentum CD et BK bis aequale eſt quadrato ex DB, ſive BH quod majus oſtenſum eſt rectangulo DC, CB bis, erit BK recta major ipſa BC; et propterea circulus centro B intervallo BK deſcriptus occurret rectae CD in duobus punctis; ſint haec L, M, quorum L ſit ad contrarias partes puncti C ad quas eſt D, et jungatur BL. Et quoniam rectangulum contentum CD et diametro circuli circa triangulum ADB deſcripti aequale eſt [8. et 17. 6.] quadrato ex DB, hoc eſt ex BH, hoc eſt rectangulo CD, BK bis, erit diameter circuli aequalis rectae BK bis; eſt igitur BK, ſive BL aequalis ſemidiametro, et propterea eſt L centrum circuli qui quidem continget rectam DE in D. Et ſi centro M per B deſcribatur alius circulus, circumferentia hujus occurret rectae DE in duobus punctis quae erunt vertices duorum aliorum triangulorum quae eadem praeſtant cum triangulo ADB; ſunt igitur in hoc caſu tria triangula quae Problemati ſatisfacient.



Si vero ſpatium datum quadratum ſc. ex BN minus fuerit quadrato ex BD, ſemper autem majus debet eſſe rectangulo CD, AB, ut oſtenſum fuit, fiat ut CD ad BN, ita BN ad BO bis; quoniam igitur rectangulum CD, BO bis, hoc eſt quadratum ex BN majus eſt rectangulo CD, AB, erit BO bis major quam AB, et BO propterea major quam CB. Igitur circulus centro B, intervallo BO deſcriptus neceſſario occurret rectae CD in duobus punctis; ſint haec F, G quorum G ſit ad partes rectae AB contrarias iis ad quas eſt punctum D; et quoniam rectangulum CD, BO bis aequale eſt ex conſtructione quadrato ex BN quod, ex hypotheſi minus eſt quadrato ex BD, hoc eſt rectangulo CD, BK bis, erit recta BO minor ipſa BK, hoc eſt erit recta BG minor rectâ BL; quare cadet punctum G inter L, C puncta. Quoniam vero LG, GB ſimul majores ſunt quam LB hoc eſt quam LD, circumferentia circuli centro G per B deſcriptus occurret rectae CD productae ad partes D, et propterea

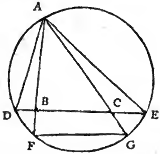
fecabit rectam DE in duobus punctis, quorum alterutrum fit P, et junctis AP, BP, erit APB triangulum inveniendum; eft enim [Prop. C. 6.] rectangulum a lateribus AP, PB aequale rectangulo a CD et diametro circuli circa APB defcripti, hoc eft rectangulo CD, GB bis, five CD, BO bis, hoc eft quadrato ex BN, hoc eft fpatio dato. Patet autem circumferentiam centro F intervallo FB defcriptam occurrere rectae DE in duobus punctis quorum alterutrum fit E, et junctis AE, BE, triangulum AEB habebit etiam rectangulum a lateribus AE, BE aequale quadrato ex BN. Sunt igitur in hoc cafu quatuor triangula quae Problemati fatisfacient.

Si vero fpatium datum majus fuerit quadrato ex BD, eadem facta conftructione, duo invenientur centra circulorum, quorum is cujus centrum eft ad partes rectae AB ad quas eft punctum D occurret rectae DE in duobus punctis; at quoniam alter cujus centrum eft ad contrarias partes rectae AB major eft circulo centro L per B defcriptus qui quidem contingit rectam DE in D, cadet hic alter infra circulum contingentem rectam DE et propterea huic rectae non occurrit. Igitur in hoc cafu duo tantum triangula invenientur.

Denique fi recta CD major fuerit ipfa CB, hoc eft fi angulus ADB minor fuerit angulo recto, eadem facta conftructione, invenientur duo centra circulorum quorum is cujus centrum eft ad partes rectae AB ad quas eft D occurret rectae DE in duobus punctis, alter vero non occurret propter rationem in proxime praecedente cafu dictam. Et in hoc fimiliter ac in eo cafu duo tantum Problemati quae fatisfacient triangula invenientur.

LEMMA.

SIT triangulum ABC, et ducantur duae rectae lineae DA, AE in angulis aequalibus BAD, EAC. Dico ut rectangulum DCE ad rectangulum DBE, ita effe quadratum ex AC ad quadratum ex AB.

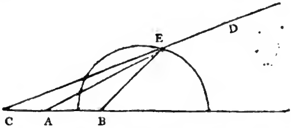


Eft Propofitio 12ma, Lib. 6ti, Pappi Alexandrini; tantum deeft haec figura pro cafu fc. quo AD, AE cadunt extra ipfas AB, AC. Demonftratio eadem eft.

PROB. V.

" DATIS duobus punctis A, B ab ipsis ad datam positione rectam CD inflectere
" duas rectas datam inter se rationem habentes.

Factum sit, et inflectantur AE, BE ad rectam CD; igitur tangit punctum E cir-



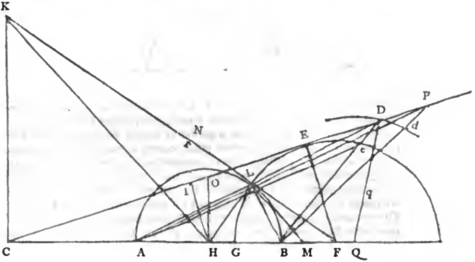
cumferentiam positione datam per Prop. 2. Lib. 2. Apollonii de locis planis. Idem vero punctum tangit rectam CD positione datam, quare punctum E datum est.

Quoniam vero ad compositionem requiritur ut circulus describatur qui locus sit punctorum E, atque ut circumferentia ipsius occurrat rectae CD; ideo problema non erit in omni casu possibile. Si vero acciderit circulum contingere rectam CD, unica erit problematis solutio. Ratio autem ipsarum AE, BE quae efficiet ut circulus contingat rectam CD ita invenietur. Puta factum sc. contingat circulus cujus centrum est F rectam CD in E, et jungatur FE; proportionales igitur sunt AF, FE, FB ut ex citata propositione constat. Et quoniam datur angulus FCE, et datus est angulus rectus FEC, specie dabitur triangulum CFE [40. Dat.]. Data igitur est ratio quadrati ex CF ad quadratum ex FE, hoc est ad rectangulum AFB. Et data sunt puncta C, A, B. Ergo ad sectionem determinatam deductum est, sc. inveniendum est punctum F quod faciat quadratum ex CF ad rectangulum AFB in data ratione.

Componetur vero hoc ita; a quovis in CB puncto H ducatur ad CD perpendicularis HI, et invento puncto F quod facit quadratum ex CF ad rectangulum AFB, ut quadratum ex CH ad quadratum ex HI; inter AF, et BF media proportionalis sumatur GF; circulus centro F intervallo FG descriptus continget rectam CD; et ratio quaesita erit ea quam habet AF ad FG. Ducatur enim FE perpendicularis ad CD. Et quoniam ex constructione est quadratum ex CF ad rectangulum AFB, hoc est ad quadratum ex FG, ut (quadratum ex CH ad quadratum ex HI, hoc est ut) quadratum ex CF ad quadratum ex FE, erit FG aequalis ipsi FE, et circulus descriptus centro F per punctum G transibit per E, et propterea continget rectam CD.

Poterit autem punctum F vel inveniri in AB producta versus partes B, vel in ea producta ad contrarias partes; adeoque duae erunt problematis determinationes.

Et primò fit F in AB producta ad partes B; et inquirendum est an ratio ipsarum AE, BE hoc est (ut patet ex predicta Prop. 2. Lib. 2. de Locis planis) ratio AF ad GF maxima vel minima fit rationum quas habere poterint duae aliae rectae a punctis A, B ad quodvis aliud in CD punctum eductae. Ducantur quaevis duae AD, BD quarum BD occurrat circulo GE in e; erit igitur, junctâ Ae, per citatam Propof. Ae ad Be, ut AF ad FG; et est AF major FG, quare Ae major est Be; ergo, addita communi eD, erit ratio Ae ad Be major ratione Ae una cum eD ad ipsam BD; et haec ratio major adhuc est ratione AD ad BD. Multo igitur est ratio Ae ad Be major

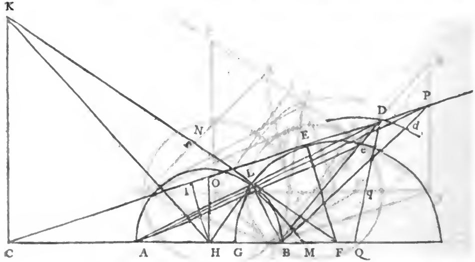


ratione AD ad BD. Quare ratio Ae ad Be, hoc est ratio AF ad FG five AE ad BE est maxima.

Ut determinetur vero ratio AF ad FG, describatur circulus super diametrum AB, sitque centrum ejus H; et ducatur FL ipsum contingens in L; et quoniam quadratum ex FL aequale est rectangulo AFB, hoc est ex constructione quadrato ex FG; erit punctum L etiam in circulo GE. Ducatur a puncto C recta ipsi CA ad rectos angulos. Occurratque FL productae in K, et HL jungatur, quae ad rectos angulos erit ipsi FL [18. 3.]. Fiat autem rectangulum CFM aequale ipsi AFB, hoc est quadrato ex FL; et, junctis LM, LC erit angulus MLF aequalis angulo FCL et demptis

In schemate desunt rectae CL, AE, BE quae addi debebant, ideoque subintelligendae sunt.

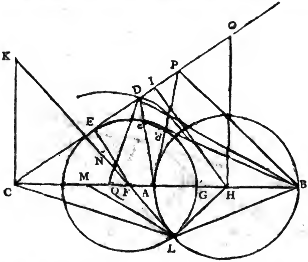
hisce ex angulis rectis FLH, FCK, erit reliquus MLH reliquo LCK aequalis; et aequalis est angulus MHL ipsi CKL; quare aequiangula sunt triangula MHL, LKC; et ut CK ad HL, ita erit KL ad HM. Et per 12. 5, ut CK ad HL, ita est CK una cum KL ad AM. Et ita est contentum AC et ipsis CK, KL simul ad rectangulum MAC. Rursus quoniam est CK ad HL, ut KL ad HM, erit per 19. 5. (facta KN aequali ipsi KC) CK ad HL, ut NL ad BM; et ita est rectangulum contentum BC, NL ad ipsum CBM. Ergo ut contentum AC et ipsis CK, KL simul ad contentum CB, NL, ita est CAM ad CBM. Quoniam vero rectangulum AFB aequale est quadrato ex FL; erit angulus BLF aequalis ipsi FAL, quorum angulus MLF aequalis est ipsi FCL; reliquus igitur BLM aequalis est reliquo ALC: ergo per



Lemma huic praemissum est rectangulum CAM ad ipsum CBM, ut quadratum ex AL ad quadratum ex BL, hoc est ex citata 2da Prop. Lib. 2. de Locis planis, ut quadratum ex AF ad quadratum ex FG. Fuit autem contentum AC et ipsis CK, KL simul ad contentum CB, NL, ut rectangulum CAM ad ipsum CBM; ergo ut quadratum ex AF ad illud ex FG, ita est rectangulum contentum AC ipsisque CK, KL simul ad rectangulum CB, NL. Est autem quadratum ex CK una cum rectangulo ACB aequale quadrato ex KL, utrumque enim, addito quadrato ex AH seu HL, aequale est quadrato ex KH; quare rectangulum ACB aequale est (excessui quadrati ex KL supra illud ex CK seu KN, hoc est [6. 2.]) rectangulo contento CK, KL simul et ipsa LN. Igitur ut AC ad LN, ita est CK una cum KL ad CB; et per 1. 6.

ut quadratum ex AC ad quadratum ex LN, ita eſt rectangulum contentum AC ipſiſque CK, KL ſimul ad contentum LN, CB; et ita oſtenſum fuit quadratum ex AF ad quadratum ex FG. Quare per 22. 6. eſt AC ad LN, ut AF ad FG; hoc eſt ratio maxima ſc. ratio AF ad FG, eadem eſt ei quam habet AC ad illam LN quae eſt exceſſus ipſius KL quae poteſt quadratum ex CK et rectangulum ACB ſimul, ſupra ipſam CK. Eſt autem CK ea quae ad AH rationem habet eandem quam CF ad FL ſeu FE, hoc eſt quam habet CH ad HI.

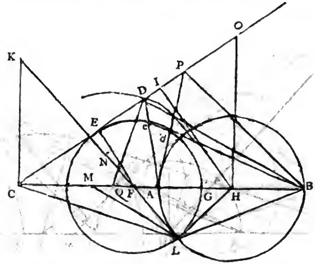
Sit jam punctum F in BA producta ad partes A, et quoniam quadratum ex CH majus eſt quadrato ex HI, erit quadratum ex CF majus rectangulo AFB; quare neceſſe eſt punctum F cadere inter C, A puncta. Ratio autem AE ad BE erit mini-



ma. Nam ductis ad aliud quodvis punctum D in recta CD, rectis AD, BD quarum AD occurrit circulo GE in e, et junctâ Be, erit Ae ad Be, ut AE ad BE, ſeu ut AF ad FG; et quoniam eſt AF minor FG erit Ae minor Be, quare addito communi eD, erit ratio Ae ad Be minor ratione AD ad ipſas Be, eD ſimul, et haec adhuc minor eſt ratione AD ad BD. Multo igitur ratio Ae ad Be minor eſt ratione AD, ad BD; quare ratio Ae ad Be hoc eſt ratio AF ad FG eſt minima.

Iiſdem autem conſtructis quae in caſu praecedente, ita determinatur ratio AF ad FG; oſtendetur ſc. ut in eo angulus MLF aequalis angulo FCL, additiſque angulis rectis FLH, FCK erit angulus MLH aequalis ipſi LCK; quare aequiangula ſunt

triangula MHL, LKC, ut in praecedente oftenfum fuit. Et ut LH ad CK, ita erit MH ad KL; et per 19. 5. ut LH ad CK, ita eft MA ad NL (facta fc. KN aequali ipfi KC) et ita eft rectangulum CAM ad illud contentum CA, NL. Rurfus quoniam eft LH ad CK, ut MH ad KL, erit per 12. 5. LH ad CK, ut MB ad ipfas CK, KL fimul; et ita eft rectangulum CBM ad contentum CB et ipfis CK, KL fimul. Ergo ut CAM ad CBM rectangulum, ita eft rectangulum CA, NL ad contentum CB ipfifque CK, KL fimul. Quoniam vero rectangulum BFA aequale eft quadrato ex FL, erit angulus BLF aequalis ipfi FAL [6. 6.]; et eft angulus MLF aequalis ipfi FCL; quare totus angulus MLB aequalis erit ipfis FAL, FCL hoc eft ipfis CAL, ACL fimul. Igitur anguli MLB, CLA hoc eft anguli CLB, MLA fimul aequales funt

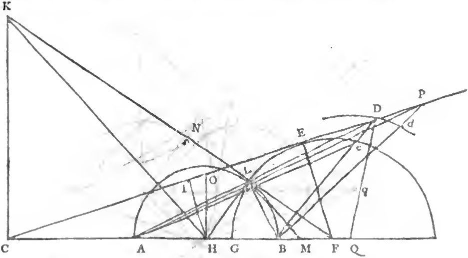


ipfis CAL, ACL, CLA hoc eft duobus rectis [32. 1.] ergo per Prop. 27. Lib. 7. Pappi Alexandrini eft rectangulum CAM ad ipfum CBM, ut quadratum ex AL ad quadratum ex BL, hoc eft ut quadratum ex AF ad quadratum ex FG. Fuit autem rectangulum CAM ad ipfum CBM, ut rectangulum CA, NL ad contentum CB ipfifque CK, KL fimul. Ergo ut quadratum ex AF ad illud ex FG, ita eft rectangulum CA, NL ad contentum CB, ipfifque CK, KL fimul. Oftendetur vero ut in praecedente cafu effe CA ad CK, KL fimul, ut NL ad CB, quare per 1. 6. eft quadratum ex CA ad illud ex CK, KL tanquam una linea, ut contentum CA, NL ad contentum CB ipfifque CK, KL fimul; et ita oftenfum fuit quadratum ex AF ad

In fchemate plures lineae fubintelliguntur quafi ductae.

illud ex FG. Quare per 22. 6. eſt CA ad ipſas CK, KL ſimul, ut AF ad FG; hoc eſt ratio minima ſc. ratio AF ad FG eadem ei quam habet CA ad CK una cum ea quae poteſt quadratum ex CK una cum rectangulo ACB.

Reſtat oſtendendum quomodo rationes majores vel minores fiunt prout puncta ſumuntur in recta CD ad utraſque partes punctorum E quae faciunt rationem maximam vel minimam. Et primò ſi a puncto H, quod AB biſariam ſecat, ducatur ad CD recta HO ad rectos angulos ipſi AB, erunt junctae AO, BO inter ſe aequales. Si autem ſumatur quodvis punctum D in recta CO producta ad partes O, et jungantur AD, BD, erit AD major BD; eſt enim angulus ABD major ABO ſeu BAO, at angulus BAD eodem BAO eſt minor, quare angulus ABD major eſt BAD, et prop-



terea AD major BD [19. 1.]. Contrarium autem eveniet ſi punctum D ſumatur ad contrarias partes puncti O. Praeterea puncta quae propiora ſunt puncto E quod facit maximam rationem, majorem rationem faciunt quam puncta ab ipſo E remotiora, ad utraſque partes ipſius E. Sit enim punctum D propius E quam punctum P, et primo ſint in CE producta ad partes E. Et ducantur ab ipſis rectae ad A, B. A puncto vero D ducatur recta Dq faciens angulum BDq aequalem ipſi BAD; et quoniam oſtenſa fuit AD major BD, erit angulus BAD minor ABD, quare et BDq minor eſt ABD, et propterea anguli BDq, DBF ſimul minores ſunt duobus rectis, et occurrent Dq, BF ſibi mutuo ad partes AB ad quas eſt F. Occurrant in Q. Quoniam igitur quadratum ex FL ſeu FE aequale eſt rectangulo AFB erit [6. 6.] angu-

lus FEB aequalis ipsi FAE; et est angulus QDB aequalis angulo FAD qui minor est ipso FAE, quare angulus QDB minor est angulo FEB. Et minor est BDE exteriore BEC; totus igitur QDE minor est toto FEC hoc est angulo recto. Quoniam igitur obtusus est angulus QDP, circulus centro Q per D descriptus occurret rectae BP intra angulum QDP. Occurrat ei in d et Ad jungatur. Est igitur per Prop. 2. Lib. 2. de Locis planis, ratio Ad ad Bd eadem rationi AD ad BD; ostendetur vero ut in praemissis rationem Ad ad Bd majorem esse ratione AP ad PB, quare ratio AD ad BD ratione AP ad PB major est. Similiter idem ostendetur si puncta D, P fuerint inter E, O puncta, et D propius ipsi E quam P. Si autem in hoc casu inciderit punctum P in O, jam ostensum est punctum O facere rationem aequalitatis; punctum autem quodcunque in CO producta facere rationem majoris ad minus.

Si autem sumatur punctum E in fig. 2. quod facit rationem minimam, similiter ostendetur puncta ipsi propiora facere rationes minores quam puncta remotiora ad utrasque ipsius E partes; patet igitur quomodo rationes majores aut minores fiunt. Q. E. D.

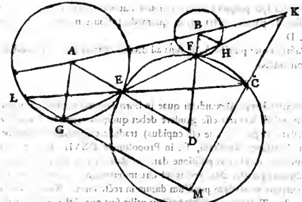
N. B. Casus in quo puncta A, B sunt ad diversas partes puncti C similiter solvetur mutatis mutandis.

INTER Lemmata Pappi Alexandrini quae in libro septimo mathematicarum collectionum (quas adhuc servatas esse gaudere debet quisquis veterum, hoc est verae et genuinae analyseos geometricae est cupidus) tradidit elegantissimus author, extat problema in Tactiones Apollonii, sc. in Propositione CXVII. Lib. 7. quo problemate requiritur, ut circulo positione dato, et datis tribus punctis in recta linea, inflectere a duobus punctis duas rectas ad circumferentiam, et facere puncta quibus ei rursus occurrunt et tertium punctum datum in recta linea. Reliqua Lemmata in Tactiones, quibus Tactionum problematibus utilia sint non difficile est investigare, et quibusdam ex iis usus est Vieta in Apollonio Gallo; verum cui problemati inserviret praedictum Lemma neque Vieta neque alius quispiam geometra divinare adgressus est. Saepe quidem id animo revolvi, verum ne hilum ejus quod quaerebam assecutus sum, nisi quod non laevibus indiciis videbatur Lemma utile esse problemati, quo duobus positione datis circulis et puncto, requiritur tertium describere qui datos contingat et per datum punctum transeat; quonam vero modo huic utile esset minime videbam. Vietae solutionem aliasque consideravi, ut si forte in analysin Lemmatis hujus indigentem inciderem, verum frustra, donec hodie genuinam Apollonii Analysin post varias tentatas, inveni, cui quidem tum haec Pappi prop. CXVII, tum CXVI et CXVIII manifestissime inserviunt. Feb. 9. 1734.

PROB. VI.

"DATIS duobus circulis positione et magnitudine quorum centra A, B, datoque "puncto C; circulum describere qui positione datos contingat et transeat per da- "tum punctum."

Factum sit, sc. contingat circulus cujus centrum D ipsos quorum centra A, B in punctis E, F, et juncta EF occurrat circulis rursus in G, H, et junctae AB in K, id quod fiet nisi aequales fuerint AE, BF, per Prop 116. Lib. 7. Pappi Alex. et jungantur AD, BD, quae per contactus E, F transibunt, jungantur etiam AG, BH;

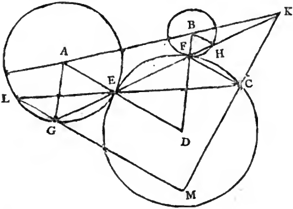


et quoniam in triangulis Isoscelibus AEG, DEF, anguli ad bases GEA, FED sunt aequales, erunt et AGE, DFE aequales; quare parallelae sunt rectae AG, DFB; et igitur ut AG ad BF, ita est AK ad KB, et ita etiam GK ad KF; et dantur AG, BF magnitudine, quare et ratio AK ad KB, ut et ratio GK ad KF datur; et quoniam datur ratio AK ad KB, et est AB positione et magnitudine data, dabitur punctum K; Jungatur CF et CE quae circulo EG rursus occurrat in L, et juncta LG occurrat junctae KC in M; et quoniam circuli EGL, EFC se mutuo contingunt in E, per quod ductae sunt rectae FEG, CEL, erunt LG, CF inter se parallelae per Prop. 102. aut 106. Lib. 7. Pappi Alex. Est igitur propter parallelas GK ad KF, ut MK ad KC, et ostensum est rationem GK ad KF datam esse; quare datur ratio MK ad KC, et datur KC positione et magnitudine propter data C, K puncta; quare datur KM et punctum M. Quoniam igitur data sunt tria puncta K, C, M in recta linea, et a

duobus ipforum fc. C, M inflexae funt CL, ML ad circumferentiam circuli pofitione dati quae faciunt GE in directum ipfi EK, pofitione dabuntur CL, ML per propofitionem 117am Lib. 7. Pappi Alexandrini, et pofitione datur circulus LGE; quare dantur G, E puncta et recta GE pofitione et datur circulus FH pofitione, ergo datur F punctum; et igitur circulus EFC, qui tranfit per tria puncta data pofitione, datur. Quod erat inveniendum.

Componetur vero ita.

Sint A, B centra circulorum pofitione datorum, et punctum datum fit C; jungatur AB et producatur verfus partes minoris circuli B ad punctum K, ut AK fit ad KB ut femidiameter circuli cujus centrum A ad femidiametrum circuli cujus centrum B; jungatur KC et fiat ut KB ad KA, ita KC ad quartam KM; et a punctis C, M



inflectantur ope fcilicet Prop. 117. Lib. 7. Pappi, ad circumferentiam circuli cujus centrum eft A rectae CL, ML eidem rurfus occurrentes in E, G ita ut GEK fit recta linea; et quoniam ex conftructione AK eft ad KB in ratione quam habent femidiametri circulorum ad fe invicem, et recta GK fecat circulum A, eadem neceffario fecabit circulum B per Prop. 118. Lib. 7. Pappi Alexandrini. Secet in F, H punctis; fit vero E propius puncto K quam G in majore circulo, et F remotius ab eodem K quam H in minore, et per puncta E, F (fc. in cafu quo circulus defcribendus debet effe extra datos utrofque) C defcribatur circulus fitque centrum ejus D; continget haec datos in E, F: jungantur enim AG, AE, BF, BH, DE et DF. Et quoniam in triangulis KAG, KBF quae communem habent angulum ad K, eft ex conftructione KA ad AG, ut KB ad BF, reliqui vero anguli AGK, BFK funt utrique minores recto, erit per 7. 6. angulus AGK aequalis ipfi BFK, quare paral-

lelae sunt AG, BF, et igitur est GK ad KF, ut (AK ad KB, hoc est ex constructione ut) MK ad KC; parallelae igitur sunt CF, MGL; quare circuli LGE, EFC se mutuo in puncto E contingunt per prop. 104. aut 106. Pappi Lib. 7. et per prop. 110. ejusdem libri recta erit linea AED, et quoniam in triangulis Isoscelibus GAE, FDE aequales sunt anguli AEG, DEF, aequales erunt et AGE, DFE, et est AGE aequalis ipsi BFK, quare aequales sunt DFE, BFK; recta igitur est linea DFB; ergo se mutuo contingunt circuli EFC, FH per prop. 99. Lib. 7. Pappi. Q. E. D.

Plures autem sunt casus hujus propositionis qui postea declarandi sunt.

N. B. Editio Datorum, quae per totum opus citatur, est ea, quae Glasguae prodiit An. 1762.

FINIS.

25

1.5.132

- controllo collazione;
- smontaggio e scucitura;
- restauro carta (rammendo piega, imbrachettatura, sutura di strappi e lacune): carta giapponese Vang 517, veline giapponesi Vang 502, 508 e 561, adese con Tylose MH300p al 6%;
- ricomposizione dei fascicoli;
- pressatura tra cartoni, sotto pressa a colpo;
- preparazione fogli di guardia struttura "F" in Ingres Vang 20231 e pelle uovo;
- loose guard in carta giapponese Vang 517;
- cucitura piena su 4 sottili nervi di canapa a 5 capi, cuciti a nervo ma leggermente affondati nel precedente grecaggio, per mantenere il dorso liscio: corde di pura canapa, fili di lino inglese ritorto;
- preparazione piatti: recupero cartoni originali, condizionati e rinforzati sulla faccia interna con spessore di cartone per contrastare l' ondulazione;
- stondatura del dorso;
- incartonatura: utilizzate le sedi originali;
- capitelli base: naturali, passanti al centro fascicoli e sotto catenella; anima in canapa, fili di lino inglese ritorto;
- capitelli ornati: cuciti su capitelli base, in cotone ritorto fiorentino, doppi;
- indorsatura: con tubo in carta giapponese e pelle uovo;
- copertura: restauro coperta originale con distacco del dorso; nuova 1/2 pelle portante, scarnita adeguatamente; adesione al dorso della 1/2 pelle e suo inserimento sotto pelle originale dei piatti; riapplicazione di dorso della coperta originale sulla nuova 1/2 pelle: Tylose MH300p e pelle di capra a concia mista;
- incassatura delle controguardie a piatto aperto.

gennaio 1998